



OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

BOHUMIL KRAJC,
PETR BEREMLIJSKI

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Bohumil Krajc, Petr Beremlijski
Obyčejné diferenciální rovnice

Předmluva

Vážený čtenáři,

předkládaná publikace je věnována podrobnému výkladu několika vybraných partií z teorie obyčejných diferenciálních rovnic. Ve snaze Vás již od začátku zaujmout, v úvodní kapitole diskutujeme řadu různorodých úloh vedoucích k rovnicím obsahujícím derivace neznámé funkce jedné reálné proměnné - k obyčejným diferenciálním rovnicím. Jedná se zejména o odvození modelů popsaných lineárními diferenciálními rovnicemi. Lineárním diferenciálním rovnicím je v celém textu věnována vůbec největší pozornost, lze je totiž považovat za vstupní bránu do celé oblasti a také se nejčastěji vyskytují v aplikacích. Důraz je kladen zejména na popis a zdůvodnění příslušných výpočetních postupů. Kromě lineárních diferenciálních rovnic jsou studovány také další třídy více či méně významných typických úloh. Neopstradatelné pojednání o metodě řešení rovnic se separovanými proměnnými je tak například doplněno náročnějším rozбором určitého zobecnění těchto rovnic - exaktními diferenciálními rovnicemi, které jsou zajímavé především v kontextu teorie potenciálu. Schopnosti výpočetní techniky dnes umožňují efektivně numericky řešit i velmi složité nelineární úlohy, a tak je do kurzu zařazeno několik prerekvizitních pasáží o kvalitativních vlastnostech řešení diferenciálních rovnic. Jedná se zejména o výsledky charakterizující podmínky zajišťující v obecném případě existenci a jednoznačnost řešení Cauchyových úloh. Popis sofistikovaných numerických řešičů ovšem v tomto elementárním textu nenaleznete.

Pro porozumění výkladu je, kromě jisté vytrvalosti, potřebná znalost základních poznatků z lineární algebry, z diferenciálního počtu reálných funkcí jedné a více reálných proměnných a především pak z integrálního počtu funkcí jedné reálné proměnné. Podle našich zkušeností můžeme před samotným čtením tohoto textu studentům doporučit, aby si předem doplnili případné mezery z uvedených oblastí tím, že si zopakují zejména:

- Věty o substituci pro neurčitý i určitý integrál
- Základní vlastnosti Riemannova integrálu jako funkce proměnné meze
- Větu o derivaci inverzní funkce
- Větu o derivaci složené funkce několika proměnných

- Větu o implicitně zadaných funkcích

Řada obyčejných diferenciálních rovnic vznikla při zkoumání dějů, které závisejí na čase. Proto jsme se rozhodli nezávisle proměnnou většinou označovat symbolem t . Správně se má s funkcemi manipulovat jako s autonomními objekty, proto bychom například měli korektně psát $\sin$ a ne $\sin t$, chceme-li hovořit o funkci sinus. Při popisu různých algoritmů je však často názornější ztotožnit funkci s jejím předpisem, tedy s vyznačením nezávislé proměnné. Podle kontextu potom například výraz e^t může znamenat označení pro exponenciální funkci, označení vlastního předpisu pro tuto funkci nebo hodnotu (tedy reálné číslo) exponenciální funkce v pevném čase t . Doufáme, že uvedená volnost ve značení bude vždy správně interpretována a naše nedůslednost ve značení odpuštěna. Prosíme ještě o laskavou toleranci k následující nedůslednosti. Protože naším záměrem bylo co nejvíce vyjít vstříc cílové skupině čtenářů, rozhodli jsme se většinou popisovat dané metody řešení s použitím neurčitých integrálů, které jsou u studentské obce výrazně populárnější, než zápisy používající Riemannova integrálu s proměnnou mezí. To ovšem vede k tomu, že někdy budeme na příslušném otevřeném intervalu J pod označením $\int f(t) dt$ rozumět jednu „vhodnou“ konkrétní primitivní funkci k funkci f na J , jindy zase libovolnou primitivní funkci k f na J a konečně, často budeme integrál $\int f(t) dt$ chápat jako systém všech funkcí, které jsou na J primitivní k funkci f . Připomeňme, že na otevřeném intervalu se dvě primitivní funkce liší nejvýše o konstantu, proto budeme někdy zdůrazňovat interpretaci neurčitého integrálu jako množiny, popřípadě libovolné primitivní funkce přidáním „integrační konstanty“ do zápisu: $\int f(t) dt + C$, $C \in \mathbb{R}$. Nejdůležitější tvrzení o řešeních diferenciálních rovnic se v textu ovšem snažíme vždy zformulovat tak, abychom se popsáním nepřesností vyhnuli.

O textu

Důležitá tvrzení, poznámky a příklady jsme se snažili pojmenovat, příslušné slogany jsou samozřejmě pouze orientační. Máme zato, že to vede k lepší následné orientaci při odkazování na uvedená tvrzení při následné argumentaci. Nejdůležitější tvrzení jsou graficky zvýrazněna. Věty jsou uvedeny v rámečku. Konce důkazů jsou vyznačeny prázdným čtverečkem ($\square$), konce řešení příkladů plným trojúhelníčkem ($\blacktriangle$). Obtížnější či rozšiřující pasáže jsou označeny hvězdičkou ($\star$) a jsou od ostatního textu odlišeny menším typem písma. Text byl vysázen pomocí sázecího systému $\text{\LaTeX}$ ve formátu pdf $\text{\LaTeX}$.

O projektu

Text, který právě čtete, vznikl v rámci řešení projektu „Matematika pro inženýry 21. století – inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Projekt byl řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009 – 2012.

Hlavní motivací projektu je potřeba reagovat na změny významu jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně prezentace některých pojmů v základních kurzech neodráží z nejrůznějších důvodů potřeby odborných kateder. Bohužel tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe.

Cílem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

V rámci projektu vytváříme 41 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, diskrétní matematiky, teorie grafů, statistiky a několika odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály jsou volně k dispozici na webových stránkách projektu <http://mi21.vsb.cz>.

Autoři předem děkují za všechny případné nápady a návrhy k vylepšení textu i za upozornění na chyby. Závěrem dovolu, abychom poděkovali Ing. Pavlu Praksovi, Ph.D., za řadu konstruktivních připomínek k podstatné části skript a Ing. Marii Sadowské, Ph.D. a Bc. Matyášovi Theuerovi za pomoc při grafickém zpracování úvodní kapitoly. Jejich poděkování patří také MUDr. Michalu Pětrošovi za trpělivé a laskavé uvedení do problematiky farmakokinetiky. Jsme také vděční za pomoc při přepisu části textu do L^AT_EXu, kterou nám poskytli studenti Ondřej Zjevík, Ondřej Grunt a Michal Malér.

V Ostravě 1.8. 2012

Bohumil Krajc a Petr Beremlijski

Obsah

Předmluva	iii
1 Motivace, modely vedoucí k ODR a jejich soustavám	1
2 Pojem řešení ODR a další základní pojmy	24
Příklady k procvičení	28
3 Rovnice se separovanými proměnnými	29
Příklady k procvičení	39
Klíč k příkladům k procvičení	39
4 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu	40
Příklady k procvičení	50
Klíč k příkladům k procvičení	51
5 Obecné věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu	52
Příklady k procvičení	56
Klíč k příkladům k procvičení	57
6 Geometrická interpretace ODR a nástin numerických metod	58
7 Bernoulliova diferenciální rovnice	62
8 Exaktní diferenciální rovnice	67
Příklady k procvičení	85
Klíč k příkladům k procvičení	86
9 Obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu - základní vlastnosti	87
10 Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů	92
Příklady k procvičení	124
Klíč k příkladům k procvičení	126

11 Systémy obyčejných diferenciálních rovnic	128
Příklady k procvičení	154
Klíč k příkladům k procvičení	155
Literatura	156
Rejstřík	157

Kapitola 1

Motivace, modely vedoucí k ODR a jejich soustavám

Rovnice, ve kterých se vyskytují derivace neznámých funkcí, se nazývají diferenciálními rovnicemi. Pomocí diferenciálních rovnic lze popsat celou řadu zákonitostí, které se objevují v přírodních a společenských vědách. Z toho plyne, že základní poznatky a dovednosti z oblasti diferenciálních rovnic jsou součástí intelektuální výbavy většiny úspěšných přírodovědců, inženýrů, ekonomů i sociologů.

Řešeními diferenciálních rovnic jsou funkce, které popisují vlastnosti zkoumaných jevů. Budeme-li umět řešit diferenciální rovnice, znamená to, že budeme umět lépe rozumět okolnímu světu, řídit různé technologické i společenské procesy a ovlivňovat tak naši budoucnost. V této kapitole podrobněji nastíníme, jak diferenciální rovnice vznikají.

V partiích věnovaných integrálnímu počtu se řeší následující problém:

Je zadána funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Je třeba zjistit, pro jaké funkce $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definované na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, platí pro každé $x \in I$ vztah

$$y'(x) = f(x). \quad (1.1)$$

Rovnice (1.1) představuje speciální typ diferenciální rovnice. Uvedené rovnici na intervalu I zřejmě vyhovují všechny primitivní funkce k funkci f na I , hovoříme o řešeních rovnice. Podrobněji, přejde-li diferenciální rovnice po dosazení funkce φ v rovnost platnou na nějakém intervalu I , nazýváme funkci φ řešením¹ této rovnice na I .

Například jedním z řešení rovnice

$$y'(x) = 2x - \sin(x) \quad (1.2)$$

na intervalu $\mathbb{R}$ je funkce φ daná předpisem

$$\varphi(x) = x^2 + \cos(x).$$

¹Pojem řešení diferenciální rovnice bude upřesněn v další kapitole.

Skutečně, na $\mathbb{R}$ platí

$$\varphi'(x) = (x^2 + \cos(x))' = 2x - \sin(x).$$

Snadno ověříme, že jiným řešením téže rovnice je funkce ψ definovaná vztahem

$$\psi(x) = x^2 + \cos(x) + 4807.$$

Všechna řešení uvedené rovnice na $\mathbb{R}$ lze zřejmě zapsat ve tvaru

$$y(x) = x^2 + \cos(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

uvedený vzorec nazýváme obecným řešením diferenciální rovnice (1.2). Naše úloha má nekonečně mnoho řešení. Zkusme navíc přidat k naší rovnici například podmínku $y(0) = 2$, tj. chceme nalézt funkci, která řeší naši rovnici a navíc její funkční hodnota v $x = 0$ je rovna 2. Lze ukázat, že taková úloha má na $\mathbb{R}$ pouze jediné řešení $\bar{y}(x) = x^2 + \cos(x) + 1$. Dále se v textu budeme věnovat některým „praktickým“ úlohám.

Příklad 1.1. V poledne vyjel ze stanoviště vzdáleného po cestě 200 metrů od vrcholu Lysé hory cyklista Mirek. Dochovaly se záznamy tachometru na Mirkově kole, podle kterých Mirkova rychlost v_M v závislosti na čase t v měřeném úseku odpovídala funkci

$$v_M(t) = 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right), \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right].$$

Ve stejnou dobu vyrazil z vrcholu hory Jirka vybavený lepším kolem rychlostí v_J :

$$v_J(t) = \frac{1}{1000}t + 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right), \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right].$$

Dožene Jirka Mirka? Pokud ano, v jakém čase?

Řešení. Mirkova vzdálenost po cestě od vrcholu Lysé hory je dána funkcí s_M . Víme, že $s_M(0) = 200$ a funkce s_M je řešením diferenciální rovnice¹

$$y'(t) = 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right),$$

to znamená, že na uvažovaném intervalu platí:

$$s'_M(t) = 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right).$$

¹Rovnici získáme pokud si uvědomíme, že rychlost v_M je matematicky popsána derivací funkce s_M .

Hledejme funkci s_M :

$$s_M(t) = \int 1 \cdot 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) dt \stackrel{(p)}{=} t \cdot 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) - 10 \cdot \frac{1}{100} \cdot \\ \cdot \int \frac{t}{\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1} dt \stackrel{(s)}{=} 10 \cdot t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) - 500 \cdot \ln\left(\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1\right) + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Při výpočtu byla použita metoda per partes (p) a substituce (s):

$$(p) : \left| \begin{array}{ll} u = 10 \cdot \arctan\left(\frac{t}{100}\right), & v' = 1 \\ u' = 10 \cdot \frac{\frac{1}{100}}{\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1}, & v = t \end{array} \right|, \quad (s) : \left| \begin{array}{l} z = \left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1 \\ dz = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2t dt \end{array} \right|$$

Protože $s_M(0) = 200$, platí

$$200 = 0 - 500 \cdot \ln(1) + C,$$

takže

$$C = 200,$$

a konečně

$$s_M(t) = 10 \cdot t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) - 500 \cdot \ln\left(\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1\right) + 200.$$

Podobné vztahy platí v Jirkově případě: $s_J(0) = 0$,

$$s'_J(t) = \frac{1}{1000}t + 10 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right).$$

Po obdobných výpočtech zjistíme, že

$$s_J(t) = \frac{t^2}{2000} + 10 \cdot t \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{100}\right) - 500 \cdot \ln\left(\left(\frac{t}{100}\right)^2 + 1\right), \quad t > 0.$$

Z toho plyne, že okamžik střetnutí musí splňovat rovnost

$$200 = \frac{t^2}{2000}.$$

To znamená, že Jirka dožene Mirka za přibližně 632.5 s.



Příklad 1.2. V tomto příkladě se pokusíme vytvořit matematický model, který popisuje, jakým způsobem se mění koncentrace léku v krvi v závislosti na čase. Necht' funkce $C(t)$ udává okamžitou koncentraci látky (vhodného léku) v krvi v čase t (v $\left[\frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}\right]$). Lékařskými pokusy bylo zjištěno, že rychlost poklesu koncentrace této látky v krvi je přímo úměrná její samotné koncentraci, tj. platí:

$$C'(t) = -kC(t),$$

kde $k > 0$ je konstanta¹. Tato konstanta popisující úbytek dané látky bývá dobře popsána dvěma farmakokinetickými parametry, kterými jsou *clearance* (míra schopnosti organismu eliminovat látku) a *distribuční objem* (míra kapacity tzv. zdánlivého prostoru, který je v organismu pro tuto látku k dispozici). Clearance budeme dále značit Cl , standardní volba jednotek bývá $\left[\frac{\text{ml}}{\text{min}}\right]$, distribuční objem v litrech označíme v_d . Pokud zvolíme jako jednotku času hodiny, můžeme konstantu k popsat následující závislostí

$$k = \frac{Cl \cdot \frac{60}{1000}}{v_d}.$$

Dále pro jednoduchost předpokládejme, že látka je distribuována do krve intravenózní injekcí a rozšiřuje se do krve okamžitě. Předpokládejme, že tímto způsobem byla v čase $t = 0$ dodána do krve takové množství látky, že její koncentrace v krvi měla hodnotu C_0 . Tím jsme získali jednoduchý model popisující hodnoty koncentrace látky v krvi po její intravenózní aplikaci:

$$\begin{cases} C'(t) = -kC(t), \\ C(0) = C_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

U léčiv je dalším významným farmakokinetickým parametrem *účinná koncentrace*. Ta udává hodnotu koncentrace či interval hodnot koncentrací, při kterých látka působí prospěšně na organismus. Pokud známe hodnotu výše zmíněných farmakokinetických parametrů pro konkrétní léčivo, můžeme využít řešení úlohy (1.3) pro odpověď na otázku, jak často lék obsahující tuto látku pacientovi aplikovat pro zajištění úspěšné léčby. V následujících příkladech předpokládáme, že pacientem je průměrná osoba s tělesnou hmotností 70 kg. Hodnoty farmakokinetických parametrů pro léčiva z těchto příkladů byly převzaty z [6], kde se lze seznámit s oblastí farmakokinetiky mnohem detailněji.

Pro léčbu nemocného s průduškovým astmatem se používá theofylin. Jeho farmakokinetické parametry jsou:

$$Cl = 48 \left[\frac{\text{ml}}{\text{min}}\right], \quad v_d = 35 \text{ [l]}, \quad \text{účinná koncentrace : } 10 - 20 \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{ml}}\right].$$

¹Hodnota k závisí na léku a pacientovi.

Toto léčivo musíme pacientovi podávat v pravidelných časových intervalech tak, aby jeho koncentrace v krvi léčené osoby nepřesáhla horní mez účinné koncentrace a neklesla pod její dolní mez. Na začátku léčby byla aplikována zaváděcí dávka, která způsobila, že v čase $t = 0$ byla koncentrace theofylinu v krvi $C_0 = 20 \left[\frac{\mu\text{g}}{\text{ml}} \right]$. Další dávky chceme aplikovat vzhledem k pohodlí pacienta tak, aby rozmezí podávání léku bylo co největší. Zjistíme po jakém čase (v hodinách) je nutné lék obsahující theofylin znovu podat pacientovi. Připomeňme, že aby byla léčba účinná, je třeba lék pacientovi podat dříve než koncentrace theofylinu klesne pod dolní mez účinné koncentrace.

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme rovnici

$$\begin{cases} C'(t) = -\frac{2,88}{35}C(t), \\ C(0) = 20. \end{cases} \quad (1.4)$$

Derivováním se lze přesvědčit, že řešením úlohy (1.4) je funkce $\bar{C}(t) = 20 \cdot e^{-\frac{2,88}{35}t}$. Z toho ihned plyne rovnice po dobu t do další aplikace:

$$10 = 20 \cdot e^{-\frac{2,88}{35}t}.$$

To znamená, že další dávku theofylinu je nutno podat za přibližně 8,4 hod. ▲

Příklad 1.3. Než se začneme zabývat tvorbou dalšího matematického modelu, vrátíme se v čase do doby krátce po konci druhé světové války. Těsně po válce zjistila nizozemská policie, že během války bylo prodáno několik Vermeerových¹ obrazů německému ministrovi letectví Hermannu Göringovi. Tuto transakci zprostředkoval Han van Meegeren. Na základě těchto zjištěných faktů byl 29.5.1945 van Meegeren zadržen a obviněn z kolaborace s nepřítelem. 12.7.1945 van Meegeren vydal prohlášení, že Göringovi nikdy žádný Vermeerův obraz neprodal. Naopak Göringa napálil, protože obrazy, které mu prodal, jsou podvrhy Vermeerových obrazů a sám je vytvořil.

A aby dokázal své tvrzení, začal jeden z „Vermeerových“ obrazů² napodobovat. Van Meegeren přizvaným znalcům předvedl způsob, jakým vytváří barvy, jak připravuje plátno, či jak zařídí, aby povrch malby vypadal jako u několik set let starého obrazu. Těsně před dokončením podvrhu Vermeerova obrazu se van Meegeren dozvěděl, že obvinění z kolaborace bude nahrazeno obviněním z padělatelství, a tak odmítl tuto kopii dokončit. I tak ale většina přizvaných odborníků uznala, že obrazy prodané Göringovi jsou pravděpodobně falzum a van Meegeren byl 12.10.1947 odsouzen za padělatelství na rok do vězení, ve kterém 30.12.1947 na infarkt zemřel.

I přesto, že komise, která posuzovala pravost „Vermeerových“ obrazů uznala, že to jsou pravděpodobně podvrhy vytvořené van Meegerenem, zůstávali odborníci

¹Jan Vermeer (1632 - 1675) byl nizozemský malíř.

²Šlo o obraz „Ježíš mezi znalci Písma“

u některých obrazů, k jejichž autorství se také van Meegeren přihlásil, na pochybách. Zejména zpochybňování pravosti obrazu Emauzští učedníci, který zakoupilo muzeum v Rotterdamu za 170 000 dolarů, vyvolávalo velké spory. Proto se přistoupilo u tohoto obrazu v roce 1967 k metodě radioaktivního datování, která měla tyto pochyby rozhodnout.

Metoda radioaktivního datování využívá toho, že radioaktivní prvky jsou nestabilní a část jejich atomů se samovolně rozpadá na atomy jiných prvků. Experimenty bylo zjištěno, že rychlost rozpadu atomů radioaktivních prvků je přímo úměrná počtu těchto atomů. Pokud funkci udávající počet atomů radioaktivního prvku v čase t v gramu látky označíme jako $N(t)$, pak výše zmíněnou závislost můžeme popsat diferenciální rovnicí¹

$$N'(t) = -\lambda N(t), \quad (1.5)$$

kde λ je konstanta, která popisuje rychlost rozpadu atomů daného radioaktivního prvku. Tato konstanta je dána pro každý radioaktivní prvek vztahem:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\text{poločas rozpadu prvku v minutách}}.$$

Čas t v našem modelu budeme měřit v minutách a jednotka konstanty λ je v min^{-1} .

Metoda radioaktivního datování je založena na jednoduchém pozorování. Pokud bychom věděli, kolik atomů radioaktivního prvku měla látka v jednom svém gramu při svém vzniku (tzn. známe hodnotu N_0 , pro kterou platí $N(0) = N_0$) a znali bychom také aktuální počet těchto atomů v gramu látky, mohli bychom řešením úlohy

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

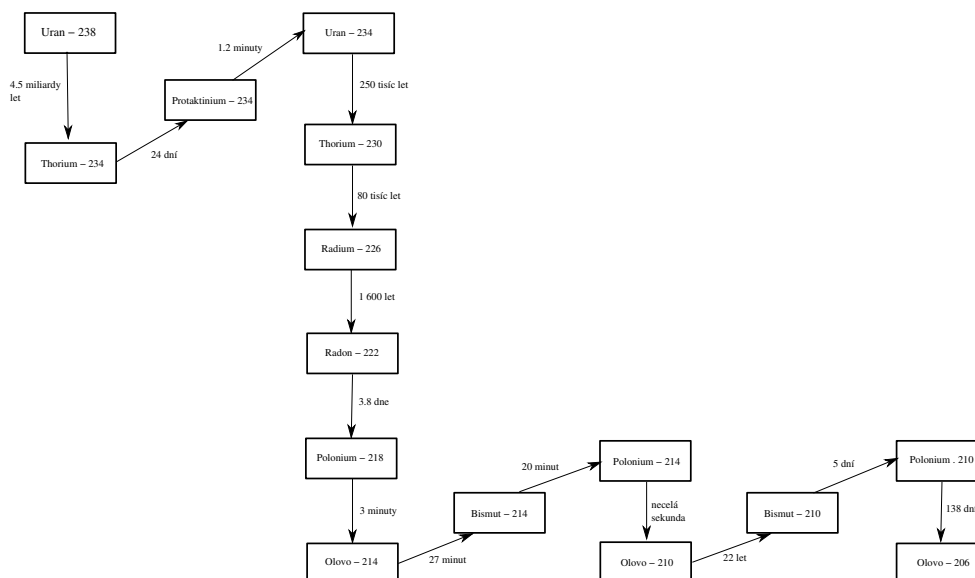
zjistit, jak je tato látka stará.

Než se začneme zabývat datováním „Vermeerových“ obrazů, uvědomme si, že všechny horniny na Zemi obsahují malé množství radioaktivního uranu, který se rozpadá na atomy dalšího prvku. Tyto atomy se opět samovolně mění na další atomy atd. (viz obrázek 1.1).

Dále je známo, že olovnatá běloba používaná na malbách obsahuje oxid olovnatý, který obsahuje malé množství olova-210 a ještě menší množství radia-226. V okamžiku, kdy je barva obsahující oxid olovnatý vyrobena, začnou se atomy olova-210 velmi rychle rozpadat s poločasem rozpadu 22 let a množství olova-210 v této barvě klesá. Na druhé straně vzniká malé množství olova-210 rozpadem radia-226 (a prvků, které následují v rozpadové řadě za ním). Tento proces můžeme popsat následující diferenciální rovnicí

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) + r(t), \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

¹Atomů musí být „dostatečně“ mnoho, abychom mohli jejich množství dobře aproximovat hladkou funkcí.



Obr. 1.1: Uranová rozpadová řada (časy u šipek udávají poločasy rozpadu jednotlivých radioaktivních prvků)

kde $N(t)$ je funkce udávající počet atomů olova-210 v čase t v gramu látky, $r(t)$ je funkce udávající počet atomů olova-210, které vzniknou v čase t v gramu oxidu olovnatého za minutu.

Protože poločas rozpadu radia-226 je 1600 let a metodu radioaktivního datování chceme použít pro rozpoznání stáří obrazů, které měly v roce 1967 přibližně buď 300 let nebo 20 let, můžeme funkci $r(t)$ považovat za konstantní. Pak $r(t) = r = \text{konst.}$ a rovnici (1.7) můžeme nahradit rovnicí

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) + r, \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Mnohem více podrobností o metodě radioaktivního datování může čtenář nalézt v [3].

Také v případě rovnice (1.8) jsme schopni, pokud známe počet atomů olova-210 v gramu oxidu olovnatého v době výroby olovnaté běloby určit stáří obrazu, na kterém je tato barva použita. V naší úloze počet atomů olova-210 v gramu oxidu olovnatého v době výroby barvy bohužel neznáme. I přesto jsme schopni rozlišit obraz jehož stáří je 300 let od obrazu, který má 20 let. Je totiž známo, jaké bývají koncentrace radioaktivního olova-210 v rudách, ze kterých se vyrábí oxid olovnatý. Je naprosto nemožné, aby počet atomů olova-210 v gramu rudy, ze které se oxid

olovnatý vyrobil přesáhl počet $5 \cdot 10^{11}$. Proto můžeme zjistit, pokud známe potřebné parametry, zda je možné, aby bylo stáří obrazu 300 let. V následujícím příkladu použijeme: 1 rok = 525 600 minut.

Určeme, zda je možné, aby byl obraz Emauzští učedníci opravdu starý 300 let a byl tedy pravý, pokud bylo měřením zjištěno, že v čase T platí

$$N(T) = 1,42 \cdot 10^8, \quad r = 0,8.$$



Obr. 1.2: Emauzští učedníci

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot a využitím faktu, že poločas rozpadu olova-210 je 22 let, dostaneme rovnici

$$\begin{cases} N'(t) = -5,99 \cdot 10^{-8} N(t) + 0,8, \\ N(T) = 1,42 \cdot 10^8. \end{cases} \quad (1.9)$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.9) je funkce $\bar{N}(t) = -\frac{\frac{0,8}{5,99 \cdot 10^{-8}} - 1,42 \cdot 10^8}{e^{-5,99 \cdot 10^{-8} \cdot T}} \cdot e^{-5,99 \cdot 10^{-8} t} + \frac{0,8}{5,99 \cdot 10^{-8}}$. Zkusme s využitím řešení rovnice (1.9) určit, zda je možné, aby byl obraz pravý. Pokud je $T = 300 \cdot 525600$ minut, pak $\bar{N}(0) \doteq 1,63 \cdot 10^{12}$. Z toho je zřejmé, že obraz je podvrh. ▲

Příklad 1.4. Nyní nastal čas na šálek kávy. Hrnek s čerstvě uvařenou kávou má teplotu T_h a je ochlazován vzduchem v místnosti o konstantní teplotě T_v . Je možné modelovat teplotu hrnku jako funkci $T_h(t)$, která se mění rychlostí¹ přímo úměrnou rozdílu teploty vzduchu a hrnku² s koeficientem k , který závisí na materiálových

¹Tuto rychlost matematicky popisuje derivace funkce $T_h(t)$.

²Popsané zákonitosti se říká Newtonův zákon ochlazování.



Obr. 1.3: Hrneček s chladnoucí kávou

vlastnostech a tvaru. Necht teplota hrnku v čase t_0 je dána hodnotou T_{h0} . Dostáváme tedy následující model:

$$\begin{cases} T'_h(t) = k(T_v - T_h(t)), \\ T_h(t_0) = T_{h0}. \end{cases} \quad (1.10)$$

Řešení úlohy (1.10) použijeme k modelování ochlazování hrnku s kávou, která měla v čase $t_0 = 0$ teplotu 100°C . Teplota vzduchu má hodnotu $T_v = 20^\circ \text{C}$ a experimentálně¹ byla zjištěna hodnota konstanty $k = 0,04$. Čas t je v minutách. Za jak dlouho se hrnek ochladí alespoň na 50°C ?

Řešení. Po dosazení uvedených hodnot dostaneme diferenciální rovnici

$$\begin{cases} T'_h(t) = 0,04(20 - T_h(t)), \\ T_h(0) = 100. \end{cases} \quad (1.11)$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.11) je funkce $\bar{T}_h(t) = 80 \cdot e^{-0,04t} + 20$. Z toho plyne

$$50 = 80 \cdot e^{-0,04t} + 20.$$

To znamená, že hrnek s kávou se ochladí na 50°C za přibližně 24,5 [min]. ▲

Příklad 1.5. V této úloze se pokusíme odhadovat vývoj velikosti dané populace. Necht $y(t)$ označuje velikost populace v čase t a y_0 popisuje velikost populace v čase t_0 . Necht a je konstanta, která udává přírůstek populace za časovou jednotku. Zjednodušený model vývoje populace² lze popsat rovnicí a počáteční podmínkou ve tvaru:

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.12)$$

¹Třeba opakovaným měřením.

²Vycházíme z představy, že rychlost s jakou roste počet členů populace je přímo úměrná počtu členů populace, kteří se rozmnožují.

Rovnice (1.12) poměrně dobře aproximuje vývoj početné populace, která má dostatečně velké zásoby potravy, dalších zdrojů a může neomezeně růst. Lepší model dává následující populační rovnice s počáteční podmínkou, ve které se navíc objevuje člen $b(y(t))^2$ (b je konstanta)

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) - b(y(t))^2, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Rovnice (1.13) dobře aproximuje vývoj populace, která už je dostatečně velká, má omezené zásoby potravy i dalších zdrojů a mezi členy populace dochází k soupeření o tyto zdroje (to popisuje konstanta b).

Populační rovnici s počáteční podmínkou (1.13) použijeme k modelování vývoje počtu obyvatel USA v letech 1790 - 1950. Konstanty a , b byly odhadnuty takto: $a = 0,03134$, $b = 1,5887 \cdot 10^{-10}$. Čas t je v rocích. Navíc víme, že počet obyvatel v USA v roce 1790 byl 3 929 000. Odhadněme velikost populace Spojených států amerických v letech 1800, 1850, 1900 a 1950. Spočítané hodnoty můžeme porovnat se skutečnými hodnotami v následující tabulce.

Rok	Počet obyvatel
1790	3 929 000
1800	5 308 000
1850	23 192 000
1900	75 995 000
1950	150 697 000

Tab. 1.1: Populace USA v letech 1790 - 1950

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme rovnici

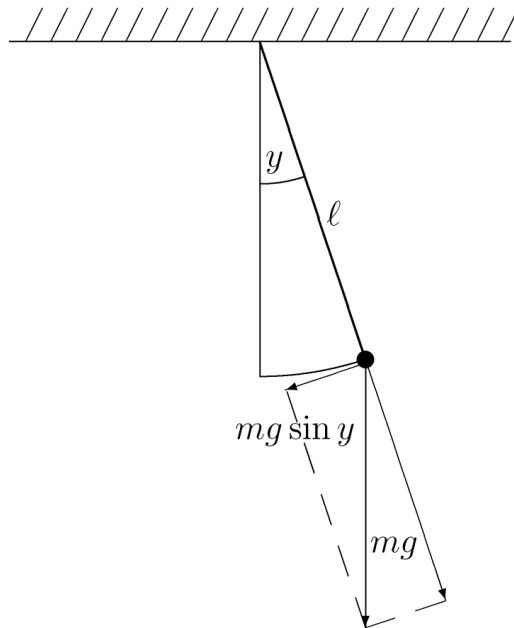
$$\begin{cases} y'(t) = 0,03134y(t) - 1,5887 \cdot 10^{-10}(y(t))^2, \\ y(1790) = 3929000. \end{cases} \quad (1.14)$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.14) je funkce

$$\bar{y}(t) = -123134,86 \cdot \frac{e^{-56,0986}}{-6,2420023 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-56,0986} - 0,03071579977 \cdot e^{-0,03134 \cdot t}}.$$

Po dosazení dostaneme $\bar{y}(1800) \doteq 5\,336\,024$, $\bar{y}(1850) \doteq 23\,192\,502$, $\bar{y}(1900) \doteq 76\,871\,300$ a $\bar{y}(1950) \doteq 148\,677\,189$, což jsou velmi dobré odhady skutečných hodnot. ▲

Příklad 1.6. Nyní využijme obyčejnou diferenciální rovnici pro popis matematického kyvadla. Zabývejme se zkoumáním chování hmotného bodu zavěšeného na tenkém vlákně zanedbatelné hmotnosti, zanedbává se odpor vzduchu při pohybu kyvadla i tření v závěsu a gravitační pole se považuje za homogenní. Délka vlákna je ℓ , hmotný bod zavěšený na vlákně má hmotnost m . Náčrtek kyvadla je na obrázku 1.4. Vytvořme matematický model kyvadla popisující jeho výchylku y od rovnovážné



Obr. 1.4: Matematické kyvadlo

polohy v závislosti na čase t . Výchylku y budeme měřit v radiánech. S využitím Newtonova zákona¹ a známého pravidla, že síly působící na závaží jsou v rovnováze dostaneme vztah

$$F = ma(t) = m \frac{dv}{dt} = -mg \sin y(t). \quad (1.15)$$

Pokud upravíme (1.15), získáme rovnici

$$\frac{dv}{dt} + g \sin y(t) = 0. \quad (1.16)$$

Délka oblouku, po kterém projde hmotný bod od rovnovážné polohy, pokud je vychýlen o $y(t)$ radiánů je

$$s = \ell y \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \ell \frac{dy}{dt}. \quad (1.17)$$

Protože platí $v = \frac{ds}{dt}$, plyne z druhé rovnice v (1.17) tvrzení

$$v = \ell \frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \ell \frac{d^2y}{dt^2}. \quad (1.18)$$

¹Přesněji druhého Newtonova pohybového zákona, který je matematicky vyjádřen $F = m \cdot a$.

Dosadíme druhou rovnici z (1.18) do (1.16) a dostaneme rovnici popisující výchylku

$$\ell \frac{d^2 y}{dt^2} + g \sin y(t) = 0. \quad (1.19)$$

Abychom tento model zjednodušili, použijeme Taylorův polynom funkce $\sin$ se středem v 0

$$\sin y(t) = y(t) - \frac{y(t)^3}{3!} + \frac{y(t)^5}{5!} - \dots \quad (1.20)$$

Nahradíme v rovnici (1.19) funkci $\sin$ jejím rozvojem (1.20)

$$\ell \frac{d^2 y}{dt^2} + g y(t) - g \frac{y(t)^3}{3!} + g \frac{y(t)^5}{5!} - \dots = 0. \quad (1.21)$$

Předpokládejme, že chceme vytvořit model pouze pro popis kyvadla, které bude mít pouze „malé“ výchylky (tj. y je „malé“). V tom případě platí $\sin y(t) = y(t) - \frac{y(t)^3}{3!} + \frac{y(t)^5}{5!} - \dots \approx y$ a dostaneme

$$\ell \frac{d^2 y}{dt^2} + g y(t) = 0. \quad (1.22)$$

Pokud k (1.22) přidáme počáteční podmínky popisující stav kyvadla v čase t_0 a vhodně ji upravíme získáme následující Cauchyovou úlohou

$$\left. \begin{aligned} y''(t) + (g/\ell) y(t) &= 0, \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) &= dy_0, \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

kde y_0 označuje počáteční výchylku závaží (v radiánech) a dy_0 značí počáteční (úhlovou) rychlost závaží.

Pomocí úlohy (1.23) popíšeme kyvadlo jehož délka je $\ell := 1$ [m] a tíhové zrychlení g považujeme rovné 10 m/s^{-2} . Výchylka kyvadla je na počátku rovna $0,1$ (tj. $y(0) = 0,1$ [rad]) a počáteční úhlová rychlost kyvadla je nulová (tj. $y'(0) = 0$ [rad/s]).

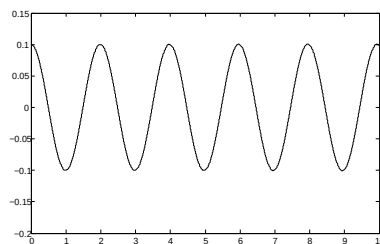
Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme rovnici

$$\left\{ \begin{aligned} y''(t) + 10y(t) &= 0, \\ y(0) = -0,1, y'(0) &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

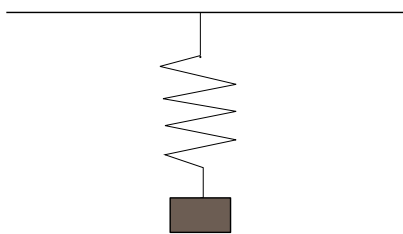
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.24) je funkce

$$\bar{y}(t) = 0,1 \cdot \cos(\sqrt{10} \cdot t).$$

Tato funkce popisující výchylku daného kyvadla je zobrazena na obrázku (1.5) pro časy z rozmezí $\langle 0, 10 \rangle$ [s]. ▲



Obr. 1.5: Výchyly závaží (v radiánech)



Obr. 1.6: Závaží na pružině

Příklad 1.7. Nyní uvedeme matematický popis polohy $y(t)$ závaží, které je zavěšeno na pružině, v závislosti na čase t . Předpokládejme, že hmotnost závaží je m , proti pohybu závaží působí odpor prostředí popsáný konstantou r a tuhost pružiny je k . Navíc na závaží působí síla, která je závislá na čase a je popsána funkcí $F(t)$. Matematicky lze takovýto systém popsat¹ následující diferenciální rovnicí s počátečními podmínkami:

$$\begin{cases} my''(t) + ry'(t) + ky(t) = F(t), \\ y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = v_0, \end{cases} \quad (1.25)$$

kde y_0, v_0 jsou konstanty charakterizující polohu a rychlost závaží v čase t_0 .

Pomocí rovnice s počátečními podmínkami (1.25) popíšeme pohyb závaží o hmotnosti $m = 1$ [kg] kmitající na pružině tuhosti $k = 50$ [kg · s⁻²], odpor prostředí je dán $r = 2$ [kg · s⁻¹] a na závaží působí tíha $F(t) = -10$ [kg · m · s⁻²]. Závaží je na počátku vychýleno z rovnovážné polohy do bodu $-0,1$ [m], rychlost závaží je na počátku nulová.

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme rovnici

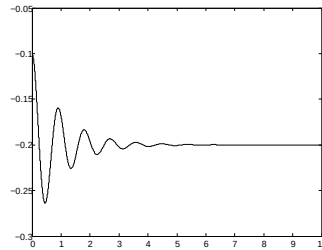
$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 50y(t) = -10, \\ y(0) = -0,1, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

¹Přenechejme čtenáři k promyšlení, že zjednodušená rovnice $my''(t) = F(t)$ je vlastně pouze zápisem Newtonova zákona síly.

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.26) je funkce

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{70} \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t) + 0,1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(7 \cdot t) - 0,2.$$

Tato funkce popisující výchylku daného závaží je zobrazena na obrázku (1.7) pro

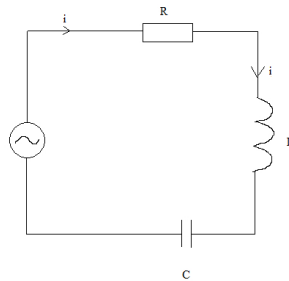


Obr. 1.7: Pohyb závaží na pružině

časy z rozmezí $\langle 0, 10 \rangle$ [s].

▲

Příklad 1.8. Uvažujme jednoduchý elektrický obvod, ve kterém je sériově zapojena cívka, rezistor a kondenzátor. V obvodu je také v sérii zapojen elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí. Schéma obvodu je na obrázku (1.8). Nyní



Obr. 1.8: Schéma elektrického obvodu

uvedme model, který popíše hodnotu elektrického náboje q v obvodu v závislosti na čase t . Necht indukčnost cívky je určena parametrem L , odpor rezistoru označíme R a kapacitu kondenzátoru popíšeme parametrem C . Elektrický zdroj dodává do obvodu elektromotorické napětí $E(t)$ (často $E(t) = A \sin(\omega t)$, $A \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$). Matematicky lze takovýto systém popsat následující diferenciální rovnicí s počátečními podmínkami¹

$$\begin{cases} Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t), \\ q(t_0) = q_0, \quad q'(t_0) = i_0. \end{cases} \quad (1.27)$$

¹Pozorný čtenář si jistě všimne formální podobnosti rovnic v (1.25) a (1.27). Z této „podobnosti“ mimo jiné plyne analogické chování závaží kmitajícího na pružině a elektrického RLC obvodu při vhodné volbě parametrů mechanického a elektrického systému.

Protože elektrický proud $i(t)$ v čase t je definován jako „okamžitá změna“ náboje q a tento vztah můžeme matematicky zapsat jako $i(t) = q'(t)$, můžeme předcházející diferenciální rovnici s počátečními podmínkami (1.27) upravit takto

$$\begin{cases} Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t), \\ q(t_0) = q_0, \quad i(t_0) = i_0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Derivováním rovnice v (1.28) snadno získáme rovnici pro hodnotu elektrického proudu i procházejícího obvodem v závislosti na čase t ($i(t) = q'(t)$)

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = E'(t). \quad (1.29)$$

Pomocí rovnice s počátečními podmínkami (1.28) popíšeme náboj v elektrickém obvodu, ve kterém je sériově zapojena cívka s indukčností $L = 1$ [Henry], rezistor s odporem $R = 2$ [Ohm], kondenzátor s kapacitou $C = 1$ [Farad] a elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí $E(t) = 10$ [Volt]. Hodnota elektrického náboje i proudu v daném obvodu nechť je na počátku nulová, tj. $q(0) = 0$ [Coulomb] a $i(0) = 0$ [Amper]. Dále najdeme náboj v obvodu se sériově zapojenou cívku, rezistorem a kondenzátorem (se stejnými parametry jako v předchozím případě). Tentokrát ovšem předpokládejme, že v obvodu není zapojen elektrický zdroj. Hodnota proudu v obvodu budiž na počátku nulová a kondenzátor nechť je na počátku nabit nábojem o hodnotě 10 [Coulomb], tj. $q(0) = 10$ [Coulomb] a $i(0) = 0$ [Amper].

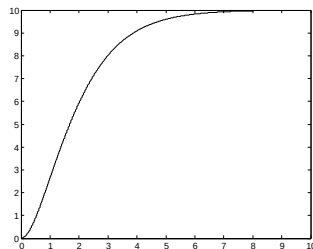
Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme pro první obvod vztahy

$$\begin{cases} q''(t) + 2q'(t) + q(t) = 10, \\ q(0) = 0, \quad i(0) = 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.30) je funkce

$$\bar{q}(t) = -10 \cdot e^{-t} - 10 \cdot t \cdot e^{-t} + 10.$$

Tato funkce popisující průběh elektrického náboje v obvodu je zobrazena na obrázku



Obr. 1.9: Hodnota elektrického náboje v obvodu

(1.9) pro čas $t \in \langle 0, 10 \rangle$ [s].

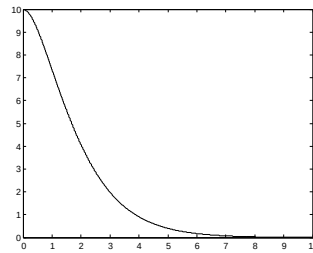
Pro druhý obvod dostaneme rovnici

$$\begin{cases} q''(t) + 2q'(t) + q(t) = 0, \\ q(0) = 10, \quad i(0) = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.31) je funkce

$$\bar{q}(t) = 10 \cdot e^{-t} + 10 \cdot t \cdot e^{-t}.$$

Tato funkce popisující průběh elektrického náboje v obvodu je zobrazena na obrázku

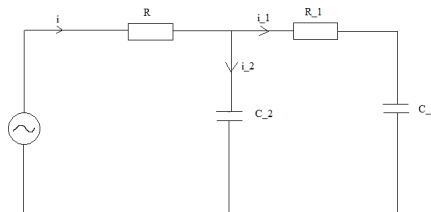


Obr. 1.10: Hodnota elektrického náboje v obvodu

(1.10) pro čas $t \in \langle 0, 10 \rangle$ [s].

▲

Příklad 1.9. Nyní se budeme zabývat složitějším obvodem než v předchozím příkladě. V tomto obvodu budou zapojeny dva rezistory, dva kondenzátory a také je do obvodu zapojen elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí. Schéma obvodu je na obrázku (1.11). Matematicky lze takové systémy popsat ná-



Obr. 1.11: Schéma komplikovanějšího elektrického obvodu

sledující soustavou diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} R(q_1'(t) + q_2'(t)) + \frac{1}{C_2}q_2(t) &= E(t), \\ -R_1q_1'(t) - \frac{1}{C_1}q_1(t) + \frac{1}{C_2}q_2(t) &= 0, \\ q_1(t_0) &= q_{10}, \quad q_2(t_0) = q_{20}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Pomocí soustavy rovnic s počátečními podmínkami (1.32) popíšeme konkrétní náboje v jednotlivých větvích elektrického obvodu, ve kterém jsou zapojeny rezistory s odpory $R = 1$ a $R_1 = 2$ [Ohm], kondenzátory s kapacitami $C_1 = 1$ a $C_1 = 5$ [Farad] a elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí $E(t) = 10$ [Volt]. Hodnota elektrického náboje v daném obvodu budiž na počátku ve všech větvích obvodu nulová, tj. $q_1(0) = 0$ a $q_2(0) = 0$ [Coulomb]. Dále najdeme náboje v obvodu, ve kterém jsou zapojeny dva rezistory a dva kondenzátory (se stejnými parametry jako v předchozím případě). V tomto obvodu ale není zapojen elektrický zdroj. Kondenzátor C_2 je na počátku nabit nábojem o hodnotě 10 [Coulomb], tj. $q_2(0) = 10$ [Coulomb] a $q_1(0) = 0$ [Coulomb].

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme pro první obvod soustavu rovnic

$$\begin{cases} q_1'(t) + q_2'(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 10, \\ -2q_1'(t) - q_1(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0. \end{cases} \quad (1.33)$$

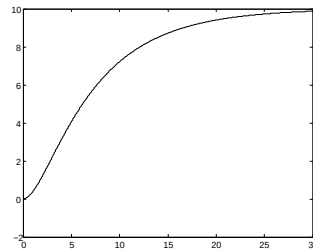
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.33) jsou funkce

$$\bar{q}_1(t) = \left(-5 - \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{3}\right) \cdot e^{\frac{(-4+\sqrt{6}) \cdot t}{10}} + \left(-5 + \frac{10 \cdot \sqrt{6}}{3}\right) \cdot e^{\frac{(-4-\sqrt{6}) \cdot t}{10}} + 10$$

a

$$\bar{q}_2(t) = \left(-25 - \frac{25 \cdot \sqrt{24}}{6}\right) \cdot e^{\frac{(-8+\sqrt{24}) \cdot t}{20}} + \left(-25 + \frac{25 \cdot \sqrt{24}}{6}\right) \cdot e^{\frac{(-8-\sqrt{24}) \cdot t}{20}} + 50.$$

Funkce popisující průběhy elektrického náboje v jednotlivých větvích obvodu jsou

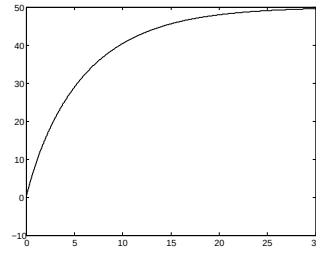
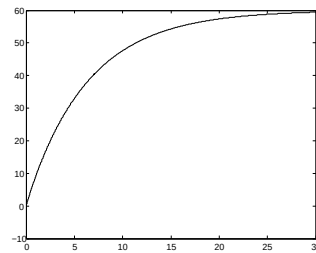


Obr. 1.12: Hodnota elektrického náboje q_1 v obvodu

zobrazeny na obrázcích (1.12), (1.13) a (1.14) pro čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ [s].

Pro druhý obvod dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{cases} q_1'(t) + q_2'(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ -2q_1'(t) - q_1(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 10. \end{cases} \quad (1.34)$$

Obr. 1.13: Hodnota elektrického náboje q_2 v obvoduObr. 1.14: Hodnota elektrického náboje q v obvodu

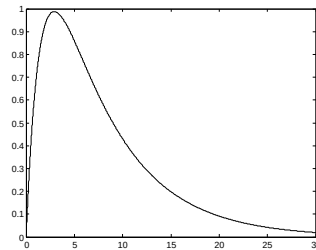
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.34) jsou funkce

$$\bar{q}_1(t) = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6} \cdot e^{\frac{(-4+\sqrt{6}) \cdot t}{10}} - e^{\frac{(-4-\sqrt{6}) \cdot t}{10}}$$

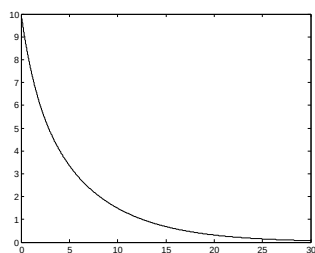
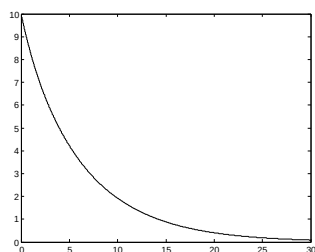
a

$$\bar{q}_2(t) = \left(5 + \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6}\right) \cdot e^{\frac{(-4+\sqrt{6}) \cdot t}{10}} + \left(5 - \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{6}\right) \cdot e^{\frac{(-4-\sqrt{6}) \cdot t}{10}}.$$

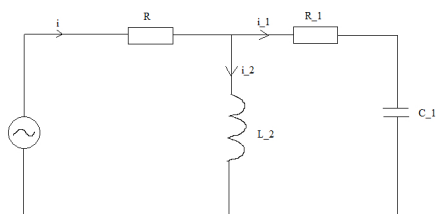
Funkce popisující průběhy elektrického náboje v jednotlivých větvích obvodu jsou

Obr. 1.15: Hodnota elektrického náboje q_1 v obvodu

zobrazeny na obrázcích (1.15), (1.16) a (1.17) pro čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ [s].

Obr. 1.16: Hodnota elektrického náboje q_2 v obvoduObr. 1.17: Hodnota elektrického náboje q v obvodu

Příklad 1.10. Na závěr ještě prozkoumejme obvod trochu jiného typu. V tomto obvodu jsou zapojeny dva rezistory, kondenzátor, cívka a také je do obvodu zapojen elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí. Schéma obvodu je na obrázku (1.18). Matematicky lze takovýto systém popsat následující soustavou



Obr. 1.18: Schéma ještě komplikovanějšího elektrického obvodu

diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami¹:

$$\begin{aligned} L_2 q_2''(t) + R(q_1'(t) + q_2'(t)) &= E(t), \\ L_2 q_2''(t) - R_1 q_1'(t) - \frac{1}{C_1} q_1(t) &= 0, \\ q_1(t_0) = q_{10}, \quad q_2(t_0) = q_{20}, \quad i_2(t_0) = q_2'(t_0) &= i_{20}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pomocí vztahů (1.35) popíšeme náboje v jednotlivých větvích konkrétního elektrického obvodu, ve kterém jsou zapojeny rezistory s odpory $R = 1$ a $R_1 = 2$ [Ohm], kondenzátor s kapacitou $C_1 = 1$ [Farad], cívka s indukčností $L_2 = 10$ [Henry] a elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí $E(t) = 10$ [Volt]. Hodnota elektrického náboje i proudu nechť je v daném obvodu na počátku ve všech větvích obvodu nulová, tj. $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 0$ [Coulomb] a $i_2(0) = q_2'(0) = 0$ [Amper]. Dále najdeme náboje v obvodu bez zdroje elektromotorického napětí, ve kterém jsou zapojeny dva rezistory, kondenzátor a cívka (se stejnými parametry jako v předchozím případě). Přitom předpokládejme, že kondenzátor C_1 je na počátku nabit nábojem o hodnotě 10 [Coulomb], tj. $q_1(0) = 10$ [Coulomb], $q_2(0) = 0$ [Coulomb] a $i_2(0) = q_2'(0) = 0$ [Amper].

Řešení. Po dosazení zadaných hodnot dostaneme pro první obvod soustavu rovnic

$$\begin{cases} 10q_2''(t) + q_1'(t) + q_2'(t) &= 10, \\ 10q_2''(t) - 2q_1'(t) - q_1(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0, \quad i_2(0) = q_2'(0) &= 0. \end{cases} \quad (1.36)$$

Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.36) jsou funkce

$$\bar{q}_1(t) = \left(\frac{35}{2} - \frac{35 \cdot \sqrt{24}}{6} \right) \cdot e^{\frac{(-12+\sqrt{24}) \cdot t}{60}} + \left(\frac{45}{2} - \frac{45 \cdot \sqrt{24}}{6} \right) \cdot e^{\frac{(-12-\sqrt{24}) \cdot t}{60}}$$

a

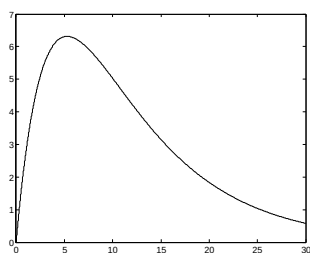
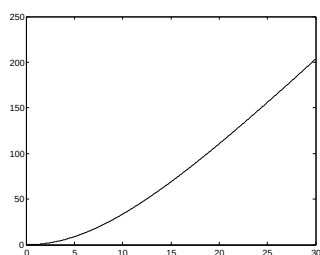
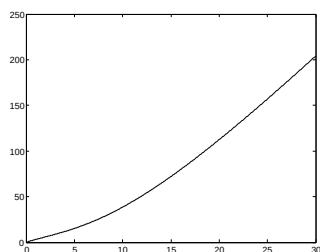
$$\bar{q}_2(t) = \frac{(300 + 100 \cdot \sqrt{24})}{12 - \sqrt{24}} \cdot e^{\frac{(-12+\sqrt{24}) \cdot t}{60}} + \frac{(300 - 100 \cdot \sqrt{24})}{12 + \sqrt{24}} \cdot e^{\frac{(-12-\sqrt{24}) \cdot t}{60}} + 10 \cdot t - 100.$$

Funkce popisující průběhy elektrického náboje v jednotlivých větvích obvodu je zobrazena na obrázcích (1.19), (1.20) a (1.21) pro čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ [s].

Pro druhý obvod dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{cases} 10q_2''(t) + q_1'(t) + q_2'(t) &= 0, \\ 10q_2''(t) - 2q_1'(t) - q_1(t) &= 0, \\ q_1(0) = 10, \quad q_2(0) = 0, \quad i_2(0) = q_2'(0) &= 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

¹Pro řešení obecné soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu je třeba mezi počáteční podmínky zařadit i podmínku pro $i_1(t_0) = q_1'(t_0)$. V této soustavě se nevyskytuje $q_1''(t)$, a proto podmínka pro $i_1(t_0) = q_1'(t_0)$ není nutná.

Obr. 1.19: Hodnota elektrického náboje q_1 v obvoduObr. 1.20: Hodnota elektrického náboje q_2 v obvoduObr. 1.21: Hodnota elektrického náboje q v obvodu

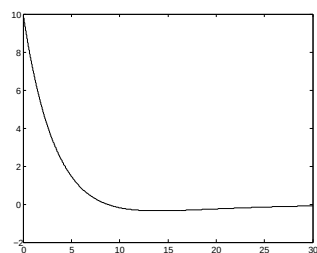
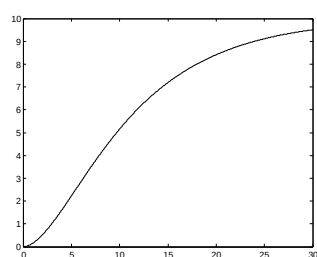
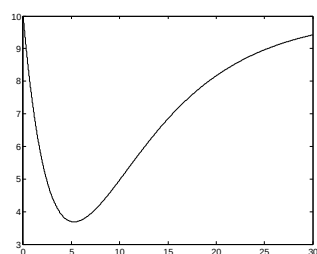
Dá se ukázat, že řešením rovnice (1.37) jsou funkce

$$\bar{q}_1(t) = \left(5 - \frac{5 \cdot \sqrt{24}}{3}\right) \cdot e^{\frac{(-12+\sqrt{24}) \cdot t}{60}} + \left(5 + \frac{5 \cdot \sqrt{24}}{3}\right) \cdot e^{\frac{(-12-\sqrt{24}) \cdot t}{60}}$$

a

$$\bar{q}_2(t) = -\frac{25 \cdot \sqrt{24}}{12 - \sqrt{24}} \cdot e^{\frac{(-12+\sqrt{24}) \cdot t}{60}} + \frac{25 \cdot \sqrt{24}}{12 + \sqrt{24}} \cdot e^{\frac{(-12-\sqrt{24}) \cdot t}{60}} + 10.$$

Funkce popisující průběhy elektrického náboje v jednotlivých větvích obvodu je zobrazena na obrázcích (1.22), (1.23) a (1.24) pro čas $t \in \langle 0, 30 \rangle$ [s].

Obr. 1.22: Hodnota elektrického náboje q_1 v obvoduObr. 1.23: Hodnota elektrického náboje q_2 v obvoduObr. 1.24: Hodnota elektrického náboje q v obvodu

Mnoho dalších aplikací obyčejných diferenciálních rovnic lze nalézt v [\[9\]](#).

Kapitola 2

Pojem řešení ODR a další základní pojmy

Jak jste si mohli všimnout v úvodní části, obyčejnými diferenciálními rovnicemi (stručněji ODR) budeme nazývat rovnice, ve kterých se vyskytují¹ derivace neznámé funkce jedné reálné proměnné. Řekneme, že ODR je rovnicí prvního řádu, jestliže tato rovnice efektivně obsahuje pouze první derivaci neznámé funkce. Upřesněme tedy, že obecně lze ODR prvního řádu zapsat v tzv. implicitním tvaru

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \quad (2.1)$$

kde $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ je zadaná funkce. Někdy lze ODR zapsat ve tvaru explicitním:

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad (2.2)$$

pro pevně danou funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

V zadání ODR nezávisle proměnnou u neznámé funkce a jejich derivací většinou nevypisujeme, takže píšeme pouze

$$F(t, y, y') = 0, \text{ respektive}$$

$$y' = f(t, y).$$

Nechť pro diferencovatelnou funkci $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ platí:

$$\forall t \in J : F(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0.$$

Pak řekneme, že φ je řešením rovnice (2.1) (na intervalu J).

Podobně řekneme, že funkce φ je řešením (2.2) na J , platí-li na J :

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)).$$

¹Například rovnici $0 \cdot y'(t) + 2y^2(t) - \sin(y(t)) = 0$ nebudeme považovat za diferenciální rovnici.

Říkáme, že dvě ODR jsou ekvivalentní, mají-li stejnou množinu všech řešení. Všimněme si, že rovnici (2.2) můžeme vždy ekvivalentně zapsat v implicitním tvaru. Stačí volit

$$F(a, b, c) = c - f(a, b).$$

Obecně však nelze ekvivalentně přepsat rovnici v implicitním tvaru do explicitní formy (2.2).

Příklad 2.1. Jedním z řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = y \cdot \cos t,$$

na otevřeném intervalu $J = \mathbb{R}$, je funkce φ definovaná předpisem $\varphi(t) = e^{\sin t}$. Skutečně, podle pravidla o derivování složené funkce zjišťujeme, že platí:

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi'(t) = (e^{\sin t})' = e^{\sin t} \cdot \cos t = \varphi(t) \cdot \cos t.$$

Snadno lze ukázat, že pro každé pevně zvolené číslo $C \in \mathbb{R}$ je funkce daná předpisem

$$C \cdot e^{\sin t}$$

řešením zadané rovnice:

$$\forall t \in \mathbb{R} : (C \cdot e^{\sin t})' = (C \cdot e^{\sin t}) \cdot \cos t.$$

Poznamejme ještě, že uvedená rovnice může být ekvivalentně zapsána v implicitním tvaru

$$y' - y \cdot \cos t = 0.$$

▲

Nechť jsou dána čísla $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}$. K ODR (2.1) připojme požadavek, aby hledaná funkce v bodě t_0 nabývala hodnoty y_0 , tzn.

$$y(t_0) = y_0. \quad (2.3)$$

Požadavku (2.3) se říká počáteční podmínka. Úlohu (2.1), (2.3) nazýváme Cauchyovou úlohou.

Řekneme, že funkce φ je řešením Cauchyovy úlohy (2.1), (2.3) (na otevřeném intervalu J), jestliže φ je řešením (2.1) (na J) a navíc platí $\varphi(t_0) = y_0$.

Příklad 2.2. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y' = y \cdot \cos t, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

V předchozím příkladě jsme ukázali, že funkce φ daná předpisem $\varphi(t) = e^{\sin t}$ je řešením zadané rovnice na $\mathbb{R}$. Protože φ navíc splňuje příslušnou počáteční podmínku:

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sin \frac{\pi}{2}} = e^1 = e,$$

můžeme konstatovat, že φ je na $\mathbb{R}$ řešením zadané Cauchyovy úlohy.

▲

Příklad 2.3. Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = y \cdot \cos t, \quad y(0) = 1.$$

Výše jsme ukázali, že funkce tvaru

$$C \cdot e^{\sin t}, \quad C \in \mathbb{R}$$

reprezentují řešení zadané rovnice. Aplikací počáteční podmínky $y(0) = 1$ získáváme rovnici pro konstantu C :

$$1 = C \cdot e^{\sin 0}.$$

Odtud $C = 1$, takže funkce φ daná předpisem $\varphi(t) = e^{\sin t}$ je řešením Cauchyovy úlohy $y' = y \cdot \cos t$, $y(0) = 1$. ▲

Příklad 2.4. Všimněme si, že ODR nemusí mít řešení. Rovnice tvaru

$$(y')^2 + 1 = 0$$

nemá řešení. Neexistuje totiž reálná funkce φ taková, že by pro nějaké $t \in \mathbb{R}$ platilo

$$(\varphi'(t))^2 = -1.$$

▲

Uvažujme řešení φ_1 rovnice (2.1) na otevřeném intervalu J_1 a řešení φ téže rovnice na otevřeném intervalu J . Nechť

$$J_1 \subset J, \quad J_1 \neq J$$

a obě funkce nabývají na J_1 stejných hodnot:

$$\forall t \in J_1 : \quad \varphi_1(t) = \varphi(t).$$

Pak řekneme, že řešení φ je prodloužením řešení φ_1 na interval J . Maximálními řešeními zadané obyčejné diferenciální rovnice, popřípadě zadané Cauchyovy úlohy, budeme nazývat taková řešení, která dále nelze prodloužit. Přesněji, řekneme, že řešení φ rovnice (2.1) na otevřeném intervalu J je maximální, jestliže pro každé další řešení ψ této rovnice na otevřeném intervalu K platí implikace:

$$[J \subset K \wedge (\forall t \in J : \varphi(t) = \psi(t))] \implies J = K.$$

Domluvme se, že grafům maximálních řešení zadané diferenciální rovnice budeme říkat integrální křivky této rovnice. Tedy, je-li φ maximálním řešením rovnice (2.1) na J , pak integrální křivkou rovnice (2.1) je množina

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in J \wedge y = \varphi(t)\}.$$

Příklad 2.5. Snadno se lze přesvědčit, že funkce φ_1, φ_2 definované předpisy

$$\varphi_1(t) = 0, \quad D_{\varphi_1} = (-\infty, 0), \quad \varphi_2(t) = t^3, \quad D_{\varphi_2} = (0, \infty)$$

jsou na svých definičních oborech řešenými ODR tvaru

$$y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}.$$

Skutečně,

$$\forall t \in (-\infty, 0) : \varphi_1'(t) = 0' = 3 \cdot \sqrt[3]{0^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\varphi_1^2(t)},$$

$$\forall t \in (0, \infty) : \varphi_2'(t) = 3t^2 = 3 \cdot \sqrt[3]{(t^3)^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\varphi_2^2(t)}.$$

Protože

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \varphi_1(t) = 0 = \lim_{t \rightarrow 0-} \varphi_2(t),$$

můžeme se pokusit obě řešení „slepit v čase 0“. Definujme proto na $\mathbb{R}$ funkci φ předpisem

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t^3, & t > 0. \end{cases}$$

Funkce φ je zřejmě spojitá na $\mathbb{R}$. Nyní můžeme vypočítat hodnoty jednostranných derivací funkce φ v bodě 0. Zleva je to snadné:

$$\varphi'_-(0) = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{0}{t} = 0.$$

Zprava postupujeme podobně:

$$\varphi'_+(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi_2(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^3}{t} = 0.$$

Ukázali jsme, že platí $\varphi'_-(0) = \varphi'_+(0) = 0$, tedy $\varphi'(0) = 0$. Zároveň

$$\varphi'(0) = 0 = 3 \cdot \sqrt[3]{(0^3)^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{\varphi^2(0)}.$$

Z výše provedených výpočtů plyne, že rovnost

$$\varphi'(t) = 3 \cdot \sqrt[3]{\varphi^2(t)}$$

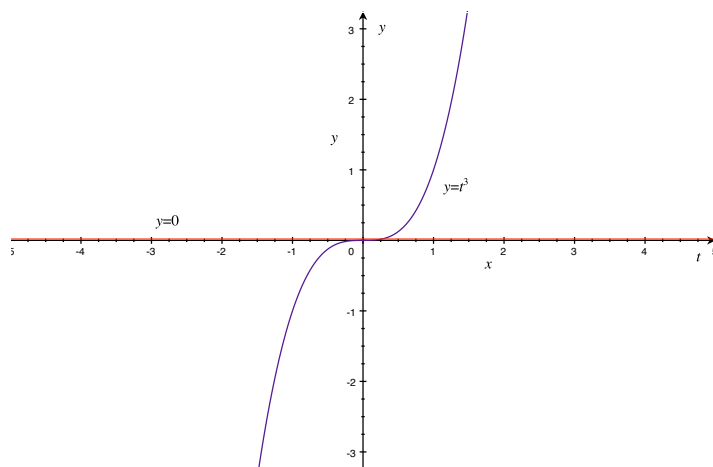
platí na $\mathbb{R}$, takže funkce φ zřejmě představuje řešení zadané rovnice na $\mathbb{R}$. Zároveň je funkce φ prodloužením řešení φ_1 i prodloužením řešení φ_2 na $\mathbb{R}$. Protože řešení ODR na $\mathbb{R}$ definované na $\mathbb{R}$ evidentně nelze prodloužit, funkce φ představuje maximální řešení zadané rovnice.

V obrázku (2.1) jsou v různých barvách načrtnuty 3 různé integrální křivky, které odpovídají různým maximálním řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0.$$

Dokázali byste určit čtvrtou integrální křivku?





Obr. 2.1: Integrální křivky

Příklady k procvičení

1. Přepište ekvivalentně do implicitního tvaru rovnici $y' = t \cdot y^2 - \sin(t) \cdot y$.
2. Přepište ekvivalentně do explicitního tvaru rovnici $(1 + \cos^2(t)) \cdot y' - t \cdot y^2 = 0$.
3. Ukažte, že funkce daná předpisem

$$3 \cdot e^{5 \cdot (t-4)}$$

je maximálním řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = 5 \cdot y, \quad y(4) = 3.$$

na $\mathbb{R}$.

4. Ukažte, že funkce φ daná předpisem

$$\varphi(t) = \operatorname{tg}(t), \quad D_\varphi = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

je maximálním řešením Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y(0) = 0.$$

5. Uhodněte maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad y(\pi) = 0.$$

Kapitola 3

Rovnice se separovanými proměnnými

Obyčejnou diferenciální rovnici, kterou lze zapsat ve tvaru

$$g(y) \cdot y' = h(t), \quad (3.1)$$

kde g , h jsou zadané reálné funkce, budeme nazývat rovnici se separovanými proměnnými („závislá proměnná y a nezávislá proměnná t se vyskytují na různých stranách rovnice“). Pro vysvětlení postupu řešení uvedené rovnice budeme potřebovat větu o derivaci složené funkce, respektive větu o první substituční metodě pro neurčité integrály (a zřejmý vztah $(\int f(t) dt)' = f(t)$). Zopakujte si znění příslušných tvrzení, které byly probrány v úvodním kurzu matematické analýzy. K rovnici (3.1) ještě připojme počáteční podmínku

$$y(t_0) = y_0. \quad (3.2)$$

Dvojice (3.1), (3.2) tedy specifikuje Cauchyovu úlohu, kterou nyní blíže prozkoumáme.

Předpoklad: V celém odstavci budeme dále předpokládat:

- funkce h je spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu I ,
- funkce g je spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu J .

I. Předpokládejme nejprve, že uvedená Cauchyova úloha má řešení φ na otevřeném intervalu $I_1 = D_\varphi \subset I$. Pak platí

$$\forall t \in I_1 : \quad g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = h(t).$$

Integrací výše uvedené rovnosti zjišťujeme, že musí existovat číslo $C \in \mathbb{R}$ takové, že na intervalu I_1 platí

$$\int g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int h(t) dt + C. \quad (3.3)$$

Nechť G je libovolná, pevně zvolená primitivní funkce k funkci g na J a H je libovolná, pevně zvolená primitivní funkce k funkci h na I , to znamená

$$G(y) = \int g(y) \, dy, \quad H(t) = \int h(t) \, dt.$$

Použijeme-li nyní větu o substituci pro integrál na levé straně rovnosti (3.3) (volíme $y = \varphi(t)$, takže $dy = \varphi'(t) \, dt$), můžeme psát

$$\forall t \in I_1 : \quad G(\varphi(t)) = H(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Řešení φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) tedy na I_1 vyhovuje implicitnímu vztahu

$$G(y) = H(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

II. Nyní postupujme obráceně, nechť

$$G(y) = \int g(y) \, dy \text{ na } J, \quad H(t) = \int h(t) \, dt \text{ na } I, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Předpokládejme, že diferencovatelná funkce φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) na otevřeném intervalu $I_1 = D_\varphi$ vyhovuje rovnici

$$G(y) = H(t) + C,$$

to znamená, že platí

$$\forall t \in I_1 : \quad G(\varphi(t)) = H(t) + C.$$

Potom nutně platí

$$\forall t \in I_1 : \quad (G(\varphi(t)))' = (H(t) + C)' = H'(t) = h(t).$$

Podle pravidla o derivaci složené funkce tedy musí platit

$$\forall t \in I_1 : \quad h(t) = (G(\varphi(t)))' = G'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

takže φ je řešením rovnice (3.1) na I_1 .

Poznámka 3.1. Provedené úvahy můžeme shrnout do pravidla, že řešení $y = \varphi(t)$ rovnice

$$g(y) \cdot y' = h(t)$$

hledáme mezi diferencovatelnými funkcemi, které vyhovují implicitním vztahům

$$\boxed{\int g(y) \, dy = \int h(t) \, dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Příklad 3.2. Hledejme řešení φ Cauchyovy úlohy

$$\frac{1}{y^2 + 1} \cdot y' = 2t, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Protože na $\mathbb{R}$ platí

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy = \operatorname{arctg} y, \quad \int 2t dt = t^2,$$

řešení úlohy hledáme mezi funkcemi splňujícími rovnici

$$\operatorname{arctg} y = t^2 + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Tu určíme dosazením počáteční podmínky:

$$\operatorname{arctg} 1 = 0^2 + C,$$

tedy

$$C = \frac{\pi}{4},$$

takže řešení φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) naší úlohy budeme hledat mezi funkcemi danými implicitně vztahem

$$\operatorname{arctg} y = t^2 + \frac{\pi}{4}$$

a podmínkou $\varphi(0) = 1$.

Máme štěstí, z předchozí rovnice můžeme snadno vyjádřit závisle proměnnou y :

$$y = \operatorname{tg} \left(t^2 + \frac{\pi}{4} \right).$$

Vlastní předpis pro řešení zadané Cauchyovy úlohy již známe, zbývá ještě určit definiční obor I_1 tohoto řešení. Z počáteční podmínky $y(0) = 1$ plyne, že musí platit $0 \in I_1$. Odtud získáme požadavek $-\frac{\pi}{2} \leq t^2 + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, tedy $-\frac{3\pi}{4} \leq t^2 \leq \frac{\pi}{4}$, takže konečně

$$t \in \left(-\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}} \right).$$

Protože funkce

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \operatorname{tg} \left(t^2 + \frac{\pi}{4} \right), \quad D_\varphi = \left(-\sqrt{\frac{\pi}{4}}, \sqrt{\frac{\pi}{4}} \right)$$

je diferencovatelná, představuje řešení zadané Cauchyovy úlohy.

▲

Poznámka 3.3. V literatuře se často setkáváme s následujícím popisem formálního postupu hledání řešení rovnice se separovanými proměnnými. Označíme-li derivaci jako „podíl diferenciálů“, můžeme psát

$$y' = \frac{dy}{dt},$$

a rovnice (3.1) tak přechází do tvaru

$$g(y) \frac{dy}{dt} = h(t).$$

Nyní obě strany rovnice „přenásobíme“ výrazem dt :

$$g(y) dy = h(t) dt.$$

Po integraci obou stran pak získáváme rovnost

$$\boxed{\int g(y) dy = \int h(t) dt + C, C \in \mathbb{R},}$$

ze které se snažíme nalézt předpis pro hledané řešení y . Doporučujeme čtenáři, aby si důkladně rozmyslel, že právě popsaný algoritmus je jen volným přepisem předchozích úvah (místo substituce $y = \varphi(t)$ vlastně používáme substituci $y = y(t)$).

Například rovnici

$$e^y \cdot y' = 2t,$$

lze stručně řešit takto:

$$e^y \frac{dy}{dt} = 2t,$$

$$e^y dy = 2t dt,$$

$$\int e^y dy = \int 2t dt + C,$$

$$e^y = t^2 + C,$$

$$\underline{\underline{y = \ln(t^2 + C), C \in \mathbb{R}.$$

Všimněme si, že správněji bychom měli psát

$$y(t) = \ln(t^2 + C), C \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme ještě, že pro pevně zvolené číslo $C \in (0, \infty)$ je maximálním řešením zadané rovnice funkce definovaná na $\mathbb{R}$. Je-li však $C \in (-\infty, 0)$, potom můžeme uvažovat dvě různá maximální řešení. První z nich je definováno na intervalu $(-\infty, \sqrt{|C|})$, zatímco druhým maximálním řešením je funkce definovaná na intervalu $(\sqrt{|C|}, \infty)$.

Příklad 3.4. Hledejme řešení φ Cauchyovy úlohy

$$\frac{y'}{y} = \cos t, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Řešení. Nejprve si všimněme, že hledaná funkce nemůže nabývat nulové hodnoty (vyskytuje se ve jmenovateli na levé straně rovnice). Z počáteční podmínky (a ze spojitosti hledaného řešení) pak usuzujeme, že hledané řešení může nabývat pouze záporných hodnot. Po přepisu rovnice má platit

$$\frac{1}{dt} \cdot \frac{dy}{y} = \cos t,$$

takže

$$\frac{1}{y} dy = \cos t dt,$$

a po integraci získáváme pro naše (záporné) řešení vztah

$$\ln(-y) = \sin t + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Aplikace počáteční podmínky vede k rovnici

$$\ln 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C,$$

takže $C = -1$, odkud plyne, že

$$\varphi(t) = -e^{\sin t - 1}.$$

▲

Příklad 3.5. Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$y' = \frac{t}{2y}, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Nejprve si všimněme, že řešení úlohy nemůže nabývat nulové hodnoty (vyskytuje se ve jmenovateli na pravé straně rovnice). Z počáteční podmínky (a ze spojitosti hledaného řešení) pak plyne, že hledané řešení může nabývat pouze kladných hodnot. Po úpravě musí pro naše řešení zřejmě platit vztah

$$2y \cdot y' = t,$$

takže postupně platí:

$$2y \frac{dy}{dt} = t,$$

$$2y dy = t dt,$$

$$\int 2y dy = \int t dt,$$

$$y^2 = \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky bezprostředně plyne

$$C = 1,$$

takže s přihlédnutím k požadavku $y > 0$ získáváme po drobné úpravě:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\sqrt{2t^2 + 4},$$

což je předpis pro řešení zadané Cauchyovy úlohy. ▲

Příklad 3.6. Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$(7y^6 + 5y^4 + 3y^2 + 1) \cdot \frac{dy}{dt} = 2t, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Řešení zřejmě musí vyhovovat vztahu

$$\int (7y^6 + 5y^4 + 3y^2 + 1) dy = \int 2t dt,$$

takže

$$y^7 + y^5 + y^3 + y = t^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky bezprostředně plyne $C = 4$, tedy

$$y^7 + y^5 + y^3 + y = t^2 + 4.$$

Vidíme, že hledat explicitní vyjádření pro řešení zadané Cauchyovy úlohy by bylo neefektivní, proto se spokojíme s konstatováním, že řešením zadané úlohy je funkce zadaná implicitně rovnicí

$$y^7 + y^5 + y^3 + y = t^2 + 4,$$

a podmínkou

$$y(0) = 1.$$

Kompetentní čtenář si snadno ověří, že (podle věty o implicitně zadané funkci) uvedené vztahy zaručují existenci řešení naší úlohy. ▲

Nyní naše poznatky o rovnicích se separovanými proměnnými upřesníme.

Věta 3.7. *Nechť*

- *h je spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu I takovém, že $t_0 \in I$,*
- *g je spojitá funkce definovaná na nějakém otevřeném intervalu J , přičemž $y_0 \in J$,*
- *pro každé $y \in J$ platí $g(y) \neq 0$.*

Potom Cauchyova úloha (3.1), (3.2) má právě jedno maximální řešení.



Důkaz. I. Nejprve dokážeme jednoznačnost:

Předpokládejme nejprve, že uvedená Cauchyova úloha má maximální řešení φ na otevřeném intervalu $I_1 = D_\varphi \subset \mathbb{R}$. Pak platí $\varphi(t_0) = y_0$, $H_\varphi \subset J$ a

$$\forall t \in I_1 : \quad g(\varphi(t)) \varphi'(t) = h(t).$$

Integrací výše uvedené rovnosti získáváme na I_1 rovnost

$$\int_{t_0}^t g(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \, ds = \int_{t_0}^t h(s) \, ds.$$

Použitím substituce $y = \varphi(s)$ v integrálu na levé straně rovnosti můžeme psát

$$\int_{y_0}^{\varphi(t)} g(y) \, dy = \int_{t_0}^t h(s) \, ds. \quad (3.4)$$

Rozvedme podrobněji získaný výsledek. Nechť G je na J taková primitivní funkce k funkci g , že platí $G(y_0) = 0$, tedy

$$G(y) = \int_{y_0}^y g(u) \, du.$$

Ze spojitosti a poslední podmínky v předpokladech věty plyne, že g na J je buď kladná nebo je na tomto intervalu záporná. To ovšem znamená, že G je na J ryze monotónní, tedy prostou funkcí. Existuje tedy inverzní funkce G^{-1} k funkci G .

Nechť H je na I taková primitivní funkce k funkci h , že platí $H(t_0) = 0$, to znamená

$$H(t) = \int_{t_0}^t h(s) \, ds.$$

Pak rovnost (3.4) na I_1 můžeme zapsat ve tvaru:

$$G(\varphi(t)) = H(t).$$

Použijeme-li nyní na obě strany rovnosti inverzi G^{-1} , získáváme na I_1 vztah

$$G^{-1}(G(\varphi(t))) = G^{-1}(H(t)),$$

tedy

$$\forall t \in I_1 : \quad \varphi(t) = G^{-1}(H(t)).$$

Získali jsme předpis pro hledané řešení φ a jsme tak připraveni ukázat, že maximální řešení uvažované Cauchyovy úlohy je dáno jednoznačně. Skutečně, předpokládejme kvůli sporu, že zadaná Cauchyova úloha má ještě jiné maximální řešení ψ na otevřeném intervalu $I_2 \subset I$. Pro toto řešení zřejmě musí platit

$$\forall t \in I_2 : \quad \psi(t) = G^{-1}(H(t)).$$

Protože $t_0 \in I_1 \cap I_2$, sjednocení $I_1 \cup I_2$ musí být otevřeným intervalem, který je vlastní nadmnožinou intervalu I_1 nebo vlastní nadmnožinou intervalu I_2 . To je ovšem ve sporu

s naším předpokladem, že obě funkce φ, ψ představují maximální řešení. Funkce γ definovaná předpisem

$$\gamma(t) = G^{-1}(H(t)), \quad t \in I_1 \cup I_2,$$

totiž představuje prodloužení řešení φ nebo prodloužení řešení ψ .

II. Nyní se zabýváme důkazem existence:

Nechť funkce G, H jsou definovány vztahy

$$G(y) = \int_{y_0}^y g(u) \, du, \quad y \in J,$$

$$H(t) = \int_{t_0}^t h(s) \, ds, \quad t \in I.$$

Protože $G(y_0) = 0 = H(t_0)$, obory hodnot obou funkcí mají neprázdný průnik. Protože G je ryze monotónní a diferencovatelná funkce definovaná na otevřeném intervalu J , jejím oborem hodnot musí být nějaký otevřený interval (c, d) . Ze spojitosti funkce H plyne existence otevřeného intervalu $I_1 \subset I$ takového, že pro všechna $t \in I_1$ platí $H(t) \in (c, d)$. Na I_1 můžeme tedy definovat funkci φ předpisem

$$\varphi(t) = G^{-1}(H(t)), \quad t \in I_1.$$

Přímou aplikací pravidel pro derivaci inverzní funkce a derivaci složené funkce ověříme, že φ je řešením zadané Cauchyovy úlohy na I_1 :

$$\begin{aligned} \forall t \in I_1 : g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) &= g(\varphi(t)) \cdot (G^{-1}(H(t)))' = \\ &= g(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{G'(G^{-1}(H(t)))} \cdot H'(t) = g(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{g(G^{-1}(H(t)))} \cdot h(t) = \\ &= g(\varphi(t)) \cdot \frac{1}{g(\varphi(t))} \cdot h(t) = h(t). \end{aligned}$$

Vezmeme nyní sjednocení

$$\bigcup_{\tau \in \Theta} I_\tau$$

všech otevřených intervalů I_τ , které obsahují interval I_1 a na kterých jsou definována řešení φ_τ uvažované Cauchyovy úlohy. Uvažované sjednocení je zřejmě otevřeným intervalem. Jednotlivá řešení jsou jednoznačně určena předpisem

$$\varphi_\tau(t) = G^{-1}(H(t)), \quad t \in I_\tau,$$

lze tedy korektně definovat funkci

$$\varphi(t) = G^{-1}(H(t)), \quad t \in \bigcup_{\tau \in \Theta} I_\tau,$$

která je maximálním řešením úlohy.

□

Příklad 3.8. Určeme všechna maximální řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}. \quad (3.5)$$

Řešení. I. Jedním z maximálních řešení (3.5) je nulová funkce na $\mathbb{R}$.

II. Nejprve místo (3.5) zkoumejme rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y > 0, \quad (3.6)$$

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y < 0. \quad (3.7)$$

Rovnice lze psát ekvivalentně ve tvarech

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot y' = 1, \quad y > 0,$$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \cdot y' = 1, \quad y < 0.$$

Pro (3.6) i (3.7) jsou proto splněny předpoklady Věty 3.7, máme tedy zaručenu existenci i jednoznačnost maximálních řešení Cauchyových úloh (3.6), $y(t_0) = y_0$, $y_0 \in (0, +\infty)$ a (3.7), $y(t_0) = y_0$, $y_0 \in (-\infty, 0)$. Určeme všechna maximální řešení (3.6) a všechna maximální řešení (3.7). Postup je stejný, takže je určíme najednou.

Buď $y > 0$ nebo $y < 0$:

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2},$$

$$\frac{1}{3} \frac{y'}{\sqrt[3]{y^2}} = 1,$$

$$\sqrt[3]{y} = t + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$y = (t + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Tedy funkce y je maximálním řešením (3.6) právě tehdy, když

$$\exists C \in \mathbb{R} : y(t) = (t + C)^3, \quad t \in (-C, +\infty).$$

Dále, y je maximálním řešením (3.7) právě tehdy, když

$$\exists C \in \mathbb{R} : y(t) = (t + C)^3, \quad t \in (-\infty, -C).$$

III. Nyní jsme připraveni pomocí techniky „slepování“ určit všechna maximální řešení (3.5). Necht $C \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}_1(t) = (t + C)^3$, $t \in (-C, +\infty)$. Pak

$$\lim_{t \rightarrow -C+} \tilde{\varphi}_1(t) = 0.$$

Definujme proto $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t), & t \in (-C, +\infty) \\ 0, & t = -C. \end{cases}$$

Vypočtěme $\varphi'_{1+}(-C)$:

$$\varphi'_{1+}(-C) = \lim_{t \rightarrow -C+} \frac{(t+C)^3 - 0}{t - (-C)} = \lim_{t \rightarrow -C+} (t+C)^2 = 0.$$

Budiž nyní $C \in \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}_2(t) = (t+C)^3$, $t \in (-\infty, -C)$. Pak

$$\lim_{t \rightarrow -C-} \tilde{\varphi}_2(t) = 0.$$

Definujme proto $\varphi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \tilde{\varphi}_2(t), & t \in (-\infty, -C) \\ 0, & t = -C. \end{cases}$$

Podobně, jako u funkce φ_1 snadno zjistíme:

$$\varphi'_{2-}(-C) = 0.$$

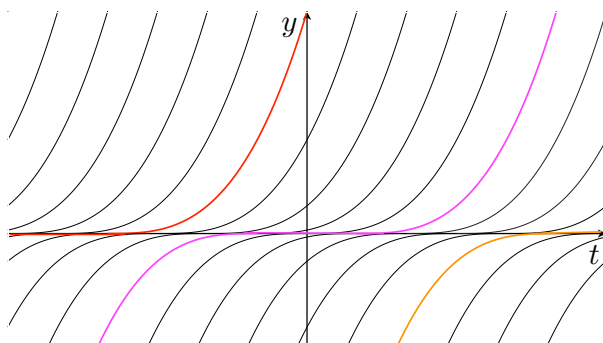
Všechna maximální řešení (3.5) můžeme tedy zkonstruovat „lepením“ z funkcí 0, φ_1 , φ_2 takto:

Nechť $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_1 \geq C_2$.

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \begin{cases} (t+C_1)^3, & t \in (-\infty, -C_1), \\ 0, & t \in \langle -C_1, -C_2 \rangle, \\ (t+C_2)^3, & t \in (-C_2, +\infty), \end{cases} \\ \psi_2(t) &= \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, -C_2), \\ (t+C_2)^3, & t \in \langle -C_2, +\infty \rangle, \end{cases} \\ \psi_3(t) &= \begin{cases} (t+C_1)^3, & t \in (-\infty, -C_1 \rangle, \\ 0, & t \in (-C_1, +\infty), \end{cases} \\ \psi_4(t) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Integrální křivky jsou načrtnuty na obrázku (3.1).





Obr. 3.1

Příklady k procvičení

1. Řešte dané diferenciální rovnice metodou separace proměnných:

a) $y' = \frac{y}{t},$

b) $\frac{y'}{t} = 2y - 3ty,$

c) $ty' = (1 + y^2) \operatorname{arctg} y,$

d) $y' = \frac{1-2t}{y^2},$

e) $ty' = -\sqrt{1 - y^2} \arccos y,$

f) $y' = t^2 y.$

2. Najděte řešení Cauchyových úloh:

a)
$$\begin{cases} (t+1)y' + ty = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y' = y \cos t, \\ y(\pi) = 1, \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y' \sqrt{1-t^2} = ty, \\ y(0) = e^{-1}, \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y' = 2y, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $y(t) = Ct, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$

b) $y(t) = Ce^{t^2-t^3}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$

c) $y(t) = \operatorname{tg}(Ct), \quad C \in \mathbb{R}, \quad Ct \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$

d) $y(t) = \sqrt[3]{3t - 3t^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad 3t - 3t^2 + C > 0,$

e) $y(t) = \cos(Ct), \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad Ct \in (0, \pi), \quad y(t) = -1, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R}$
nebo „vhodná slepení“ těchto tří řešení,

f) $y(t) = Ce^{t^3/3}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$

2. a) $\varphi(t) = (t+1)e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R},$

b) $\varphi(t) = e^{\sin t}, \quad t \in \mathbb{R},$

c) $\varphi(t) = e^{-\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in (-1, 1),$

d) $\varphi(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$

Kapitola 4

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Nechť jsou zadány funkce a, b definované na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. ODR tvaru

$$y' + a(t)y = b(t) \quad (4.1)$$

nazýváme lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Je-li speciálně pravá strana v uvedené rovnici nulová, rovnice přechází v rovnici

$$y' + a(t)y = 0, \quad (4.2)$$

kterou nazýváme homogenní lineární diferenciální rovnicí 1. řádu.

Mějme ještě zadána čísla $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}$. Připomeňme, že podmínku

$$y(t_0) = y_0 \quad (4.3)$$

nazýváme počáteční podmínkou (kladenou na řešení zadané diferenciální rovnice).

Popíšme nyní metodu „přenásobení“, která umožňuje řešit zadané lineární diferenciální rovnice.

- Nejprve nalezneme „maximální“ interval J , na kterém jsou koeficient a rovnice a pravá strana b rovnice spojitými funkcemi. Je-li zadána počáteční podmínka $y(t_0) = y_0$, ověříme, že $t_0 \in J$.
- Vypočteme $\int a(t) dt$ na J , to znamená nalezneme libovolnou primitivní funkci k funkci $a(t)$ na J .
- Rovnici (4.1) přenásobíme kladnou a diferencovatelnou funkcí

$$e^{\int a(t) dt}, \quad t \in J :$$

$$y' \cdot e^{\int a(t) dt} + y \cdot e^{\int a(t) dt} \cdot a(t) = e^{\int a(t) dt} \cdot b(t) .$$

Získáme tak diferenciální rovnici, která má zřejmě stejnou množinu všech řešení jako rovnice (4.1) (hovoříme o ekvivalentních rovnicích). Použijme na levou stranu rovnice (pozpátku) vzorec pro derivaci součinu. Na intervalu J tedy platí rovnost

$$\left(y \cdot e^{\int a(t) dt}\right)' = e^{\int a(t) dt} \cdot b(t).$$

Po integraci obou stran získáváme na J vztah

$$y(t) \cdot e^{\int a(t) dt} = \int e^{\int a(t) dt} \cdot b(t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

který v závislosti na volbě „integrační konstanty“ C zachycuje všechna řešení zadané rovnice na J . Množinu všech řešení naší rovnice na intervalu J pak lze po úpravě popsat vzorcem (někdy jej nazýváme *obecným řešením* zadané rovnice):

$$y(t) = C \cdot e^{-\int a(t) dt} + e^{-\int a(t) dt} \cdot \int e^{\int a(t) dt} \cdot b(t) dt, \quad t \in J, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- Je-li zadána počáteční podmínka $y(t_0) = y_0$, zjistíme dosazením konkrétní hodnotu C a napíšeme příslušné řešení Cauchyovy úlohy na J .

Příklad 4.1. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - 3t^2 y = 0, \quad y(1) = 2e^3.$$

Řešení. Zřejmě je $a(t) = -3t^2$, $b(t) = 0$, jde tedy o homogenní rovnici. Funkce daná předpisem $-3t^2$ je spojitá na $J = \mathbb{R}$. Zřejmě platí $\int (-3t^2) dt = -t^3$, takže po přenásobení zadané rovnice kladnou a diferencovatelnou funkcí

$$e^{-t^3}$$

dostáváme ekvivalentní rovnici

$$y' \cdot e^{-t^3} + y \cdot \left(e^{-t^3} \cdot (-3t^2)\right) = 0.$$

Po úpravě přechází levá strana v derivaci součinu

$$\left(y \cdot e^{-t^3}\right)' = 0,$$

takže po integraci obou stran :

$$y(t) \cdot e^{-t^3} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Po přenásobení funkcí e^{t^3} získáváme obecné řešení zadané rovnice:

$$y(t) = Ce^{t^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $y(1) = 2e^3$ (v předchozím vztahu dosadíme číslo $2e^3$ místo $y(t)$ a číslo 1 za t) získáváme rovnici pro C :

$$2e^3 = Ce^{1^3} \implies C = 2e^2.$$

Nyní jsme již schopni zapsat hledané řešení φ zadané Cauchyovy úlohy:

$$\varphi(t) = 2e^2 e^{t^3} = 2e^{t^3+2}.$$

▲

Ukázka stručného zápisu řešení téhož příkladu:

Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - 3t^2 y = 0, \quad y(1) = 2e^3.$$

$$y' - 3t^2 y = 0 \quad | \cdot e^{\int -3t^2 dt}$$

$$y'e^{-t^3} - 3t^2 y e^{-t^3} = 0$$

$$(y \cdot e^{-t^3})' = 0$$

$$y \cdot e^{-t^3} = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\underline{y = Ce^{t^3}, \quad C \in \mathbb{R}}$$

$$2e^3 = Ce \implies C = 2e^2$$

$$\underline{\underline{\varphi(t) = 2e^{t^3+2}}}$$

Uvedme ještě stručné řešení dalšího příkladu.

Příklad 4.2. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' + \frac{1}{t}y = t, \quad y(-1) = 2.$$

Řešení. $-1 \in (-\infty, 0) \implies J = (-\infty, 0)$. Na J :

$$y' + \frac{1}{t}y = t \quad | \cdot e^{\int \frac{1}{t} dt}, \quad t \in (-\infty, 0) \quad [e^{\ln|t|} = -t, \text{ pro } t < 0]$$

$$-y't - y = -t^2,$$

$$(-yt)' = -t^2,$$

$$-yt = \tilde{C} - \frac{t^3}{3},$$

$$y = \frac{C}{t} + \frac{t^2}{3}, \quad t \in (-\infty, 0), \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(-1) = 2 \implies 2 = -C + \frac{1}{3} \implies C = -\frac{5}{3}$$

$$\underline{\underline{\varphi(t) = -\frac{5}{3t} + \frac{t^2}{3}, \quad t \in (-\infty, 0).}}$$

▲

Příklad 4.3. Určete řešení Cauchyovy úlohy

$$y' + \frac{1}{t}y = \frac{\sin t}{t^2}, \quad y(1) = 5.$$

Řešení. V první části můžeme postupovat podobně jako u předešlého příkladu: $1 \in (0, \infty) \implies J = (0, \infty)$. Na J :

$$y' + \frac{1}{t}y = \frac{\sin t}{t^2} \quad | \cdot e^{\int \frac{1}{t} dt}, \quad t \in (0, \infty) \quad [e^{\ln|t|} = t, \text{ pro } t > 0]$$

$$y't + y = \frac{\sin t}{t},$$

$$(yt)' = \frac{\sin t}{t}.$$

Nyní si uvědomíme, že na intervalu $(0, \infty)$ integrál $\int \frac{\sin t}{t} dt$ sice existuje, ale není elementární funkcí (není možné jej zapsat „obyčejným“ vzorcem). Musíme se tedy uchýlit k zápisu příslušné primitivní funkce pomocí určitého integrálu jako funkce horní meze:

$$yt = C + \int_1^t \frac{\sin s}{s} ds, \quad t > 0.$$

Protože $\int_1^1 \frac{\sin s}{s} ds = 0$, po dosazení počáteční podmínky zjišťujeme, že $C = 5$, a proto

$$\varphi(t)t = 5 + \int_1^t \frac{\sin s}{s} ds, \quad t > 0.$$

Řešením zadané Cauchyovy úlohy je tedy funkce $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem

$$\underline{\underline{\varphi(t) = \frac{5}{t} + \frac{1}{t} \int_1^t \frac{\sin s}{s} ds, \quad t \in (0, \infty)}}$$

Při výpočtu hodnot $\varphi(t)$ bychom tak zřejmě museli použít numerických metod k výpočtu uvedeného určitého integrálu. ▲

Základní poznatky o vlastnostech lineárních diferenciálních rovnic můžeme shrnout do následujícího tvrzení:

Věta 4.4. *Nechť a, b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J . Nechť $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak platí:*

- 1) *Existuje právě jedna funkce φ , která je na J řešením Cauchyovy úlohy (4.1), (4.3).*
- 2) *Množina všech řešení homogenní rovnice (4.2) na J tvoří vektorový prostor dimenze 1.*
- 3) *Řešení rovnice (4.2) na J nemění na tomto intervalu znaménko.*
- 4) *Nechť y_p je řešení rovnice (4.1) na J . Zvolme libovolně řešení y_h homogenní rovnice (4.2) na J . Pak funkce*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \quad t \in J$$

je opět řešením rovnice (4.1) na J .

- 5) *Nechť y_p je nějaké, pevně zvolené řešení rovnice (4.1) na J . Pak ke každému řešení y rovnice (4.1) na J existuje právě jedno řešení y_h homogenní lineární diferenciální rovnice (4.2) na J takové, že pro všechna $t \in J$ platí:*

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Poznámka 4.5. Ve tvrzeních posledních dvou částí uvedené věty je obsažen tzv. princip superpozice, který můžeme volně shrnout v následujícím sloganu: Obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice a partikulárního řešení y_p nehomogenní rovnice. Jinak zapsáno, označíme-li symbolem Y_H množinu všech řešení homogenní rovnice (4.2) na J a symbolem Y systém všech řešení rovnice (4.1), můžeme napsat symbolický vzorec

$$Y = Y_H + y_p.$$

Důkaz. Nechť a, b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J . Nechť $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}$. Pak platí následující ekvivalence na J :

$$\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = b(t), \quad \varphi(t_0) = y_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\varphi'(t) \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \varphi(t) \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \cdot a(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \cdot b(t), \quad \varphi(t_0) = y_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
\left(\varphi(t) \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \right)' &= e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \cdot b(t), & \varphi(t_0) &= y_0 \\
&\Downarrow \\
\varphi(t) \cdot e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} &= y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^u a(s) ds} \cdot b(u) du \\
&\Downarrow \\
\varphi(t) &= y_0 \cdot e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} + \left(\int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^u a(s) ds} \cdot b(u) du \right) \cdot e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}.
\end{aligned}$$

Právě jsme ukázali, že Cauchyova úloha (4.1), (4.3) je na J jednoznačně řešitelná. Zvolíme-li v získaném vzorci pro řešení $b = 0$, vidíme, že řešení homogenní lineární diferenciální rovnice na J lze psát ve tvaru

$$y_h(t) = C \cdot e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds},$$

kde $C = y_h(t_0)$. Každé řešení homogenní rovnice (4.2) můžeme tedy zapsat jako vhodný násobek řešení

$$\overline{y}_h(t) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}$$

této rovnice. Odtud bezprostředně plyne, že množina všech řešení homogenní rovnice (4.2) na J tvoří lineární prostor dimenze jedna. Z tvaru vzorce pro řešení homogenní rovnice ihned plyne, (řešení jsou reálnými násobky „exponenciál“), že tyto funkce jsou na J všude kladné nebo všude záporné, popřípadě jde o nulovou funkci na J .

Nechť y_p je řešení rovnice (4.1) na J . Zvolme libovolně řešení y_h homogenní rovnice (4.2) na J . Položme

$$y = y_h + y_p.$$

Pak na J platí:

$$\begin{aligned}
y'(t) + a(t) \cdot y(t) &= (y_h(t) + y_p(t))' + a(t) \cdot (y_h(t) + y_p(t)) = \\
&= (y_h'(t) + a(t) \cdot y_h(t)) + (y_p'(t) + a(t) \cdot y_p(t)) = 0 + b(t) = b(t).
\end{aligned}$$

Funkce y tedy představuje řešení rovnice (4.1) na J .

Obráceně, nechť y_p, y jsou řešeními (4.1) na J . Položíme-li

$$y_h = y - y_p,$$

pak

$$y = y_h + y_p,$$

funkce y_h je určena jednoznačně a na J platí:

$$\begin{aligned}
y_h'(t) + a(t) \cdot y_h(t) &= (y(t) - y_p(t))' + a(t) \cdot (y(t) - y_p(t)) = \\
&= (y'(t) + a(t) \cdot y(t)) - (y_p'(t) + a(t) \cdot y_p(t)) = b(t) - b(t) = 0,
\end{aligned}$$

takže y_h je řešením homogenní rovnice (4.2), čímž je důkaz ukončen. $\square$

Poznámka 4.6. Homogenní lineární rovnice lze zřejmě převést na rovnice se separovanými proměnnými. Připomeňme jen, že řešení homogenní rovnice nemění znaménko, tato informace nám při řešení metodou separace usnadní práci.

Příklad 4.7. Řešme na $\mathbb{R}$ rovnici

$$y' + y \cdot \sin t = 0.$$

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že jedním z maximálních řešení je nulová funkce. Hledejme nenulová řešení zadané rovnice na $\mathbb{R}$. Protože grafy těchto řešení neprotínají osu t , můžeme postupně provádět následující ekvivalentní úpravy:

$$\begin{aligned} y' + y \cdot \sin t &= 0 \\ \Downarrow \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= -\sin t \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int -\sin t \, dt + C_1, \end{aligned}$$

kde $C_1 \in \mathbb{R}$ je libovolné pevně zvolené číslo. Po integraci obou stran získáváme

$$\ln |y(t)| = C_1 + \cos t, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

takže

$$|y(t)| = e^{C_1 + \cos t} = e^{C_1} \cdot e^{\cos t} = K \cdot e^{\cos t}, \quad K = e^{C_1} \in (0, \infty).$$

Nyní je zřejmé, že kladná řešení zadané rovnice popíšeme předpisem

$$y(t) = K \cdot e^{\cos t}, \quad K \in (0, \infty),$$

zatímco záporná řešení předpisem

$$y(t) = -K \cdot e^{\cos t}, \quad K \in (0, \infty).$$

Obě možnosti zřejmě můžeme popsat jediným vzorcem, ve kterém je navíc zahrnuto i nulové řešení:

$$y(t) = C \cdot e^{\cos t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▲

Příklad 4.8. Popišme stručně hledání maximálního řešení následující Cauchyovy úlohy:

$$y' + \frac{y}{\cos^2 t} = 0, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. Vzhledem k počáteční podmínce hledáme kladné řešení definované na otevřeném intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Pro toto řešení musí (na zmíněném intervalu) platit:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} + \frac{y}{\cos^2 t} &= 0, \quad y(0) = 1 \\ \frac{1}{y} dy &= -\frac{1}{\cos^2 t} dt, \quad y(0) = 1 \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int -\frac{1}{\cos^2 t} dt + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad y(0) = 1 \\ \ln y &= C - \operatorname{tg} t, \quad y(0) = 1 \\ \underline{\underline{y(t) = e^{1-\operatorname{tg} t}, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).}}\end{aligned}$$

▲

Metoda variace konstanty

Odvoďme si nyní alternativní metodu pro řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu (4.1). Předpokládejme, že funkce a , b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J . Pak systém všech řešení homogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu tvoří vektorový prostor dimenze 1. Odtud ihned plyne, že známe-li jedno nenulové řešení y_h homogenní rovnice (4.2) na J , pak každé další řešení y této rovnice je dáno předpisem ve tvaru

$$y(t) = C \cdot y_h(t),$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je vhodná konstanta. Ukažme si, že zaměníme-li v uvedeném předpisu konstantu C vhodnou funkcí $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, získáme předpis pro řešení y_p rovnice (4.1) na J (odtud název metoda variace konstanty). Hledejme tedy řešení y_p rovnice (4.1) na J ve tvaru

$$y_p(t) = k(t) \cdot y_h(t),$$

kde k je diferencovatelná funkce definována na J . Po dosazení do rovnice (4.1) můžeme na J provést následující řetězec úprav:

$$\begin{aligned}y_p'(t) + a(t) \cdot y_p(t) &= b(t) \\ \Updownarrow \\ (k(t) \cdot y_h(t))' + a(t) \cdot (k(t) \cdot y_h(t)) &= b(t) \\ \Updownarrow \\ k'(t) \cdot y_h(t) + k(t) \cdot y_h'(t) + a(t) \cdot k(t) \cdot y_h(t) &= b(t)\end{aligned}$$



$$k'(t) \cdot y_h(t) + k(t) \cdot [y_h'(t) + a(t) \cdot y_h(t)] = b(t).$$

Protože y_h je řešením homogenní rovnice (4.2), funkce v hranaté závorce posledního vzorce je nulová. Pro funkci k tedy na J musí platit

$$k'(t) \cdot y_h(t) = b(t),$$

a protože y_h nemění znaménko, můžeme psát

$$k(t) = \int \frac{b(t)}{y_h(t)} dt.$$

Příklad 4.9. Řešme na $\mathbb{R}$ rovnici

$$y' + y \cdot \sin t = \sin t.$$

Řešení. Nejprve je třeba vyřešit přidruženou homogenní diferenciální rovnici

$$y' + y \cdot \sin t = 0.$$

Tuto úlohu jsme již řešili a tak jen zopakujme, že množinu všech řešení na $\mathbb{R}$ můžeme popsat předpisem

$$C \cdot e^{\cos t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní budeme postupovat metodou variace konstanty. Hledáme diferencovatelnou funkci k , pro kterou na $\mathbb{R}$ platí

$$(k(t) \cdot e^{\cos t})' + (k(t) \cdot e^{\cos t} \cdot \sin t) = \sin t.$$

Odtud

$$k'(t) \cdot e^{\cos t} + k(t) \cdot e^{\cos t} \cdot (-\sin t) + k(t) \cdot e^{\cos t} \cdot \sin t = \sin t,$$

takže

$$k'(t) \cdot e^{\cos t} = \sin t.$$

Použijeme-li jednoduchou substituci $u = -\cos t$, můžeme snadno vypočítat, že

$$k(t) = \int e^{-\cos t} \cdot \sin(t) dt = \int e^u du = e^{-\cos t},$$

takže jedním z řešení zadané nehomogenní rovnice je funkce y_p daná předpisem

$$y_p(t) = k(t) \cdot e^{\cos t} = e^{-\cos t} \cdot e^{\cos t} = 1.$$

Poznamenejme, že toto řešení jsme mohli při pozornějším pohledu na zadanou rovnici „uhodnout” přímo a ušetřit si tak uvedené výpočty. Abychom konečně završili splnění zadaného úkolu, použijeme princip superpozice a obecné řešení zadané rovnice napíšeme jako součet obecného řešení přidružené rovnice a právě zjištěného řešení rovnice nehomogenní:

$$y(t) = C \cdot e^{\cos t} + 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$



Příklad 4.10. Stručný zápis popsaného postupu si ukažme ještě na řešení Cauchyovy úlohy

$$y' + 2t \cdot y = 2t, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. I. Nalezneme obecné řešení homogenní rovnice

$$y' + 2t \cdot y = 0.$$

$$\frac{dy}{dt} + 2t \cdot y = 0,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2t \, dt,$$

$$\ln |y| = C_1 - t^2,$$

$$|y| = e^{C_1} \cdot e^{-t^2},$$

$$\underline{y_h(t) = C \cdot e^{-t^2}, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

II. Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$y' + 2t \cdot y = 2t.$$

$$y_p(t) = k(t) \cdot e^{-t^2}.$$

$$\left(k(t) \cdot e^{-t^2}\right)' + 2t \cdot k(t) \cdot e^{-t^2} = 2t,$$

$$k'(t) \cdot e^{-t^2} - 2t \cdot k(t) \cdot e^{-t^2} + 2t \cdot k(t) \cdot e^{-t^2} = 2t,$$

$$k'(t) \cdot e^{-t^2} = 2t,$$

$$k(t) = \int e^{t^2} 2t \, dt = \int e^u \, du = e^{t^2},$$

$$\underline{y_p(t) = k(t) \cdot e^{t^2} = e^{t^2} \cdot e^{-t^2} = 1.}$$

III. Zapišeme obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$\underline{y(t) = C \cdot e^{t^2} + 1, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

IV. Nalezneme řešení Cauchyovy úlohy.

$$y(0) = 1 : \quad 1 = C \cdot e^{0^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0,$$

$$\underline{\underline{y(t) = 1.}}$$

Pozorný čtenář si opět všiml, že řešení zadané Cauchyovy úlohy se dalo snadno uhodnout. ▲

Příklady k procvičení

1. Určete všechna maximální řešení zadaných diferenciálních rovnic:

a) $ty' - y = 0$,

b) $y' - \frac{y}{t} = -\ln t$,

c) $y' - y = t^2$,

d) $y' + ty = t$,

e) $y' - y \operatorname{tg} t = \cos t$,

f) $y' - \frac{t}{1+t^2}y = \frac{1}{t}$,

g) $y' = 2ty - 3t^2y$,

h) $y' = 3t^2y$,

i) $y' = ty - t^3$,

j) $y' + y = \cos t$,

k) $y' - \frac{2y}{t \ln t} = \frac{1}{t}$,

l) $(1+t^2)y' - 2ty = (1+t^2)^2$.

2. Nalezněte maximální řešení zadaných Cauchyových úloh:

a)
$$\begin{cases} y' + \frac{y}{t} = 3t, \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} y' = ty, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} y' + y = t, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} y' - y \cotg t = e^t \sin t, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} y' = y \sin t, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \end{cases}$$

f)
$$\begin{cases} y' + y \cotg t = \sin t, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

3. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} C' = -\frac{2,88}{35}C, \\ C(0) = 20 \end{cases}$$

z Příkladu 1.2 popisující jakým způsobem se mění koncentrace léku v krvi v závislosti na čase.

4. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} T_h' = 0,04(20 - T_h), \\ T_h(0) = 100 \end{cases}$$

z Příkladu 1.4 popisující teplotu hrníčku s kávou v závislosti na čase.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $y(t) = Ct, C \in \mathbb{R},$ b) $y(t) = -\frac{1}{2}t \ln t + Ct, C \in \mathbb{R},$
c) $y(t) = Ce^t - t^2 - 2t - 2, C \in \mathbb{R},$ d) $y(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}} + 1, C \in \mathbb{R},$
e) $y(t) = \frac{2C+t+\frac{1}{2}\sin(2t)}{2\cos t}, t \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R},$
f) $y(t) = \sqrt{1+t^2} \left(C - \ln \left(1 + \sqrt{1+t^2} \right) + \ln |t| \right), C \in \mathbb{R},$
g) $y(t) = Ce^{t^2-t^3}, C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$ h) $y(t) = Ce^{t^3}, C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$
i) $y(t) = Ce^{t^2/2} + t^2 + 2, C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$ j) $y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}(\sin t + \cos t), C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$
k) $y(t) = C \ln^2 t - \ln t, C \in \mathbb{R}, t \in (1, +\infty),$ m) $y(t) = (C+t)(1+t^2), C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$
2. a) $\varphi(t) = t^2, t \in (0, \infty),$ b) $\varphi(t) = \sin t \left(e^t - e^{\frac{\pi}{2}} \right), t \in (0, \pi),$
c) $\varphi(t) = e^{t^2/2}, t \in \mathbb{R},$ d) $\varphi(t) = e^{-\cos t}, t \in \mathbb{R},$
e) $\varphi(t) = e^{-t} + t - 1, t \in \mathbb{R},$ f) $\varphi(t) = \frac{2t - \sin(2t) - \pi + 4}{4 \sin t}, t \in (0, \pi).$
3. $\bar{C}(t) = 20 \cdot e^{-\frac{2,88}{35}t}, t \in \mathbb{R}.$
4. $\bar{T}_h(t) = 80 \cdot e^{-0,04t} + 20, t \in \mathbb{R}.$

Kapitola 5

Obecné věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu

V této kapitole se (bez důkazů, které lze nalézt například v [8]) seznámíme s obecnými tvrzeními o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyových úloh.

Uvažujme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = f(t, y), \quad (5.1)$$

spolu s počáteční podmínkou

$$y(t_0) = y_0. \quad (5.2)$$

Věta 5.1 (Peanova, o existenci řešení). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině a bod (t_0, y_0) patří do definičního oboru této funkce. Potom Cauchyova úloha (5.1), (5.2) má alespoň jedno maximální řešení.*

Příklad 5.2. Cauchyova úloha

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad y(0) = 0$$

splňuje předpoklady Peanovy věty a, jak jsme již vlastně ukázali v příkladu (3.8), existuje nekonečně mnoho maximálních řešení této úlohy.



Jak jsme viděli v uvedeném příkladě, k zajištění jednoznačnosti řešení pouhá spojitost pravé strany diferenciální rovnice (5.1) nestačí. Obvykle se jednoznačnost zajišťuje přidáním předpokladu „o omezené rychlosti změny funkce f “ vzhledem ke druhé proměnné. Nejjednodušší způsob, jak to provést, je obsažen v následujícím tvrzení:

Věta 5.3 (O existenci a jednoznačnosti). *Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, přičemž (t_0, y_0) patří do definičního oboru této funkce. Nechť je na Ω navíc spojitá funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$, to znamená parciální derivace funkce f podle druhé proměnné. Potom Cauchyova úloha (5.1), (5.2) má právě jedno maximální řešení.*

Poznámka 5.4. Vraťme se k rovnici

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}.$$

Zřejmě $f(t, y) = 3\sqrt[3]{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$, takže je ihned vidět, že předpoklad zaručující jednoznačnost je porušen na přímce $y = 0$.



Následující tvrzení přináší informaci o minimálním intervalu, na kterém je garantována existence řešení zkoumané Cauchyovy úlohy.

Věta 5.5 (Picardova-Lindelöfova). *Předpokládejme, že funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá na obdélníku $V = \langle t_0 - a, t_0 + a \rangle \times \langle y_0 - b, y_0 + b \rangle$, kde $a > 0$, $b > 0$. Nechť existuje číslo $L \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé dva body $(t, y) \in V$, $(t, z) \in V$ platí:*

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L \cdot |y - z|. \quad (5.3)$$

Označme

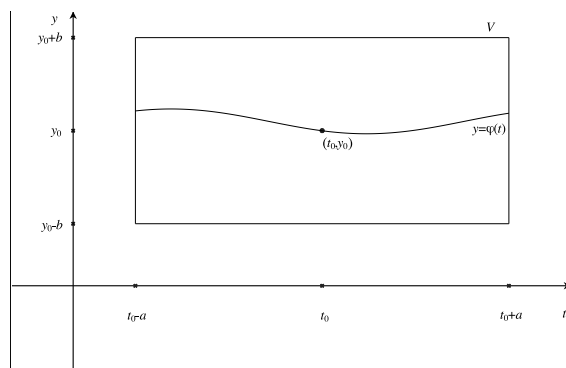
$$M = \max_{(t,y) \in V} |f(t, y)|$$

a předpokládejme, že f je na V nenulová funkce, tedy $M > 0$. Položme

$$\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

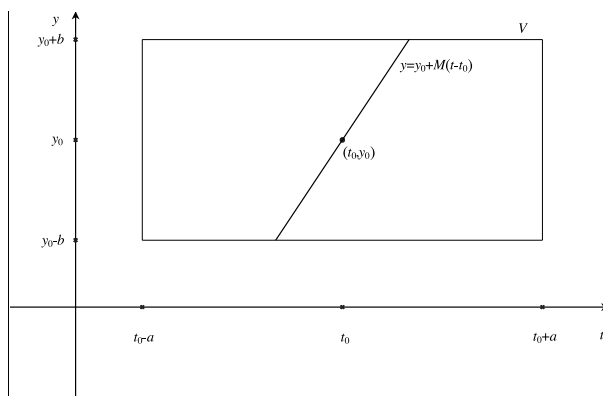
Potom existuje právě jedna funkce φ definovaná na intervalu $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$, která je na tomto intervalu řešením Cauchyovy úlohy (5.1), (5.2).

Poznámka 5.6. Ukažme, že interval $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ z právě uvedené věty obecně nelze rozšířit. Je-li $\alpha = a$, pak řešení naší úlohy je definováno na intervalu $(t_0 - a, t_0 + a)$ a nemůže být prodlouženo - grafem případného prodloužení bychom se dostali mimo „minimální“ definiční obor V funkce f („ve vodorovném směru“), jak je ukázáno na obrázku (5.1).



Obr. 5.1

Jestliže $\alpha = \frac{b}{M}$, pak řešením studované Cauchyovy s volbou $f(t, y) = M$, $(t, y) \in V$ je funkce $\varphi(t) = y_0 + M(t - t_0)$, přičemž toto řešení nemůže být prodlouženo - opět bychom se při prodlužování dostali ven z definičního oboru V funkce f (tentokrát ve „vertikálním směru“), jak ukazuje obrázek (5.2).



Obr. 5.2

Poznámka 5.7. Požadavku popsanému nerovností (5.3) se říká Lipschitzova podmínka (vzhledem ke druhé proměnné). Ukažme, že má-li spojitá funkce f na obdélníku V spojitou parciální derivaci podle druhé proměnné, splňuje Lipschitzovu podmínku (5.3). Protože podle předpokladu je $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitou funkcí na uzavřené a ohraničené množině, podle Weierstrassovy věty existuje číslo

$$L = \max_{(t,y) \in V} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right|.$$

Zvolme nyní libovolně dva body $(t, y) \in V$, $(t, z) \in V$. Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě musí existovat ξ ležící mezi y , z a takové, že platí

$$f(t, y) - f(t, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) \cdot (y - z).$$

Odtud již bezprostředně plyne dokazovaná nerovnost:

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq \max_{(t,y) \in V} \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \cdot |y - z| = L \cdot |y - z|.$$

Větu 5.3 o existenci a jednoznačnosti tedy lze v jistém smyslu považovat za důsledek Picardovy-Lindelöffovy věty.

Poznámka 5.8. Necht jsou splněny předpoklady Picardovy-Lindelöffovy věty. Vezměme libovolnou spojitou funkci φ_1 , jejíž graf leží v obdélníku V a která je definována na $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. Můžeme zvolit třeba konstantní funkci $\varphi_1(t) = y_0, t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. Lze ukázat, že pak je na $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ korektně definovaná následující posloupnost funkcí $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$:

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad \varphi_{j+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi_j(s)) \, ds. \quad (5.4)$$

Důkaz Picardovy-Lindelöffovy věty je založen na důkazu stejnoměrné konvergence posloupnosti (5.4) na $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$. Přesněji, dokáže se, že platí:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \forall t \in (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha): [n > n_0 \implies |\varphi(t) - \varphi_n(t)| < \epsilon],$$

kde funkce $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je na $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ řešením uvažované Cauchyovy úlohy.

Posloupnosti zadané pomocí (5.4) se říká posloupnost Picardových aproximací řešení φ Cauchyovy úlohy (5.1), (5.2).

Příklad 5.9. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y' = y, \quad (t, y) \in V = \langle -1, 1 \rangle \times \langle 0, 2 \rangle, \quad y(0) = 1.$$

Funkce $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(t, y) = y$ je zřejmě spojitá na V a položíme-li $L = 1$, ihned vidíme, že

$$\forall (t, y) \in V \quad \forall (t, z) \in V: |y - z| \leq L \cdot |y - z|,$$

takže můžeme konstatovat, že jsou splněny předpoklady Picardovy-Lindelöffovy věty. Protože

$$M = \max_{(t,y) \in V} |y| = 2,$$

tvrzení věty nám zaručuje, že zadaná úloha má na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ právě jedno řešení φ . Zvolíme-li $\varphi_1(t) = 1$, můžeme postupně určit členy příslušné Picardovy posloupnosti:

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t \varphi_1(s) \, ds = 1 + \int_0^t s \, ds = 1 + \frac{t^1}{1!},$$

$$\varphi_3(t) = 1 + \int_0^t \varphi_2(s) \, ds = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^1}{1!}\right) \, ds = 1 + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!},$$

$$\varphi_4(t) = 1 + \int_0^t \varphi_3(s) \, ds = 1 + \int_0^t \left(1 + \frac{s^1}{1!} + \frac{s^2}{2!}\right) \, ds = 1 + \frac{t^1}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!},$$

...

$$\varphi_{j+1}(t) = 1 + \int_0^t \varphi_j(s) \, ds = \dots = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^j}{j!},$$

...

Podle Picardovy-Lindelöffovy věty na $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ platí:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^j \frac{t^k}{k!} = \varphi(t).$$

Pozorný čtenář si již jistě všiml, že prvky právě sestrojené Picardovy posloupnosti jsou Maclaurinovými polynomy funkce e^t , která je jediným řešením zadané Cauchyovy úlohy. ▲

Poznámka 5.10. Výpočet Picardových aproximací můžeme chápat jako jednu z přibližných metod hledání řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Většinou je však výpočet potřebných integrálů velmi pracný a tak je význam této metody spíše teoretický.

Příklady k procvičení

- Nalezněte „maximální“ otevřené množiny, na které je třeba omezit definiční obor funkce f tak, aby Peanova věta garantovala existenci maximálního řešení Cauchyovy úlohy (5.1), (5.2), jestliže:

a) $f(t, y) = \frac{1}{t} - \arccos(y)$, $(t_0, y_0) = (1, \frac{1}{2})$,

b) $f(t, y) = \ln(t \cdot y^3)$, $(t_0, y_0) = (1, 1)$,

c) $f(t, y) = \sqrt{y \cdot \sin t}$, $(t_0, y_0) = (-\frac{\pi}{4}, 0)$.

- Nalezněte „maximální“ otevřené množiny, na které je třeba omezit definiční obor funkce f tak, aby Věta 5.3 garantovala existenci a jednoznačnost maximálního řešení Cauchyovy úlohy (5.1), (5.2), jestliže:

a) $f(t, y) = \frac{\arcsin t}{y^2 - 1}$, $(t_0, y_0) = (0, 0)$,

b) $f(t, y) = \cos(t - y) + \ln(t \cdot y)$, $(t_0, y_0) = (1, 1)$,

c) $f(t, y) = y^y$, $(t_0, y_0) = (1, 10)$.

- Zvolte $\varphi_1(t) = 1$ a vypočtěte první tři členy Picardovy posloupnosti Cauchyovy úlohy:

a) $y' = 5y + 1$, $y(0) = 1$,

b) $y' = e^t + y^2$, $y(0) = 0$.

- Ukažte, že funkce:

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, y) = t^3 - |y|$ splňuje Lipschitzovu podmínku na $\mathbb{R}^2$. Nalezněte nejmenší hodnotu Lipschitzovy konstanty L .

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0 \wedge y \in (-1, 1)\},$
b) $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \cdot y > 0\},$
c) $\emptyset.$
2. a) $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in (-1, 1) \wedge |y| \neq 1\},$
b) $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \cdot y > 0\},$
c) $\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.$
3. a) $\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = 1 + 6t, \quad \varphi_3(t) = 1 + 6t + 15t^2,$
b) $\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = e^t - 1, \quad \varphi_3(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - e^t + t + \frac{1}{2}.$
4. $L = 1.$

Kapitola 6

Geometrická interpretace ODR a nástin numerických metod

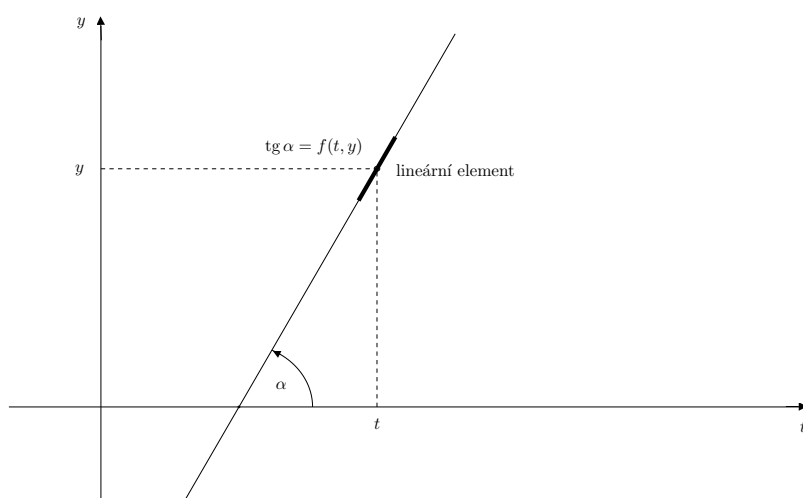
Směrová pole

Budiž dána funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Naznačme geometrickou interpretaci pojmu řešení diferenciální rovnice

$$y' = f(t, y). \quad (6.1)$$

Uvažujme nyní pouze body $(t, y) \in D_f$. Každému takovému bodu (t, y) můžeme přiřadit přímku procházející tímto bodem a mající směrnici $f(t, y)$.

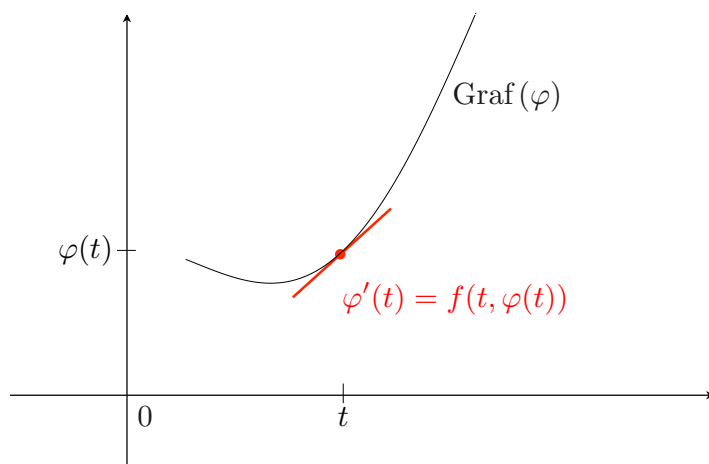
A



Obr. 6.1

Uvažovanou přímkou můžeme reprezentovat úsečkou (vhodně zvolené délky), která leží na přímce a střed má umístěn v bodě (t, y) . Této úsečce budeme třeba říkat *lineární element* (rovnice (6.1) v bodě (t, y)). Systém všech lineárních elementů nazýváme *směrovým polem* rovnice (6.1).

Buď nyní funkce φ řešením rovnice (6.1) definovaným na otevřeném intervalu J . Pak pro každý bod $(t, \varphi(t))$ grafu funkce φ platí $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. Lineární element příslušný bodu $(t, \varphi(t))$ tedy musí ležet na tečně ke grafu funkce φ v bodě $(t, \varphi(t))$.



Obr. 6.2

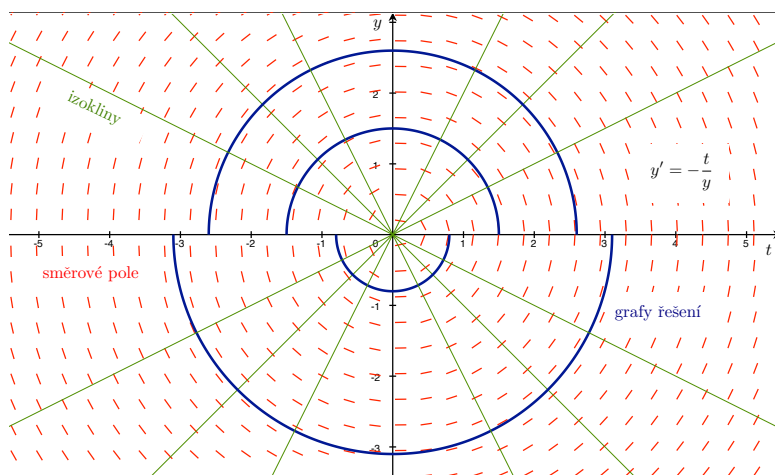
Znázorněním vhodně vybraných lineárních elementů v souřadnicové rovině tak můžeme získat dobrou představu o grafech řešení rovnice (6.1). Je-li $k \in \mathbb{R}$ konstanta, pak lineární elementy ležící na přímkách se směrnici k mají středy umístěné na vrstevnici funkce f o kótě k . Vrstevnice funkce f nazýváme *izokliny* diferenciální rovnice (6.1).

Příklad 6.1. Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{t}{y}. \quad (6.2)$$

Označíme-li $f(t, y) = -\frac{t}{y}$, pak $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a izoklinou rovnice (6.2) (odpovídající konstantě $k \in \mathbb{R}$) je dvojice „otevřených“ polopřímek zadaná rovnicí $f(t, y) = k$, tedy $t = -k \cdot y$, $y \neq 0$. Různým volbám konstanty k odpovídají izokliny znázorněné zeleně na obrázku (6.3).

Po zakreslení sítě lineárních elementů lze načrtnout grafy integrálních křivek. Hypotézu, že půjde o polokružnice lze ověřit (pilný čtenář ověří sám) dosazením funkcí ($C \in \mathbb{R}$ je konstanta) $\varphi_{1,2}(t) = \pm\sqrt{C^2 - t^2}$, $t \in (-|C|, |C|)$ do rovnice (6.2). ▲

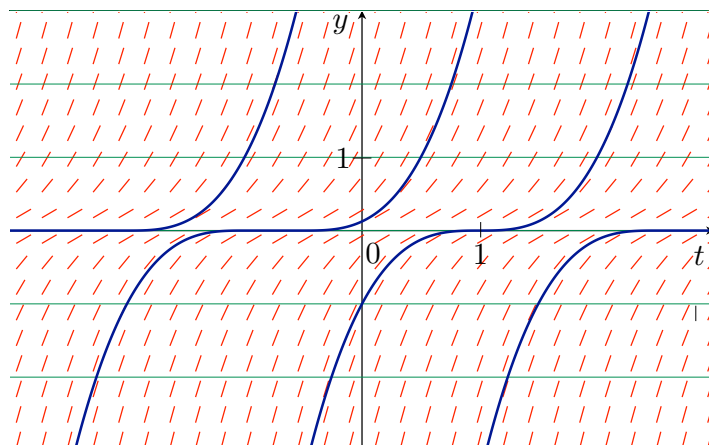


Obr. 6.3

Příklad 6.2. Načrtněte grafy řešení diferenciální rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}. \quad (6.3)$$

Izoklinami budou zřejmě rovnoběžky s osou t . Náčrtek (6.4) vede k hypotéze o rozdílných typech integrálních křivek rovnice (6.3).



Obr. 6.4



Poznámka 6.3. Existuje-li řešení (6.3), pak nutně musí jít o neklesající funkci. Pravá strana rovnice (6.3) je totiž nezáporná.

Poznámka 6.4. Řešení (6.3) - vizte Příklad 3.8.

Eulerova metoda

Zabývejme se nyní jednou z numerických metod pro přibližné řešení diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou – *Eulerovou metodou*. O funkci f budeme předpokládat, že je v množině $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t\}$ spojitá a že je v D spojitá i derivace této funkce podle proměnné y .

Eulerova metoda je nejjednodušší způsob numerického řešení Cauchyových úloh. Výstup Eulerovy metody je aproximací řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (6.4)$$

na intervalu $\langle t_0, t_N \rangle$. Metoda využívá aproximace derivace¹ funkce y v bodě t pomocí tzv. *diference* y v tomto bodě

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

kde h je dostatečně „malé“ ($0 < h \ll 1$).

Použijeme-li diferenci k aproximaci $y'(t)$ v rovnici úlohy (6.4), dostáváme vztah

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)). \quad (6.5)$$

Dále zvolme „dostatečně malé“ $h > 0$ a sestrojme body

$$t_0, t_1 := t_0 + h, t_2 := t_0 + 2h, \dots, t_N := t_0 + Nh.$$

Označme pomocí y_n aproximaci hodnoty přesného řešení $y(t_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$. Z (6.5) a počáteční podmínky pak dostaneme rekurentní vztah

$$\begin{cases} y_0 = y(t_0), \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \end{cases}$$

který použijeme pro numerické řešení Cauchyovy úlohy (6.4). Lze ukázat, že chyba aproximace řešení pomocí Eulerovy metody v bodě t_1 je přímo úměrná druhé mocnině velikosti kroku h . Chyba aproximace řešení v bodě t_N je přímo úměrná velikosti h .

¹Tuto aproximaci lze získat z Taylorova polynomu 1. řádu funkce y se středem v bodě t :

$$y(t+h) \approx y(t) + y'(t) \cdot h.$$

Kapitola 7

Bernoulliova diferenciální rovnice

Nechť jsou zadány spojité reálné funkce p, q definované na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Budiž dáno číslo $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Potom diferenciální rovnici

$$y' + p(t)y = q(t)y^s \quad (7.1)$$

budeme říkat Bernoulliova diferenciální rovnice.

Poznámka 7.1. • Všimněme si, že je-li $s = 0$ nebo $s = 1$, rovnice $y' + p(t)y = q(t)y^s$ přechází v lineární diferenciální rovnici.

- Jestliže $s \in \mathbb{N}$, pak má diferenciální rovnice (7.1) nulové řešení na I .

Ukažme si nyní, jak lze Bernoulliovu rovnici (7.1) převést na lineární diferenciální rovnici 1. řádu. Přenásobením (7.1) výrazem y^{-s} získáváme rovnici

$$y^{-s}y' + p(t)y^{1-s} = q(t). \quad (7.2)$$

Po substituci

$$z = y^{1-s}$$

a formálním výpočtu derivace

$$z' = (1-s)y^{-s}y'$$

jsme připraveni dosadit do (7.2):

$$\frac{1}{1-s}z' + p(t)z = q(t).$$

Odtud

$$z' + (1-s)p(t)z = (1-s)q(t), \quad (7.3)$$

přičemž poslední rovnice zřejmě představuje lineární diferenciální rovnici 1. řádu

$$z' + a(t)z = b(t),$$

s volbou

$$a(t) = (1-s)p(t), \quad b(t) = (1-s)q(t).$$

K pochopení smyslu jednotlivých formálních kroků, které jsme právě popsali, doporučujeme pečlivě prostudovat důkaz následujícího tvrzení.

Věta 7.2. [O transformaci Bernoulliovy diferenciální rovnice] *Nechť funkce u je řešením diferenciální rovnice (7.1) na intervalu $J \subset I$. Nechť navíc platí:*

$$\forall t \in J : \quad u(t) \neq 0. \quad (7.4)$$

Potom funkce v definovaná předpisem

$$v(t) = u^{1-s}(t)$$

je řešením lineární diferenciální rovnice (7.3) na J .

Důkaz. Nechť funkce u je na J řešením Bernoulliovy rovnice (7.1). Pak na J platí rovnost

$$u'(t) + p(t)u(t) = q(t)u^s(t).$$

Není příliš obtížné si rozmyslet, že v důsledku (7.4) jsou na J dobře definovány mocniny u^{-s} , u^{1-s} , takže předchozí rovnost můžeme na J ekvivalentně upravit do tvaru

$$(1-s)u^{-s}(t)u'(t) + (1-s)p(t)u^{1-s}(t) = (1-s)q(t). \quad (7.5)$$

Funkce v definovaná na J předpisem

$$v(t) = u^{1-s}(t)$$

je zřejmě diferencovatelná a na J platí

$$v'(t) = (1-s)u^{-s}(t)u'(t).$$

Rovnost (7.5) tedy může být psána ve tvaru

$$\forall t \in J : \quad v'(t) + (1-s)p(t)v(t) = (1-s)q(t).$$

Poslední vztah ovšem znamená, že funkce v je na J řešením rovnice (7.3), čímž je důkaz u konce. $\square$

Obecné studium Bernoulliovy rovnice zakončíme jistým obrácením předchozího tvrzení.

Věta 7.3. [O zpětné transformaci] Budiž dána Bernoulliho rovnice (7.1) a řešení v odpovídající lineární diferenciální rovnice (7.3) na J . Předpokládejme, že na J je definována diferencovatelná funkce u , která splňuje následující podmínky:

$$\forall t \in J : \quad u(t) \neq 0, \quad (7.6)$$

$$\forall t \in J : \quad u^{1-s}(t) = v(t). \quad (7.7)$$

Potom funkce u představuje řešení Bernoulliho rovnice (7.1) na J .

Poznámka 7.4. Ještě před provedením důkazu si všimněme, že diferencovatelná funkce u na J nemusí být pro některé hodnoty s vztahy (7.6), (7.7) určena jednoznačně.

Důkaz. Z předpokladů věty plyne, že na J platí rovnost

$$v'(t) + (1-s)p(t)v(t) = (1-s)q(t) \quad (7.8)$$

a na J jsou definovány diferencovatelné funkce u^{1-s} , u^{-s} , u^s .

Ze vztahu (7.7) plyne

$$\forall t \in J : \quad v'(t) = (1-s)u^{-s}(t)u'(t),$$

což po dosazení do předchozí rovnosti (7.8) znamená, že na J platí

$$(1-s)u^{-s}(t)u'(t) + (1-s)p(t)u^{1-s}(t) = (1-s)q(t),$$

tedy

$$u^{-s}(t)u'(t) + p(t)u^{1-s}(t) = q(t).$$

Poslední rovnost přenásobíme funkcí u^s :

$$\forall t \in J : \quad u'(t) + p(t)u(t) = q(t)u^s(t).$$

To ovšem znamená, že u je na J řešením (7.1) a s důkazem jsme hotovi. $\square$

Příklad 7.5. Hledáme-li všechna kladná řešení diferenciální rovnice

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, \quad (7.9)$$

můžeme psát

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}},$$

což je Bernoulliho diferenciální rovnice s volbou $I = \mathbb{R}$, $p(t) = 0$, $q(t) = 3$, $s = \frac{2}{3}$. Postupujeme formálně. Po přenásobení platí

$$y^{-\frac{2}{3}}y' = 3,$$

takže

$$\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y' = 1.$$

Substituce $z = y^{1-\frac{2}{3}} = y^{\frac{1}{3}}$ vede postupně k $z' = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y'$, takže získáváme diferenciální rovnici

$$z' = 1.$$

Odtud $z(t) = t + C$, $C \in \mathbb{R}$, takže $y^{\frac{1}{3}}(t) = t + C$, odkud $y(t) = (t + C)^3$. Přenecháme čtenáři, aby si podrobně rozmyslel, že vzhledem k výše uvedeným tvrzením je náš postup ospravedlnitelný pouze pro kladná řešení, tedy

$$y(t) = (t + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}, \quad t \in (-C, \infty).$$

Pomocí vhodného převodu na Bernoulliovu rovnici lze zřejmě také hledat záporná řešení (7.9). Laskavý čtenář si rozmyslí, že po substituci

$$Y = -y, \quad Y' = -y',$$

lze upravit (7.9) na rovnici

$$Y' = -3Y^{\frac{2}{3}},$$

u které hledáme pouze kladná řešení a posléze provedeme zpětnou substituci. Jednodušší je ovšem zkouškou přímo prověřit, že řešením (7.9) na $\mathbb{R}$ je každá funkce tvaru

$$y(t) = (t + C)^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Na závěr příkladu si ještě vzpomeňme, že s rovnicí (7.9) jsme se již setkali dříve (v kapitole 3) a také se setkáme na několika místech dále v textu (v kapitole 8 a dále opět v kapitole 8), přičemž je popsáno, jak lze pomocí techniky slepování nalézt všechna její maximální řešení.

▲

Příklad 7.6. Určeme maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$y' - \frac{1}{t}y = t\frac{1}{y}, \tag{7.10}$$

$$y(-1) = -2. \tag{7.11}$$

Vzhledem k počáteční podmínce uvažujeme rovnici (7.10) pouze pro $t \in I = (-\infty, 0)$, kde jde o Bernoulliovu rovnici s volbami

$$s = -1, \quad \forall t \in I: \quad p(t) = -\frac{1}{t}, \quad q(t) = t.$$

Vzhledem k pravé straně rovnice (7.10) nás zajímají jen taková řešení uvedené rovnice, která nabývají pouze záporných hodnot. Po přenásobení nejprve získáváme rovnici

$$yy' - \frac{1}{t}y^2 = t, \quad t < 0, \quad y < 0.$$

Po substituci $z = y^2$, $z' = 2yy'$ můžeme poslední rovnici převést v lineární diferenciální rovnici tvaru

$$z' - \frac{2}{t}z = 2t, \quad t < 0. \quad (7.12)$$

Přenechejme čtenáři podrobné vyřešení poslední rovnice. Tak zjistí, že její řešení lze zapsat ve tvaru

$$z(t) = Ct^2 + 2t^2 \ln(-t), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky (7.11) plyne $z(-1) = y^2(-1) = 4$, odkud ihned $C = 4$ a získáváme tak vhodné partikulární řešení rovnice (7.12):

$$\psi(t) = 4t^2 + 2t^2 \ln(-t).$$

Z podmínek $\varphi^2 = \psi \wedge \varphi < 0$, pak získáváme předpis pro maximální řešení φ zadané Cauchyovy úlohy:

$$\varphi(t) = -\sqrt{4t^2 + 2t^2 \ln(-t)}, \quad t \in (-\infty, -e^{-2}).$$

▲

Kapitola 8

Exaktní diferenciální rovnice

Nechť funkce $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou definovány na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. V této části textu se budeme zabývat diferenciální rovnicí prvního řádu ve tvaru

$$M(t, y) + N(t, y) \cdot y' = 0. \quad (8.1)$$

Pro zadaný bod $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ budeme spolu s rovnicí (8.1) uvažovat ještě počáteční podmínku

$$y(t_0) = y_0. \quad (8.2)$$

Rovnici (8.1) nazveme exaktní, jestliže existuje taková diferencovatelná funkce $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na Ω , že pro všechny body $(t, y) \in \Omega$ platí:

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = N(t, y). \quad (8.3)$$

Funkci V pak nazýváme potenciálem uspořádané dvojice funkcí (M, N) na Ω .

Poznámka 8.1. Pro potenciál V dvojice (M, N) tedy musí platit:

$$\text{grad } V = (M, N).$$

V literatuře se někdy místo pojmu potenciál dvojice (M, N) používá název kmenová funkce rovnice (8.1).

Poznámka 8.2. Ve fyzice hodnota potenciálu $V(t, y)$ v bodě (t, y) obvykle odpovídá potenciální energii v daném místě. Hodnota $\text{grad } V(t, y)$ pak udává směr největšího vzrůstu této energie, uvedený gradient proto popisuje hodnotu intenzit sil potenciálního vektorového pole. V elektrostati se například funkcí V reprezentuje plošný elektrostatičtý potenciál, vektorová funkce $\text{grad } V = (M, N)$ je pak polem elektrických intenzit.

Příklad 8.3. Prozkoumejme rovnici

$$2t\sqrt{y} + 1 + \frac{t^2 + 1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0. \quad (8.4)$$

Řešení. Zvolíme-li dvojici funkcí (M, N) definovanou na $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ předpis

$$M(t, y) = 2t\sqrt{y} + 1, \quad N(t, y) = \frac{t^2 + 1}{2\sqrt{y}},$$

ihned vidíme, že zadaná rovnice je konkrétním případem (8.1). Pokusme se ukázat, že daná rovnice je exaktní. Předpokládejme tedy, že existuje diferencovatelná funkce $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou na Ω platí rovnosti

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = 2t\sqrt{y} + 1, \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = \frac{t^2 + 1}{2\sqrt{y}}. \quad (8.6)$$

Integrací rovnosti (8.5) podle proměnné t na $\mathbb{R}$ zjišťujeme, že pak musí existovat diferencovatelná funkce χ , definovaná na $\mathbb{R}^+$ a taková,¹ že na Ω platí:

$$V(t, y) = t^2\sqrt{y} + t + \chi(y).$$

Využijeme-li nyní rovnosti (8.6), musí na Ω platit

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = \frac{t^2}{2\sqrt{y}} + \chi'(y) = \frac{t^2 + 1}{2\sqrt{y}},$$

takže na $\mathbb{R}^+$ musí platit rovnost

$$\chi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Odtud integrací zjistíme, že funkce χ musí na $\mathbb{R}^+$ splňovat vztah

$$\chi(y) = \sqrt{y} + C,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je nějaké číslo.

Shrňme naše úvahy. Z předpokladu existence potenciálu V jsme zjistili, že tento potenciál musí být funkce vyhovující na Ω vztahu

$$V(t, y) = t^2\sqrt{y} + t + \sqrt{y} + C, \quad (8.7)$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, na kterou podmínky (8.5), (8.6) nekladly žádná omezení. Pokud se tedy hlouběji zamyslíme nad způsobem, kterým jsme získali vztah (8.7), zjistíme, že pro libovolnou pevně zvolenou hodnotu $C \in \mathbb{R}$ je funkce V zadaná předpisem (8.7) potenciálem dvojice (M, N) , takže (8.4) je exaktní diferenciální rovnici. ▲

¹Přesněji vzato, χ je takovou funkcí definovanou na Ω , která je konstantní vzhledem k první proměnné t .

Poznámka 8.4. (O exaktnosti separovatelných rovnic) Uvažujme separovatelnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$h(t) + g(y) \cdot y' = 0, \quad (8.8)$$

kde h, g jsou spojité funkce definované na otevřených intervalech $I \subset \mathbb{R}$, respektive $J \subset \mathbb{R}$. Na otevřeném obdélníku $I \times J$ definujme funkci $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ vztahem

$$V(t, y) = \int h(t) \, dt + \int g(y) \, dy.$$

Potom V je diferencovatelná a na $I \times J$ zřejmě platí

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = h(t), \quad \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = g(y),$$

takže separovatelnou rovnici (8.8) lze považovat za exaktní diferenciální rovnici.

Příklad 8.5. Rovnici se separovanými proměnnými

$$e^y \cdot y' = -\cos t,$$

můžeme ekvivalentně zapsat ve tvaru

$$\cos t + e^y \cdot y' = 0,$$

a považovat za exaktní rovnici s potenciálem

$$V(t, y) = \sin t + e^y.$$

▲

Poznámka 8.6. (O vrstevnicích potenciálu a řešeních exaktní rovnice) Nechť V je potenciálem dvojice funkcí (M, N) na Ω . Nechť $(t_0, y_0) \in \Omega$. Předpokládejme, že existuje taková funkce $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$, že $\varphi(t_0) = y_0$ a na J platí:

$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0). \quad (8.9)$$

Graf funkce φ tedy tvoří část vrstevnice funkce V o kótě $V(t_0, y_0)$. Nechť funkce φ je navíc diferencovatelná. Pokusme se (podle proměnné t) derivovat obě strany rovnosti (8.9). Na pravé straně derivujeme konstantní funkci, takže získáme funkci nulovou na J . Při derivování levé strany vztahu zřejmě můžeme použít pravidlo pro derivaci složené funkce více proměnných (vnější funkce V je funkcí dvou reálných proměnných). Na J tak získáváme rovnost

$$\frac{\partial V(t, \varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \varphi(t))}{\partial y} \cdot \varphi'(t) = 0.$$

Použijeme-li nyní na levé straně vztahy (8.3):

$$\frac{\partial V(t, y)}{\partial t} = M(t, y), \quad \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} = N(t, y),$$

vidíme, že na J musí platit:

$$M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0.$$

To ovšem znamená, že funkce φ je na J řešením Cauchyovy úlohy (8.1), (8.2).

Právě jsme si ukázali, že je rozumné pátrat po řešeních exaktní rovnice mezi vrstevnicemi kmenové funkce této rovnice. Ve fyzikální terminologii lze také volně říci, že řešení exaktní rovnice hledáme mezi ekvipotenciálními křivkami pole intenzit. Pro doplnění a zpřesnění dosud provedených pozorování formulujme následující tvrzení:

Věta 8.7 (O řešeních exaktní rovnice). *Nechť M, N jsou spojité funkce definované na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Bud' $(t_0, y_0) \in \Omega$. Nechť (8.1) je exaktní diferenciální rovnici s kmenovou funkcí V . Potom platí:*

- 1) *Nechť φ je libovolná diferencovatelná funkce definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ a taková, že $\varphi(t_0) = y_0$. Pak φ je řešením Cauchyovy úlohy (8.1), (8.2) na J právě tehdy, když na J platí*

$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0).$$

- 2) *Předpokládejme navíc, že pro všechna $(t, y) \in \Omega$ platí:*

$$N(t, y) \neq 0. \tag{8.10}$$

Potom Cauchyova úloha (8.1), (8.2) má právě jedno maximální řešení.



Důkaz. I. Budiž φ libovolná diferencovatelná funkce definovaná na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ a taková, že $\varphi(t_0) = y_0$. Na intervalu J zřejmě platí

$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0),$$

$$\Updownarrow$$

$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, \varphi(t_0)),$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial V(t, \varphi(t))}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \varphi(t))}{\partial y} \cdot \varphi'(t) = 0,$$

$$\Updownarrow$$

$$M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0,$$

čímž jsme hotovi s důkazem první části.

II.

A.

Nejprve dokážeme existenci řešení zkoumané Cauchyovy úlohy.

Na Ω definujeme funkci G předpisem

$$G(t, y) = V(t, y) - V(t_0, y_0).$$

Z předpokladů věty plyne, že funkce G má na Ω spojitě první derivace,

$$G(t_0, y_0) = 0$$

a

$$\frac{\partial G(t_0, y_0)}{\partial y} = N(t_0, y_0) \neq 0.$$

Podle věty o implicitně zadané funkci tedy existuje otevřený interval J a právě jedna spojitě diferencovatelná funkce φ , která je definovaná na J a taková, že na J platí:

$$G(t, \varphi(t)) = 0 \quad \wedge \quad \varphi(t_0) = y_0.$$

To ovšem znamená, že na J platí

$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0),$$

takže podle první, již dokázané části Věty, je φ řešením (8.1), (8.2) na J .

B.

Nyní dokážeme, že je-li φ_1 řešením (8.1), (8.2) na intervalu I_1 a φ_2 řešením (8.1), (8.2) na I_2 , potom na $I_1 \cap I_2$ obě řešení splývají. Princip důkazu této části spočívá v důkazu nemožnosti existence bodu $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$, ve kterém by docházelo k větvení řešení.

Nejprve si všimněme, že $t_0 \in I_1 \cap I_2$, takže uvažovaný průnik je neprázdným otevřeným intervalem. Předpokládejme, kvůli sporu, že existuje $t^* \in I_1 \cap I_2$ takové, že $\varphi_1(t^*) \neq \varphi_2(t^*)$. Nechť $t^* < t_0$ (v případě $t^* > t_0$ se postupuje podobně). Označíme-li

$$\bar{t} = \sup \{t \in I_1 \cap I_2 : t < t_0 \wedge \varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)\},$$

musí platit $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$, $\bar{t} \leq t_0$. Je-li $\bar{t} = t_0$, zřejmě platí $\varphi_1(\bar{t}) = \varphi_2(\bar{t})$. Nechť $\bar{t} < t_0$. To ovšem znamená, že na $(\bar{t}, t_0)$ platí $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Ze spojitosti funkcí φ_1, φ_2 pak plyne:

$$\varphi_1(\bar{t}) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}^+} \varphi_1(t) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}^+} \varphi_2(t) = \varphi_2(\bar{t}).$$

Označme $\bar{y} = \varphi_1(\bar{t})$ a zdůrazněme, že jsme dokázali, že také platí $\bar{y} = \varphi_2(\bar{t})$. Definujme funkci G předpisem

$$G(t, y) = V(t, y) - V(\bar{t}, \bar{y}).$$

Funkce G má podle předpokladů věty na Ω spojitě první derivace,

$$G(\bar{t}, \bar{y}) = 0,$$

a

$$\frac{\partial G(\bar{t}, \bar{y})}{\partial y} = N(\bar{t}, \bar{y}) \neq 0.$$

Podle věty o implicitně definované funkci tedy existuje otevřený interval K a právě jedna spojitě diferencovatelná funkce ψ definovaná na K a taková, že na K platí:

$$G(t, \psi(t)) = 0 \wedge \psi(\bar{t}) = \bar{y},$$

což znamená:

$$\forall t \in K : V(t, \psi(t)) = V(\bar{t}, \bar{y}) \wedge \psi(\bar{t}) = \bar{y}.$$

Protože funkce φ_1, φ_2 lze chápat jako řešení Cauchyovy úlohy (8.1), $y(\bar{t}) = \bar{y}$, podle první části Věty platí

$$\forall t \in I_1 : V(t, \varphi_1(t)) = V(\bar{t}, \bar{y}) \wedge \varphi_1(\bar{t}) = \bar{y},$$

$$\forall t \in I_2 : V(t, \varphi_2(t)) = V(\bar{t}, \bar{y}) \wedge \varphi_2(\bar{t}) = \bar{y}.$$

Funkce ψ je ovšem na K zadána jednoznačně, takže na $K \cap I_1 \cap I_2$ musí platit

$$\varphi_1(t) = \psi(t) = \varphi_2(t),$$

což je spor s definicí $\bar{t}$. Z vlastností suprema totiž plyne, že v otevřeném intervalu $K \cap I_1 \cap I_2$ musí ležet alespoň jeden bod, ve kterém se hodnoty funkcí φ_1, φ_2 liší.

C.

Nyní zbývá jen popsat konstrukci maximálního řešení uvažované Cauchyovy úlohy. Vezměme sjednocení

$$I = \bigcup_{\tau \in \Theta} I_\tau$$

všech otevřených intervalů I_τ , na kterých jsou definována řešení φ_τ Cauchyovy úlohy (8.1), (8.2). Protože existuje alespoň jedno řešení uvedené úlohy a pro každé $\tau \in \Theta$ platí $t_0 \in I_\tau$, I je zřejmě neprázdným a otevřeným intervalem. Je-li $t \in I$, znamená to, že pro nějaké $\tau \in \Theta$ je $t \in I_\tau$, a proto můžeme (vzhledem k jednoznačnosti dokázané v části II.B) definovat právě jednu hodnotu

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi_\tau(t).$$

Tak jsme na I definovali funkci $\tilde{\varphi}$, která je zřejmě řešením zadané Cauchyovy úlohy. Z definice I je zřejmé, že $\tilde{\varphi}$ nelze prodloužit, takže jde o maximální řešení. Jednoznačnost tohoto maximálního řešení pak opět snadno plyne z tvrzení dokázaného v části II.B důkazu Věty. $\square$

Příklad 8.8. Nalezněme maximální řešení Cauchyovy úlohy

$$2t\sqrt{y} + 1 + \frac{t^2 + 1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0, \quad y(0) = 1.$$

Řešení. V Příkladu 8.3 jsme zjistili, že uvedená rovnice je exaktní a jejím potenciálem je například funkce V zadaná na $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ předpisem

$$V(t, y) = t^2 \sqrt{y} + t + \sqrt{y}.$$

Protože pro každé $(t, y) \in \Omega$ platí

$$\frac{t^2 + 1}{2\sqrt{y}} \neq 0,$$

existuje právě jedno maximální řešení φ zadané Cauchyovy úlohy. Hledejme tedy „maximální“ otevřený interval I a diferencovatelnou funkci φ definovanou na I tak, aby na I platilo:

$$\varphi(0) = 1 \wedge \varphi(t) \in \mathbb{R}^+ \wedge t^2 \sqrt{\varphi(t)} + t + \sqrt{\varphi(t)} = 1.$$

Po drobných úpravách a přihlédnutí ke všem uvedeným podmínkám zjišťujeme, že musí platit

$$\varphi(t) = \left(\frac{1-t}{t^2+1} \right)^2, \quad t \in I = (-\infty, 1),$$

což je předpis pro maximální řešení uvažované Cauchyovy úlohy. ▲

Poznámka 8.9. Z prvního tvrzení Věty 8.7 plyne, že všechna řešení exaktní rovnice s potenciálem V lze popsat požadavkem

$$V(t, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Například všechna řešení exaktní rovnice z předchozího příkladu jsou zahrnuta ve vztahu

$$t^2 \sqrt{y} + t + \sqrt{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z právě uvedeného vzorce jsme schopni najít explicitní vyjádření předpisu pro řešení:

$$y(t) = \left(\frac{C-t}{t^2+1} \right)^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

V řadě případů je však nalezení explicitního vyjádření příslušného předpisu obtížné nebo dokonce nemožné. Obvykle se pak spokojíme s dílčím úspěchem a po nalezení potenciálu V řešení zadaného příkladu ukončíme zápisem

$$V(t, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Podobně budeme postupovat i při zkoumání Cauchyových úloh pro exaktní rovnice. Jsou-li na Ω nenulové všechny hodnoty $N(t, y)$, pak maximální řešení φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) příslušné Cauchyovy úlohy je jednoznačně určeno podmínkou

$$y(t_0) = y_0$$

a implicitním vztahem

$$V(t, y) = V(t_0, y_0).$$

Zápis uvedených podmínek budeme považovat za úspěšné splnění úkolu v případě, kdy nebude možné jednoduše vyjádřit explicitní předpis pro φ .

Nakonec se ještě domluvíme, že pokud v zadání nebude výslovně uveden požadavek nalezení maximálního řešení Cauchyovy úlohy, bude stačit vymezení libovolného řešení této úlohy. V takovém případě je vhodné si rozmyslet, že k zajištění existence (a lokální jednoznačnosti) řešení Cauchyovy úlohy stačí spojitost funkcí M , N na nějakém okolí bodu (t_0, y_0) a splnění požadavku $N(t_0, y_0) \neq 0$, který v důsledku spojitosti N zaručuje, že hodnoty $N(t, y)$ budou nenulové na nějakém okolí bodu (t_0, y_0) . Potom totiž stačí aplikovat Větu 8.7, kde Ω zvolíme jako takové okolí bodu (t_0, y_0) , na kterém jsou spojitě obě funkce M , N a současně jsou v něm nenulové všechny hodnoty $N(t, y)$.

V následujících příkladech uveďme ukázky stručného zápisu řešení některých rovnic a Cauchyových úloh.

Příklad 8.10. Řešte diferenciální rovnici

$$e^y + (te^y - 2y)y' = 0.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} &= e^y \Rightarrow V(t, y) = te^y + \chi(y) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial V(t, y)}{\partial y} &= te^y + \chi'(y) \Rightarrow te^y + \chi'(y) = te^y - 2y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \chi'(y) = -2y. \end{aligned}$$

Odtud například

$$\chi(y) = -y^2,$$

takže zadaná rovnice je exaktní rovnicí s potenciálem

$$\underline{V(t, y) = te^y - y^2}.$$

Řešení zadané rovnice splňují podmínky:

$$\underline{\underline{te^y - y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.}}$$

▲

Příklad 8.11. Řešte Cauchyovu úlohu

$$2t^3 - ty^2 + (2y^3 - t^2y)y' = 0, \quad y(0) = 1.$$

Řešení.

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(t, y)}{\partial y} &= 2y^3 - t^2y \Rightarrow V(t, y) = \frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{2}t^2y^2 + \psi(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial V(t, y)}{\partial t} &= -ty^2 + \psi'(t) \Rightarrow -ty^2 + \psi'(t) = 2t^3 - t^2y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi'(t) = 2t^3.\end{aligned}$$

Odtud například

$$\psi(t) = \frac{1}{2}t^4,$$

takže zadaná rovnice je exaktní rovnicí s potenciálem

$$\underline{V(t, y) = \frac{1}{2}(y^4 - t^2y^2 + t^4)}.$$

Řešení zadané rovnice splňují podmínky:

$$\underline{y^4 - t^2y^2 + t^4 = C, \quad C \in \mathbb{R}}.$$

Protože funkce

$$M(t, y) = 2t^3 - ty^2, \quad N(t, y) = 2y^3 - t^2y$$

jsou spojité a

$$N(0, 1) = 2 \neq 0,$$

existuje otevřený interval J a jediná funkce φ definovaná na J , která je na tomto intervalu řešením zadané Cauchyovy úlohy. Funkce φ (o rovnici $y = \varphi(t)$) je dána implicitně vztahem

$$\underline{\underline{y^4 - t^2y^2 + t^4 = 4}}$$

a podmínkou

$$\underline{\underline{y(0) = 1}}.$$

▲

Jak jsme měli možnost vidět, existence a vlastnosti potenciálu hrají podstatnou roli při studiu rovnic tvaru (8.1). Věnujme se proto této problematice podrobněji.

Nejprve si všimněme, že jednorozměrnou analogií potenciálu je vlastně neurčitý integrál. Pro libovolné primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu J platí, že se liší nejvýše o aditivní (integrační) konstantu. Podobné tvrzení lze vyslovit i o potenciálu dvojice (M, N) . Přitom se však ukazuje, že je třeba úžeji specifikovat množinu Ω na níž potenciály zkoumáme. To vede k následující definici:

Neprázdnou množinu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme souvislou, jestliže neexistuje dvojice otevřených množin $G_1 \subset \mathbb{R}^n$, $G_2 \subset \mathbb{R}^n$ taková, že současně platí:

$$\begin{aligned}\Omega &\subset G_1 \cup G_2, & G_1 \cap G_2 &= \emptyset, \\ \Omega \cap G_1 &\neq \emptyset, & \Omega \cap G_2 &\neq \emptyset.\end{aligned}$$

Otevřeným a souvislým množinám $\mathbb{R}^n$ říkáme oblasti.

Poznámka 8.12. Pro lepší interpretaci pojmu oblast si uveďme, že lze ukázat: Neprázdná množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je oblastí, právě když je otevřenou množinou a každé dva body z Ω lze spojit lomenou čarou, která celá leží v Ω . Například oblastí v $\mathbb{R}$ je každý otevřený interval v $\mathbb{R}$.

Poznámka 8.13. (O všech potenciálech) Lze dokázat, že platí: Necht dvojice (M, N) má na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ potenciál V . Pak se všechny potenciály dvojice (M, N) na Ω liší nejvýše o aditivní konstantu. Jinak zapsáno, množina

$$\{W \in C(\Omega) : \exists C \in \mathbb{R} \forall (t, y) \in \Omega : W(t, y) = V(t, y) + C\}$$

představuje všechny potenciály dvojice (M, N) na oblasti Ω .

Nyní formulujme jednoduché pravidlo, podle kterého snadno usoudíme, že rovnice (8.1) není exaktní.

Věta 8.14 (O nutné podmínce exaktnosti). *Necht funkce M, N definované na otevřené množině Ω mají spojitě parciální derivace. Necht rovnice (8.1) je exaktní. Pak platí:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Důkaz. Uvažovaná rovnice je exaktní, takže pro příslušný potenciál V platí:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = M, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = N.$$

Při splnění předpokladů věty má potenciál V dvojice (M, N) na Ω spojitě všechny parciální derivace až do druhého řádu. Podle pravidla o záměnnosti smíšených parciálních derivací platí:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t},$$

odkud ihned plyne:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

□

Příklad 8.15. Rovnice

$$t \sin y + y' \cdot \cos y = 0$$

není exaktní. Skutečně, definujeme-li

$$M(t, y) = t \sin y, \quad N(t, y) = \cos y,$$

pak

$$\frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = t \cos y, \quad \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} = -\sin y,$$

takže

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Všimněme si ještě, že v tomto případě by nám zřejmě nepomohlo, ani kdybychom uvažovali zadanou rovnici na menší otevřené množině než je $\mathbb{R}^2$.

▲

Poznámka 8.16. Neklademe-li na oblast Ω další podmínky, pak rovnost $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ na Ω obecně nestačí k zajištění existence potenciálu. Situace se však změní, je-li Ω speciálním typem oblasti, tzv. jednoduše souvislou oblastí. Přesnou definici pojmu jednoduše souvislá oblast přenechme vyšším partiím matematické analýzy a na tomto místě se spokojme s intuitivním popisem. Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá, nemá-li „díry“. Například otevřený kruh

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 4\}$$

je jednoduše souvislou oblastí, zatímco otevřené mezikruží

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 > 1 \wedge t^2 + y^2 < 4\}$$

je oblastí, která není jednoduše souvislá. Jednoduše souvislou oblastí není ani žádné prstencové okolí libovolného bodu, například množina

$$\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 4\} \setminus \{(0, 0)\}.$$

Důležitými příklady jednoduše souvislých oblastí jsou následující množiny: libovolný otevřený kruh (okolí bodu), libovolný otevřený obdélník, celá rovina $\mathbb{R}^2$. Pro čtenáře blíže seznámené s pojmem křivky můžeme ještě uvést přesnější specifikaci pojmu jednoduše souvislá oblast: Oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je jednoduše souvislá, právě když lze každou jednoduchou uzavřenou křivku ležící v Ω spojitě stáhnout (v Ω) do bodu.

Věta 8.17 (O postačující podmínce existence potenciálu). *Nechť funkce $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ jsou definovány na jednoduše souvislé oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a mají zde spojitě parciální derivace. Nechť platí:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Potom existuje potenciál dvojice (M, N) na Ω .

Příklad 8.18. Rovnice

$$e^t + e^y \cdot y' = 0$$

je exaktní diferenciální rovnicí, protože na jednoduše souvislé oblasti $\mathbb{R}^2$ platí:

$$\frac{\partial (e^t)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial (e^y)}{\partial t}.$$

▲

Poznámka 8.19. Při hledání řešení rovnice (8.1) zpravidla nejprve zjišťujeme, zda se vůbec jedná o exaktní rovnici, to znamená, zda je zajištěna existence potenciálu. V takovém případě začneme s ověřováním rovnosti $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$. To někdy vede k tomu, že se omezíme na vhodnou jednoduše souvislou oblast Ω , která se nemusí krýt s původně daným „oborem rovnice“. Dalším důvodem pro zúžení oboru rovnice bývá zajištění splnění požadavku $N(t, y) \neq 0$ garantujícího existenci a jednoznačnost. Poté začneme s výpočtem potenciálu. Na konkrétních příkladech uvedených výše, jsme si již ukázali, jak jej lze nalézt. Jako malé opakování ještě shrňme poněkud systematictěji uvedený postup.

Nechť na oblasti Ω jsou definovány spojité funkce M, N . Označme

$$m(t, y) = \int M(t, y) dt, \quad (t, y) \in \Omega,$$

$$n(t, y) = \int N(t, y) dy, \quad (t, y) \in \Omega.$$

Existuje-li potenciál V dvojice (M, N) na Ω , pak existují funkce $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které jsou diferencovatelné a takové, že současně platí

$$V(t, y) = m(t, y) + \chi(y), \quad (t, y) \in \Omega, \quad (8.11)$$

$$V(t, y) = n(t, y) + \psi(t), \quad (t, y) \in \Omega. \quad (8.12)$$

Funkci χ lze někdy určit vzhledem k (8.11) ze vztahu

$$\frac{\partial m(t, y)}{\partial y} + \chi'(y) = N(t, y), \quad (t, y) \in \Omega. \quad (8.13)$$

Funkci ψ lze někdy určit vzhledem k (8.12) ze vztahu

$$\frac{\partial n(t, y)}{\partial t} + \psi'(t) = M(t, y), \quad (t, y) \in \Omega. \quad (8.14)$$

Při hledání potenciálu V se nejprve rozhodneme, kterou z funkcí m, n lze snadněji vypočítat. Po integraci se pak snažíme určit z (8.11) - (8.14) celý předpis pro V .

Někdy jsme při hledání maximálních řešení nuceni použít techniku slepování.

Příklad 8.20. Určeme všechna maximální řešení ODR

$$3t^2 + 2ty + (t^2 - 1)y' = 0. \quad (8.15)$$

Řešení. Ověříme nejprve, zda jde o exaktní rovnici. Pro všechna $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ platí:

$$M(t, y) = 3t^2 + 2ty \Rightarrow \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = 2t,$$

$$N(t, y) = t^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} = 2t.$$

Na jednoduše souvislé oblasti $\mathbb{R}^2$ tedy platí $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$, rovnice (8.15) je proto exaktní diferenciální rovnicí a na $\mathbb{R}^2$ existuje potenciál V dvojice funkcí (M, N) . Nalezněme jej.

$$n(t, y) = \int (t^2 - 1)dy = (t^2 - 1)y,$$

$$V(t, y) = (t^2 - 1)y + \psi(t).$$

Funkci ψ nalezneme z podmínky $\frac{\partial V}{\partial t} = M$ na $\mathbb{R}^2$:

$$2ty + \psi'(t) = 3t^2 + 2ty,$$

$$\psi'(t) = 3t^2, \quad \psi(t) = t^3,$$

$$V(t, y) = (t^2 - 1)y + t^3.$$

Všimněme si nyní, že rovnost $N(t, y) = t^2 - 1 = 0$ nastane právě tehdy, když $t = 1$ nebo $t = -1$. Na obou zmíněných přímkách jsou tedy porušeny předpoklady zaručující jednoznačnost. Označme proto

$$\Omega_1 = (-\infty, -1) \times \mathbb{R},$$

$$\Omega_2 = (-1, 1) \times \mathbb{R},$$

$$\Omega_3 = (1, +\infty) \times \mathbb{R}.$$

Věta 8.7 zajišťuje existenci a jednoznačnost maximálních řešení pro následující Cauchyovy úlohy:

$$3t^2 + 2ty + (t^2 - 1)y' = 0, (t, y) \in \Omega_1; y(t_0) = y_0 ((t_0, y_0) \in \Omega_1) \quad (8.16)$$

$$3t^2 + 2ty + (t^2 - 1)y' = 0, (t, y) \in \Omega_2; y(t_0) = y_0 ((t_0, y_0) \in \Omega_2) \quad (8.17)$$

$$3t^2 + 2ty + (t^2 - 1)y' = 0, (t, y) \in \Omega_3; y(t_0) = y_0 ((t_0, y_0) \in \Omega_3) \quad (8.18)$$

Potenciál dvojice funkcí (M, N) jsme našli na $\mathbb{R}^2$, tedy rovněž na $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Uvažujme nyní bod $(t_0, y_0) \in \Omega_1$, resp. $(t_0, y_0) \in \Omega_2$, resp. $(t_0, y_0) \in \Omega_3$ a popišme maximální řešení úlohy (8.16), resp. (8.17), resp. (8.18).

Označme $C = V(t_0, y_0) = (t_0^2 - 1)y_0 + t_0^3$ a všimněme si, že pro $i = 1, 2, 3$ platí:

- a) Je-li $C \in \mathbb{R}$, pak v Ω_i lze nalézt bod (t_0, y_0) takový, že $V(t_0, y_0) = C$.
- b) Ke každému bodu $(t_0, y_0) \in \Omega_i$ je jednoznačně přiřazena příslušná hodnota $C = V(t_0, y_0) \in \mathbb{R}$.

Všetchna řešení úlohy (8.16), resp. (8.17), resp. (8.18) jsou tedy funkce φ_c^1 , resp. φ_c^2 , resp. φ_c^3 (nezávislé proměnné t) vyhovující implicitním předpisům

$$(t^2 - 1)y + t^3 = C, \quad t \in (-\infty, -1), \text{ resp.}$$

$$(t^2 - 1)y + t^3 = C, \quad t \in (-1, 1), \text{ resp.}$$

$$(t^2 - 1)y + t^3 = C, \quad t \in (1, \infty).$$

V našem případě „máme štěstí“ a můžeme podat explicitní předpisy pro maximální řešení Cauchyových úloh (8.16), resp. (8.17), resp. (8.18).

$$\varphi_c^i(t) = \frac{C - t^3}{t^2 - 1}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \text{ resp. } 2, \text{ resp. } 3, \quad (8.19)$$

$$t \in (-\infty, -1), \text{ resp. } t \in (-1, 1), \text{ resp. } t \in (1, \infty).$$

Nyní zbývá nalézt všechna maximální řešení rovnice (8.15), tj. rovnice

$$3t^2 + 2ty + (t^2 - 1)y' = 0$$

uvažované na celé rovině $\mathbb{R}^2$.

Ze vzorce (8.19) plyne :

$$\lim_{t \rightarrow -1-} \varphi_c^1(t) = \lim_{t \rightarrow -1-} \frac{C - t^3}{t^2 - 1} = \begin{cases} -\infty, & \text{pro } C < -1, \\ +\infty, & \text{pro } C > -1, \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+} \varphi_c^2(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} \frac{C - t^3}{t^2 - 1} = \begin{cases} -\infty, & \text{pro } C > -1, \\ +\infty, & \text{pro } C < -1, \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-} \varphi_c^2(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{C - t^3}{t^2 - 1} = \begin{cases} -\infty, & \text{pro } C > 1, \\ +\infty, & \text{pro } C < 1, \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \varphi_c^3(t) = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{C - t^3}{t^2 - 1} = \begin{cases} -\infty, & \text{pro } C < 1, \\ +\infty, & \text{pro } C > 1. \end{cases}$$

Zbývá ještě prověřit následující limity:

$$\lim_{t \rightarrow -1-} \varphi_{-1}^1(t) = \lim_{t \rightarrow -1-} \frac{-1 - t^3}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow -1-} \frac{-3t^2}{2t} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+} \varphi_{-1}^2(t) = \lim_{t \rightarrow -1+} \frac{-1 - t^3}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow -1+} \frac{-3t^2}{2t} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow 1-} \varphi_1^2(t) = \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{1 - t^3}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1-} \frac{-3t^2}{2t} = -\frac{3}{2},$$

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \varphi_1^3(t) = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{1 - t^3}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{-3t^2}{2t} = -\frac{3}{2}.$$

Nyní můžeme na φ_{-1}^1 , φ_{-1}^2 a φ_1^2 , φ_1^3 aplikovat techniku slepování řešení. Definujme funkce

$$\hat{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{-1-t^3}{t^2-1}, & t \in (-\infty, -1), \\ \frac{3}{2}, & t = -1, \\ \frac{-1-t^3}{t^2-1}, & t \in (0, 1), \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \frac{1-t^3}{t^2-1}, & t \in (-1, 1), \\ -\frac{3}{2}, & t = 1, \\ \frac{1-t^3}{t^2-1}, & t \in (1, \infty). \end{cases}$$

Funkce $\hat{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ jsou zřejmě spojité funkce, které lze zapsat ve tvaru:

$$\hat{\varphi}(t) = -t - \frac{1}{t-1}, \quad t \in (-\infty, 1),$$

$$\tilde{\varphi}(t) = -t - \frac{1}{1+t}, \quad t \in (-1, \infty),$$

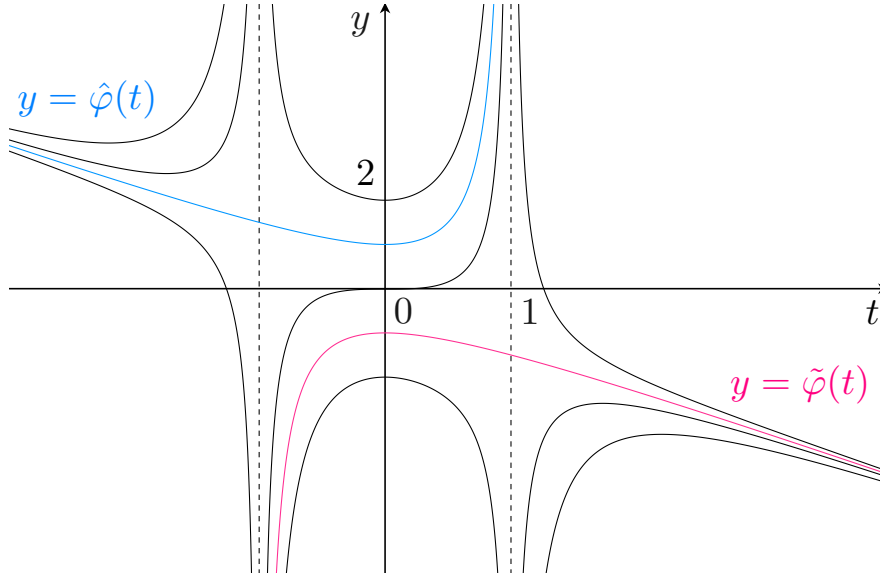
tedy $\hat{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ jsou diferencovatelné. Dosazením do rovnice (8.15) lze snadno ověřit, že $\hat{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$ jsou řešeními (8.15).

Shrňme, že jsme zatím našli systém Φ funkcí, které jsou řešeními rovnice (8.15). Uvažovaný systém je tvořen funkcemi φ_c^1 , φ_c^2 , φ_c^3 , kde $C \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ a dále funkcemi $\hat{\varphi}$, $\tilde{\varphi}$. O každé funkci systému Φ můžeme navíc říci, že jednostranné limity v krajních bodech definičního oboru jsou nevlastní nebo jsou krajní body definičního oboru nevlastními body. To ovšem znamená, že systém Φ je tvořen maximálními řešeními rovnice (8.15).

Všimněme si ještě, že grafy funkcí systému Φ se neprotínají. Na Ω_1 , resp. Ω_2 , resp. Ω_3 je totiž zaručena jednoznačnost a při slepování jsme rovněž vyčerpali všechny možnosti. Systém Φ zřejmě obsahuje všechna maximální řešení (8.15). Každé řešení

ψ rovnice (8.15) je totiž funkcí definovanou na otevřeném intervalu, tedy musí existovat bod grafu ψ , který leží v Ω_1 nebo v Ω_2 nebo v Ω_3 , odtud pak nutně plyne $\psi \in \Phi$.

Průběh integrálních křivek řešení diferenciální rovnice (8.15) lze charakterizovat následujícím náčrtkem:



Obr. 8.1



Poznámka 8.21. (O integračním faktoru) Necht rovnice

$$M(t, y) + N(t, y)y' = 0 \quad (8.20)$$

není exaktní. Někdy lze nalézt takovou funkci $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, že exaktní rovnici bude rovnice

$$\mu(t, y) \cdot M(t, y) + \mu(t, y) \cdot N(t, y)y' = 0. \quad (8.21)$$

Funkci μ pak říkáme integrační faktor diferenciální rovnice (8.20).

Mají-li funkce M, N, μ stejný definiční obor Ω a je-li μ navíc taková funkce, že platí $\forall (t, y) \in \Omega : \mu(t, y) \neq 0$, pak diferenciální rovnice (8.20), (8.21) jsou zřejmě ekvivalentní, mají stejnou množinu řešení.

Necht navíc funkce M, N, μ mají spojité parciální derivace na definičním oboru $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, kterým je jednoduše souvislá oblast. Pak μ lze hledat z postačujících podmínek pro exaktnost rovnice:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t},$$

to znamená ze vztahů:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t} N + \mu \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Poslední řádek je vlastně parciální diferenciální rovnicí pro neznámou funkci μ , předpokládáme-li však, že μ je konstantní vzhledem k y , resp., že μ je konstantní vzhledem t , pak $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, resp. $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$. Funkci μ lze tedy někdy hledat s úspěchem jako funkci proměnné t , která je řešením obyčejné diferenciální rovnice

$$\mu \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \mu' N(t, y) + \mu \frac{\partial N(t, y)}{\partial t},$$

nebo jako funkci proměnné y , která je řešením rovnice

$$\mu' M(t, y) + \mu \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} = \mu \frac{\partial N(t, y)}{\partial t}.$$

Příklad 8.22. Hledejme řešení Cauchyovy úlohy

$$3ty + y^2 + (t^2 + ty)y' = 0, \quad y(1) = 2.$$

Řešení.

$$\begin{aligned} M(t, y) &= 3ty + y^2, & N(t, y) &= t^2 + ty, \\ \frac{\partial M(t, y)}{\partial y} &= 3t + 2y, & \frac{\partial N(t, y)}{\partial t} &= 2t + y, \end{aligned}$$

nejde tedy o exaktní diferenciální rovnici.

Hledejme integrační faktor jako funkci proměnné t , tj. $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} \mu &= \frac{\partial N}{\partial t} \mu + N \mu', \\ (3t + 2y)\mu &= (2t + y)\mu + (t^2 + ty)\mu', \\ (t + y)\mu &= t(t + y)\mu' \quad (t + y \neq 0), \\ \mu &= t\mu', \\ \mu(t) &= t. \end{aligned} \tag{8.22}$$

(Všimněme si, že (8.22) platí rovněž v případě $t + y = 0$).

Získaná exaktní rovnice:

$$3t^2y + ty^2 + (t^3 + t^2y)y' = 0.$$

Po standardním výpočtu získáme potenciál:

$$V(t, y) = t^3y + \frac{1}{2}t^2y^2.$$

Po dosazení počáteční podmínky získáváme: $V(1, 2) = 4$. Položme

$$\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in (0, +\infty) \wedge y > -t\}.$$

Při zúžení rovnice na Ω je zajištěna existence a jednoznačnost řešení uvažované Cauchyovy úlohy. Řešení je přitom dáno implicitně vztahy:

$$t^3 y + \frac{1}{2} t^2 y^2 = 4, \quad y(1) = 2.$$

Poznamenejme ještě, že tomto příkladu šlo stěží hledat integrační faktor μ jako funkci proměnné y . Vzniklá rovnice by totiž obsahovala explicitně rovněž proměnnou t , které se „nezbavíme“ např. krácením. ▲

Poznámka 8.23. (O integračním faktoru lineární rovnice) Uvažujme lineární diferenciální rovnici

$$y' + a(t)y - b(t) = 0,$$

za předpokladu, že a, b jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu I . Uvedená rovnice obecně není exaktní, po přenásobení funkcí

$$\mu(t) = e^{\int a(t) dt}$$

však přejde v ekvivalentní exaktní diferenciální rovnici:

$$\left[(a(t)y - b(t)) e^{\int a(t) dt} \right] + e^{\int a(t) dt} y' = 0.$$

Skutečně, snadno ověříme, že na jednoduše souvislé oblasti $\Omega = I \times \mathbb{R}$ platí:

$$\frac{\partial \left((a(t)y - b(t)) e^{\int a(t) dt} \right)}{\partial y} = a(t) e^{\int a(t) dt} = \frac{\partial \left(e^{\int a(t) dt} \right)}{\partial t}.$$

Funkce $e^{\int a(t) dt}$, kterou si pamatujeme z metody přenásobení je tedy vlastně integračním faktorem lineární diferenciální rovnice prvního řádu.

Poznámka 8.24. Někdy se pod pojmem exaktní diferenciální rovnice rozumí výraz tvaru

$$M(t, y)dt + N(t, y)dy = 0, \quad (8.23)$$

kde existuje potenciál V dvojice funkcí (M, N) na nějaké oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Přitom mohou nastat zhruba tři možnosti, jak chápat pojem řešení uvedené rovnice:

a) Řešením (8.23) je funkce φ taková, že pro všechna t z nějakého otevřeného intervalu platí

$$M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t))\varphi'(t) = 0.$$

b) Řešením (8.23) je funkce φ z definice v bodě a) nebo funkce ψ taková, že pro všechna y z nějakého otevřeného intervalu platí $M(\psi(y), y)\psi'(y) + N(\psi(y), y) = 0$. Tedy (8.23) se chápe jako libovolná z rovnic

$$M(t, y)t' + N(t, y) = 0, \quad M(t, y) + N(t, y)y' = 0.$$

- c) Řešením (8.23) se rozumí množina všech bodů $(t, y) \in \mathbb{R}^2$, které vyhovují rovnici $V(t, y) = C$, kde $C \in \mathbb{R}$ je zvolená konstanta. Například řešeními rovnice $t dt + y dy = 0$ ve smyslu uvedené možné definice jsou kružnice se středem v počátku a budeme-li důslední, také množiny $\{(0, 0)\}$, $\emptyset$.

Na závěr ovšem zdůrazníme, že v tomto textu jsme se rozhodli za definici řešení rovnice (8.23) přijmout vymezení tohoto pojmu popsané v bodě a).

Příklady k procvičení

- Nalezněte předpis pro potenciál V dvojice (M, N) , jestliže:
 - $M(t, y) = \cos t + e^t \cos y$, $N(t, y) = -e^t \sin y$,
 - $M(t, y) = \frac{-2t}{t^2+1}$, $N(t, y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.
- Nalezněte kmenové funkce exaktních diferenciálních rovnic:
 - $2ty + (t^2 + 1)y' = 0$,
 - $t + \sin y + (t \cos y - 2y)y' = 0$.
- Řešte zadané exaktní diferenciální rovnice:
 - $2 + ye^{ty} + (te^{ty} - 2y)y' = 0$,
 - $y^2 + (1 + 2yt)y' = 0$.
- Řešte zadané Cauchyovy úlohy:
 - $2ty + (t^2 + 1)y' = 0$, $y(1) = 2$,
 - $y' = \frac{-y^2}{2ty+1}$, $y(1) = -2$,
 - $y + 2ty^3 + (1 + t + 3t^2y^2)y' = 0$, $y(1) = -5$.
- Nalezněte integrační faktory zadaných rovnic a následně řešte přiložené Cauchyovy úlohy:
 - $y^2 - y + ty' = 0$, $y(2) = \frac{1}{2}$,
 - $2ty \ln y dt + (t^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$, $y(0) = 1$.
- Ukažte, že funkce zadané předpisy $\mu_1(t) = -\frac{1}{t^2}$, $\mu_2(y) = \frac{1}{y^2}$, $\mu_2(t, y) = -\frac{1}{t^2 + y^2}$, $\mu_3(t, y) = -\frac{1}{ty}$ jsou integračními faktory rovnice $y - ty' = 0$.
- Uvažujme diferenciální rovnici ve tvaru

$$yf(ty) + tg(ty)y' = 0,$$

kde funkce f, g mají spojitě derivace. Ukažte, že funkce daná předpisem

$$\mu(t, y) = \frac{1}{tyf(ty) - tyg(ty)},$$

je integračním faktorem zmíněné rovnice.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $V(t, y) = e^t \cos y + \sin t$,
b) $V(t, y) = \arcsin y - \ln(t^2 + 1)$, $(t, y) \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$.
2. a) $V(t, y) = y(t^2 + 1)$,
b) $V(t, y) = \frac{1}{2}t^2 + t \sin y - y^2$.
3. a) $2t + e^{ty} - y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$,
b) $ty^2 + y = C$, $C \in \mathbb{R}$.
4. a) $\varphi(t) = \frac{4}{t^2 + 1}$,
b) $\varphi(t) = \frac{-1 - \sqrt{1 + 8t}}{2t}$, $t \in (0, \infty)$,
c) $yt + y^3 t^2 + y = -135$, $y(1) = -5$.
5. a) $\mu(t) = \frac{1}{y^2}$, $\varphi(t) = \frac{t}{t+2}$,
b) $\mu(t) = \frac{1}{y}$, $t^2 \ln y + \frac{1}{3} \sqrt{(y^2 + 1)^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $y(0) = 1$.

Kapitola 9

Obyčejné diferenciální rovnice n -tého řádu - základní vlastnosti

Budeme postupovat podobně jako jsme postupovali v případě obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu. Necht $n \in \mathbb{N}$. Obyčejnými diferenciálními rovnicemi n -tého řádu budeme nazývat rovnice, ve kterých se vyskytují n -té derivace neznámé funkce jedné reálné proměnné. Řekneme, že ODR je rovnicí n -tého řádu, jestliže tato rovnice efektivně obsahuje pouze n -tou, popřípadě i nižší derivace neznámé funkce. Upřesněme tedy, že obecně lze ODR n -tého řádu zapsat v tzv. implicitním tvaru

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad (9.1)$$

kde $F : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ je zadaná funkce. Někdy lze ODR zapsat ve tvaru explicitním:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad (9.2)$$

pro pevně danou funkci $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

V zadání ODR n -tého proměnnou u neznámé funkce a jejich derivací většinou nevypisujeme, takže píšeme pouze

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \text{ respektive}$$

$$y' = f(t, y, \dots, y^{(n-1)}).$$

Necht pro diferencovatelnou funkci $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ platí:

$$\forall t \in J : F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0.$$

Pak řekneme, že φ je řešením rovnice n -tého řádu (9.1) na J .

Stejně jako u ODR 1. řádu říkáme, že dvě ODR n -tého řádu jsou ekvivalentní, mají-li stejnou množinu všech řešení.

Příklad 9.1. Najděme řešení obyčejné diferenciální rovnice třetího řádu

$$y''' = \frac{y''}{t}$$

na otevřeném intervalu $J = (0, +\infty)$.

Řešení. Pro formální řešení této rovnice můžeme použít substituci $z = y''$. Následně dostaneme rovnici

$$z' = \frac{z}{t}.$$

Jejím řešením je funkce ψ definovaná předpisem $\psi(t) = t$, $t \in (0, +\infty)$.

Snadno lze ukázat, že pro každé pevně zvolené číslo $C_1 \in \mathbb{R}$ je funkce daná předpisem

$$C_1 t$$

řešením upravené rovnice:

$$\forall t \in (0, +\infty) : (C_1 t)' = \frac{C_1 t}{t}.$$

Dosazením do $y'' = z$ dostaneme

$$y'' = C_1 t, \quad t \in (0, +\infty), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Po dvojitým integrováním dostaneme třídu funkcí definovanou předpisem

$$y(t) = \frac{C_1}{6} t^3 + C_2 t + C_3, \quad t \in (0, +\infty), \quad C_{1,2,3} \in \mathbb{R}.$$

Zbývá ukázat, že pro každou pevně zvolenou trojici čísel $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_3 \in \mathbb{R}$ je příslušná funkce na J řešením zadané rovnice:

$$\forall t \in J : \varphi'''(t) = \left(\frac{C_1}{6} t^3 + C_2 t + C_3 \right)''' = \frac{\left(\frac{C_1}{6} t^3 + C_2 t + C_3 \right)''}{t} = \frac{\varphi''(t)}{t}.$$

▲

Příklad 9.2. Najděme řešení obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' e^{y'} = 1$$

na otevřeném intervalu $J = \mathbb{R}$.

Řešení. Pro řešení této rovnice můžeme použít substituci $z = y'$. Následně dostaneme rovnici

$$z' e^z = 1.$$

Řešením této rovnice se separovanými proměnnými je pro každé pevně zvolené $C_1 \in \mathbb{R}$ každá funkce definovaná předpisem

$$\ln(t + C_1) :$$

$$\forall t \in (-C_1, +\infty) : (\ln(t + C_1))' e^{\ln(t+C_1)} = 1.$$

Dosazením do $y' = z$ dostaneme

$$y' = \ln(t + C_1), \quad t \in (-C_1, +\infty), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Po integrování dostaneme třídu funkcí definovaných předpisem

$$y(t) = (t + C_1) \ln(t + C_1) - t + C_2, \quad t \in (-C_1, +\infty), \quad C_{1,2} \in \mathbb{R}.$$

Snadno lze ukázat, že pro každou pevně zvolenou dvojici čísel $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$ je tato funkce řešením zadané rovnice:

$$\forall t \in \mathbb{R} : ((t + C_1) \ln(t + C_1) - t + C_2)'' e^{((t+C_1) \ln(t+C_1) - t + C_2)'} = 1.$$

▲

Nechť jsou dána čísla $t_0 \in (0, +\infty)$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_1 \in \mathbb{R}$, $y_2 \in \mathbb{R}$, $\dots$, y_{n-1} . K ODR n -tého řádu (9.1) připojme požadavek, aby hledaná funkce v bodě t_0 nabývala hodnoty y_0 , její první derivace měla hodnotu y_1 , druhá derivace měla hodnotu y_2 atd. až $(n-1)$ -ní derivace nabývala hodnoty y_{n-1} , tzn.

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \quad (9.3)$$

Požadavku (9.3) budeme opět říkat počáteční podmínky. Úlohu (9.1), (9.3) nazýváme Cauchyovou úlohou.

Řekneme, že funkce φ je řešením Cauchyovy úlohy (9.1), (9.3) na otevřeném intervalu J , jestliže φ je řešením (9.1) na J a navíc platí $\varphi(t_0) = y_0$, $\varphi'(t_0) = y_1$ až $\varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Příklad 9.3. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y''' = \frac{y''}{t}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

V příkladě 9.2 jsme ukázali, že funkce zadané předpisem $\frac{C_1}{6}t^3 + C_2t + C_3$, $C_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ jsou řešením zadané rovnice na $(0, +\infty)$. Dá se snadno ověřit, že pokud zvolíme $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, pak funkce $\varphi(t) = 1$ je řešením zadané Cauchyovy úlohy.

▲

Příklad 9.4. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$y''e^{y'} = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

V příkladě 9.1 jsme ukázali, že funkce dané předpisem $y(t) = (t + C_1) \ln(t + C_1) - t + C_2$, $C_{1,2} \in \mathbb{R}$ tvoří řešení zadané rovnice na $(-C_1, +\infty)$. Dá se snadno ověřit, že pokud zvolíme $C_1 = 1$, $C_2 = 1$, pak funkce $\varphi(t) = (t + 1) \ln(t + 1) - t + 1$ je řešením zadané Cauchyovy úlohy. ▲

Nyní se (bez důkazů, které lze nalézt například v [8]) seznámíme s obecnými tvrzeními o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyových úloh.

Zabývejme se nyní obyčejnou diferenciální rovnicí n -tého řádu v explicitním tvaru

$$y^{(n)} = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)), \quad (9.4)$$

spolu s počátečními podmínkami

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \quad (9.5)$$

Věta 9.5 (o existenci řešení). *Nechť $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině a bod $(t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ patří do definičního oboru této funkce. Potom Cauchyova úloha (9.4), (9.5) má alespoň jedno maximální řešení.*

Příklad 9.6. Cauchyova úloha

$$y'' = 2\sqrt{y'}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

splňuje předpoklady Věty 9.5. Dá se ukázat, že existuje nekonečně mnoho maximálních řešení této úlohy.¹ ▲

Jak jsme viděli již u obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, k zajištění jednoznačnosti řešení pouhá spojitost pravé strany diferenciální rovnice (9.4) nestačí. Obvykle se jednoznačnost zajišťuje přidáním předpokladu „o omezené rychlosti změny funkce f “ vzhledem ke druhé a dalším proměnným. Nejjednodušší způsob, jak to provést, je obsažen v následujícím tvrzení:

Věta 9.7 (O existenci a jednoznačnosti). *Nechť $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině, přičemž $(t_0, y_0, y_0^1, \dots, y_0^{n-1})$ patří do definičního oboru této funkce. Nechť jsou navíc spojitě funkce $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$, to znamená parciální derivace funkce f podle druhé a dalších proměnných. Potom Cauchyova úloha (9.4), (9.5) má právě jedno maximální řešení.*

¹Získáme je „přilepováním“ parabol $(t - C)^2$, $C \in (0, +\infty)$ k funkci nulové na $(-\infty, 0)$.

Poznámka 9.8. Vraťme se k rovnici

$$y'' = 2\sqrt{y'}.$$

Zřejmě $f(t, y, y') = 2\sqrt{y'}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y, y') = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y'}(t, y, y') = \frac{1}{\sqrt{y'}}$, takže je ihned vidět, že předpoklad zaručující jednoznačnost je porušen pro $y' = 0$.

Poznámka 9.9. Obdobně jako v případě obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu je k dispozici tvrzení, které přináší také informaci o minimálním intervalu, na kterém je garantována existence řešení zkoumané Cauchyovy úlohy. V této kapitole tuto větu formulovat nebudeme a spokojíme se skutečností, že obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu jde převést na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu. V případě soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu budeme formulovat zmiňovanou větu dále v textu.

Kapitola 10

Lineární diferenciální rovnice vyšších řádů

Základní vlastnosti

Nechť je pro $n \in \mathbb{N}$ dáno $n+1$ reálných funkcí jedné reálné proměnné $a_1, a_2, \dots, a_n, b$. Obyčejnou diferenciální rovnici ve tvaru

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n y = b(t) \quad (10.1)$$

budeme nazývat lineární diferenciální rovnici n -tého řádu (zkráceně LDR řádu n).

Rovnici

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = 0 \quad (10.2)$$

se říká homogenní LDR n -tého řádu (přidružená k rovnici (10.1)). Poznamenejme, že jestliže b je nenulovou funkcí, pak budeme říkat, že (10.1) je nehomogenní rovnici.

Spolu s lineárními diferenciálními rovnicemi budeme dále studovat příslušné Cauchyovy úlohy, které jsou specifikovány doplněním počátečních podmínek pro neznámou funkci a její derivace. Pro $1+n$ zadaných reálných čísel $t_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ lze počáteční podmínky zapsat jako následující soustavu požadavků:

$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0, \\ y'(t_0) &= y_1, \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Pro další úvahy bude klíčové následující tvrzení, které v porovnání s obecnými výsledky z předchozí kapitoly přináší nově zejména informaci o intervalech, na kterých je zaručena existence řešení zadaných Cauchyových úloh.

Věta 10.1 (O existenci a jednoznačnosti pro LDR řádu n). *Nechť koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_n$ rovnice (10.1) jsou spojitými funkcemi definovanými na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$. Nechť také pravá strana b rovnice (10.1) je spojitá na J . Budiž dáno číslo $t_0 \in J$ a n reálných čísel $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$. Potom Cauchyova úloha (10.1), (10.3) má právě jedno řešení definované na J .*

Příklad 10.2. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$\begin{aligned} y'' + \frac{1}{t} \cdot y' &= t^2, \\ y(-1) &= 2, \\ y'(-1) &= 0. \end{aligned} \tag{10.4}$$

Řešení. V uvedeném případě je zřejmě $t_0 = -1$, $y_0 = 2$, $y_1 = 0$. Protože $t_0 < 0$, bude rozumné zvolit $J = (-\infty, 0)$, takže

$$a_1(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in J, \quad a_2(t) = 0, \quad t \in J, \quad b(t) = t^2, \quad t \in J.$$

Podle právě uvedené věty je zaručena existence jediného řešení φ zadané Cauchyovy úlohy na J .

I když zatím neznáme obecný postup hledání řešení lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů, v tomto případě si pomůžeme drobným trikem a řešení φ nalezneme. Nejprve si všimněme, že a_2 je nulová funkce, takže v zadané rovnici se vyskytují pouze derivace hledané funkce. To nás vede k nápadu nalézt nejprve funkci φ' . Pro funkci φ platí rovnosti

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + \frac{1}{t} \cdot \varphi'(t) &= t^2, \quad t \in J, \\ \varphi(-1) &= 2, \\ \varphi'(-1) &= 0, \end{aligned}$$

takže pro funkci $\psi = \varphi'$ zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \psi'(t) + \frac{1}{t} \cdot \psi(t) &= t^2, \quad t \in J, \\ \psi(-1) &= 0. \end{aligned}$$

Funkce ψ tedy bude zřejmě takovým řešením lineární diferenciální rovnice prvního řádu

$$z' + \frac{1}{t} \cdot z = t^2, \quad t \in J, \tag{10.5}$$

které splňuje počáteční podmínku

$$z(-1) = 0.$$

Poznamenejme, že formálně můžeme provedenou úvahu zapsat stručně jako substituci

$$z = y'$$

aplikovanou na původně zadaný Cauchův problém (10.4).

Snadno lze nalézt obecné řešení rovnice (10.5). Zopakujeme si třeba metodu přenásobení. Protože na $J = (-\infty, 0)$ platí

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln(-t), \quad e^{\ln(-t)} = -t,$$

rovnici (10.5) přenásobíme funkcí $-t$, $t \in J$:

$$z' \cdot (-t) - z = -t^3.$$

Provedenou ekvivalentní úpravou na J jsme dosáhli možnosti přepsat levou stranu rovnice jako derivaci součinu $z \cdot (-t)$, takže na J platí:

$$(z \cdot (-t))' = -t^3. \quad (10.6)$$

Po integraci obou stran rovnice (10.6) můžeme psát

$$-t \cdot z(t) = C - \frac{t^4}{4}, \quad C \in \mathbb{R},$$

odkud získáváme obecné řešení rovnice (10.5) ve tvaru:

$$z(t) = \frac{t^3}{4} - \frac{C}{t}, \quad t \in J, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $z(-1) = 0$ snadno zjistíme hodnotu integrační konstanty C :

$$0 = \frac{(-1)^3}{4} - \frac{C}{-1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{4}.$$

Platí tedy $\psi(t) = \frac{1}{4} \cdot \left(t^3 - \frac{1}{t}\right)$, $t \in J$. Hledanou funkci φ nyní zjistíme ze vztahů

$$\varphi'(t) = \frac{1}{4} \cdot \left(t^3 - \frac{1}{t}\right), \quad t \in J, \quad \varphi(-1) = 2.$$

Při počítání si třeba můžeme zopakovat použití určitého integrálu jako funkce proměnné horní meze:

$$\varphi(t) = 2 + \int_{-1}^t \frac{1}{4} \cdot \left(s^3 - \frac{1}{s}\right) ds = 2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} [s^4]_{-1}^t - [\ln(-s)]_{-1}^t \right), \quad t \in J,$$

takže

$$\varphi(t) = \frac{t^4 + 31}{16} - \frac{1}{4} \cdot \ln(-t), \quad t \in J = (-\infty, 0).$$

▲

Uvedme si ještě ukázkou stručného zápisu hledání řešení obdobných úloh.

Příklad 10.3. Nalezněme všechna maximální řešení homogenní lineární diferenciální rovnice třetího řádu

$$y''' - y'' = 0. \quad (10.7)$$

Řešení. Po substituci $z = y''$:

$$z' - z = 0. \quad (10.8)$$

Řešení metodou separace ($z > 0$ na $\mathbb{R}$ nebo $z < 0$ na $\mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \frac{dz}{dt} &= 1, \\ \int \frac{dz}{z} &= t + \tilde{C}, \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}, \\ \ln |z| &= t + \tilde{C}, \end{aligned}$$

Po úpravách a zahrnutí nulového řešení lze zapsat obecné řešení rovnice (10.8):

$$z = C_1 \cdot e^t, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Zpětné substituce:

$$\begin{aligned} y' &= \int C_1 \cdot e^t dt = C_1 \cdot e^t + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}, \\ y &= \int (C_1 \cdot e^t + C_2) dt = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot t + C_3, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tedy pro každé řešení y_h homogenní rovnice (10.7) existují reálná čísla C_1, C_2, C_3 taková, že y_h je dáno předpisem

$$\underline{\underline{y_h(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot t + C_3.}}$$

▲

Věta 10.4 (O vlastnostech řešení LDR vyšších řádů). *Nechť $a_1, \dots, a_n, b$ jsou spojité funkce definované na otevřeném intervalu J . Označme symbolem Y množinu všech řešení LDR (10.1) na J . Nechť Y_h označuje systém všech řešení homogenní LDR (10.2) na J . Pak platí:*

- 1) Y_h je lineárním prostorem, $\dim Y_h = n$.
- 2) Nechť y_p je libovolné řešení (10.1) na J a y_h je libovolné řešení přidružené homogenní rovnice (10.2) na J . Potom součet $y = y_p + y_h$ je opět řešením rovnice (10.1) na J . Obráceně, ke každým dvěma řešením y, y_p rovnice (10.1) na J existuje řešení y_h přidružené homogenní rovnice (10.2) na J , pro které na tomto intervalu platí $y = y_h + y_p$.
Stručně zapsáno, pro $y_p \in Y$ platí :

$$y \in Y \iff (\exists y_h \in Y_h : y = y_h + y_p).$$

Poznámka 10.5. Dříve, než se pustíme do důkazu uvedené věty, učinme několik úmluv. Tvoří-li systém funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ bázi prostoru Y_h , pak tento systém nazýváme fundamentálním systémem řešení homogenní LDR (10.2) na příslušném intervalu J . Známe-li fundamentální systém $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ rovnice (10.2) na J , pak pro každé řešení y_h této rovnice na J platí:

$$y_h \in Y_h \iff (\exists! C_1 \in \mathbb{R} \exists! C_2 \in \mathbb{R} \dots \exists! C_n \in \mathbb{R} : y_h = C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_n \varphi_n).$$

Pomocí vzorce

$$y_h(t) = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + \dots + C_n \varphi_n(t), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, \dots, C_n \in \mathbb{R}, \quad (10.9)$$

tak lze popsat každé řešení rovnice (10.2). Vzorci (10.9) budeme říkat obecné řešení rovnice (10.2) na J . V příkladu 10.3 jsme například zjistili, že každé řešení homogenní rovnice (10.7) lze zapsat ve tvaru

$$y_h(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot t + C_3, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Právě uvedený zápis obecného řešení rovnice (10.7) zřejmě odpovídá volbě fundamentálního systému řešení této rovnice ve tvaru

$$\varphi_1(t) = e^t, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_3(t) = 1.$$

Tvrzení obsažené ve druhé části Věty 10.4 lze symbolicky vyjádřit ve tvaru

$$Y = Y_h + y_p.$$

Uvedený vztah můžeme zapsat také takto:

$$y(t) = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + \dots + C_n \varphi_n(t) + y_p(t), \quad C_1 \in \mathbb{R}, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Právě uvedený výraz budeme nazývat obecným řešením rovnice (10.1). Obecné řešení rovnice (10.1) lze tedy zapsat jako součet obecného řešení přidružené homogenní rovnice (10.2) a jednoho pevně daného (tzv. partikulárního) řešení y_p této rovnice.

Zkoumáme-li třeba nehomogenní rovnici ve tvaru

$$y''' - y'' = -1, \quad (10.10)$$

po chvíli snadno uhadneme, že jedním z řešení této rovnice je funkce

$$y_p(t) = \frac{t^2}{2}.$$

Protože obecné řešení přidružené homogenní rovnice (10.7) má tvar

$$y_h(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot t + C_3, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R},$$

můžeme ihned napsat obecné řešení (10.10):

$$y(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 \cdot t + C_3 + \frac{t^2}{2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R}.$$



Důkaz. Zdůvodnění Věty 10.4 provedeme pro rovnici druhého řádu. Obecně se důkaz provede stejně, jen je trochu méně přehledný. Předpokládejme, že a_1 , a_2 , b jsou spojité reálné funkce definované na otevřeném intervalu J a na tomto intervalu uvažujeme diferenciální rovnice

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t), \quad (10.11)$$

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0. \quad (10.12)$$

Označme si symbolem $C^2(J)$ systém všech reálných funkcí, které jsou definovány na J a v každém bodě tohoto intervalu mají spojité derivace až do řádu 2. Není těžké ukázat, že $C^2(J)$ je lineárním prostorem (nad tělesem skalárů $\mathbb{R}$). Poznamenejme ještě, že řešení rovnice (10.11) i řešení rovnice (10.12) zřejmě musí mít spojitou druhou derivaci na J , takže platí $Y \subset C^2(J)$, $Y_h \subset C^2(J)$.

Každé funkci $y \in C^2(J)$ zřejmě můžeme přiřadit funkci $L(y)$ definovanou na J předpisem

$$L(y)(t) = y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_2(t)y(t).$$

Na lineárním prostoru $C^2(J)$ jsme tak definovali zobrazení (operátor), který popisuje efekt způsobený levou stranou uvažovaných diferenciálních rovnic (10.11) a (10.12).

Pomocí operátoru L můžeme stručně zapsat, že pro řešení y rovnice (10.11) na J platí

$$L(y)(t) = b(t),$$

zatímco pro řešení y_h přidružené homogenní rovnice (10.12) na J platí

$$L(y_h)(t) = 0.$$

Ukažme, že L je lineárním operátorem, to znamená, že platí:

$$\forall u \in C^2(J) \forall v \in C^2(J) : L(u+v) = L(u) + L(v),$$

$$\forall u \in C^2(J) \forall \alpha \in \mathbb{R} : L(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot L(u).$$

Vezměme tedy funkci $u \in C^2(J)$ a funkci $v \in C^2(J)$. Pak pro každé $t \in J$ platí

$$\begin{aligned} L(u+v)(t) &= (u+v)''(t) + a_1(t)(u+v)'(t) + a_2(t)(u+v)(t) = \\ &= [u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t)] + [v''(t) + a_1(t)v'(t) + a_2(t)v(t)] = \\ &= L(u)(t) + L(v)(t), \end{aligned}$$

čímž je dokázán vztah $L(u+v) = L(u) + L(v)$.

Nyní zvolme libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ a funkci $u \in C^2(J)$. Pro každé $t \in J$ zřejmě platí

$$\begin{aligned} L(\alpha \cdot u)(t) &= (\alpha \cdot u)''(t) + a_1(t)(\alpha \cdot u)'(t) + a_2(t)(\alpha \cdot u)(t) = \\ &= \alpha \cdot [u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t)] = \alpha \cdot L(u)(t), \end{aligned}$$

takže $L(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot L(u)$.

Zavedením operátoru L a důkazem jeho linearitry jsme si připravili půdu pro stručný zápis a můžeme tak přistoupit k vlastnímu důkazu, který si rozdělíme na několik částí.

I. A. Nejprve se ujistíme, že množina Y_h je lineárním prostorem. Protože Y_h je neprázdnou podmnožinou lineárního prostoru $C^2(J)$, stačí dokázat, že Y_h je lineárním podprostorem tohoto prostoru. Stačí se tedy přesvědčit, že pro každá dvě řešení $u \in Y_h, v \in Y_h$ a libovolné číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned}(u + v) &\in Y_h, \\ (\alpha \cdot u) &\in Y_h.\end{aligned}$$

Nechť $u \in Y_h$ a $v \in Y_h$. Potom J platí

$$L(u + v) = L(u) + L(v) = 0 + 0 = 0,$$

tudíž $(u + v) \in Y_h$.

Nyní předpokládejme, že je dána funkce $u \in Y_h$ a číslo $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$L(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot L(u) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

proto $(\alpha \cdot u) \in Y_h$.

Poznamenejme, že jsme zde místo našeho prověřování mohli pouze konstatovat, že Y_h je vlastně jádrem lineárního zobrazení L a využít poznatku, že jádro lineárního zobrazení je vždy lineárním prostorem.

I. B. Ukažme, že

$$\dim Y_h = 2.$$

To provedeme tak, že popíšeme jednu z možných bází φ_1, φ_2 prostoru Y_h .

Zvolme libovolně, ale pevně $t_0 \in J$. Na J uvažujme takové řešení φ_1 rovnice (10.12), které splňuje počáteční podmínky

$$y(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 0,$$

a řešení φ_2 téže homogenní rovnice, které ovšem splňuje podmínky

$$y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 1.$$

Zdůrazněme, že tato řešení podle Věty 10.1 existují a jsou dána jednoznačně. Vezměme nyní libovolné řešení u rovnice (10.12) na J . Řešení u samozřejmě můžeme chápat jako řešení Cauchyovy úlohy (10.12),

$$y(t_0) = u(t_0), \quad y'(t_0) = u'(t_0).$$

Označme:

$$C_1 = u(t_0), \quad C_2 = u'(t_0).$$

Definujeme-li nyní na J funkci φ předpisem

$$\varphi(t) = C_1 \cdot \varphi_1(t) + C_2 \cdot \varphi_2(t),$$

vidíme, že (Y_h) je lineární prostor, jak jsme ukázali) $\varphi \in Y_h$, to znamená, že φ je řešením (10.12) na J . Jak snadno ověříme, platí

$$\varphi(t_0) = C_1 \cdot \varphi_1(t_0) + C_2 \cdot \varphi_2(t_0) = u(t_0) \cdot 1 + u(t_0) \cdot 0 = u(t_0),$$

$$\varphi'(t_0) = C_1 \cdot \varphi_1'(t_0) + C_2 \cdot \varphi_2'(t_0) = u'(t_0) \cdot 0 + u'(t_0) \cdot 1 = u'(t_0).$$

Obě funkce u, φ jsou tedy řešeními téže Cauchyovy úlohy. Odtud ovšem podle věty 10.1 plyne, že nutně

$$u = \varphi = C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2.$$

Ukázali jsme, že libovolně zvolené $u \in Y_h$ lze vyjádřit jako vhodnou lineární kombinaci funkcí φ_1, φ_2 . To ovšem znamená, že

$$\dim Y_h \leq 2.$$

K dokončení důkazu první části si stačí uvědomit, že funkce φ_1, φ_2 jsou lineárně nezávislé a tvoří tak fundamentální systém řešení homogenní rovnice (10.12). Potřebujeme dokázat, že pro každou dvojici konečných reálných čísel α, β platí implikace:

$$(\alpha \cdot \varphi_1 + \beta \cdot \varphi_2 = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = 0).$$

Nechť tedy platí

$$\alpha \cdot \varphi_1 + \beta \cdot \varphi_2 = 0.$$

Pak musí také platit

$$\alpha \cdot \varphi_1' + \beta \cdot \varphi_2' = 0.$$

Odtud okamžitě plyne, že

$$\alpha \cdot \varphi_1(t_0) + \beta \cdot \varphi_2(t_0) = 0 \wedge \alpha \cdot \varphi_1'(t_0) + \beta \cdot \varphi_2'(t_0) = 0,$$

takže

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = 0 \wedge \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = 0,$$

tedy

$$\alpha = 0 \wedge \beta = 0,$$

což jsme potřebovali ukázat.

II. Nyní dokážeme vlastnost formulovanou ve druhém tvrzení Věty 10.4. Nechť $y_p \in Y$ je pevně zvolená funkce.

Nejprve ukažme, že pro libovolně zvolenou funkci $y \in Y$ patří do Y_h také funkce y_h definovaná vztahem

$$y_h = y - y_p,$$

(takže evidentně platí $y = y_h + y_p$).

Z linearity operátoru L plyne na J

$$L(y_h)(t) = L(y - y_p)(t) = L(y)(t) - L(y_p)(t) = b(t) - b(t) = 0,$$

takže

$$y_h \in Y_h.$$

K dokončení celého důkazu si stačí uvědomit, že pokud pro libovolnou funkci y_h definujeme funkci y předpisem

$$y = y_h + y_p,$$

pak na J dostáváme

$$L(y)(t) = L(y_h + y_p)(t) = L(y_h)(t) + L(y_p)(t) = 0 + b(t) = b(t),$$

takže $y \in Y$. □

Poznámka 10.6. (O principu superpozice) Z úvodní kapitoly si čtenář mohl odnést jistou představu o významu jednotlivých členů v lineární diferenciální rovnici. Při rozboru různých lineárních modelů (lze si připomenout například model kmitajícího závaží nebo model sériového RLC obvodu) si lze všimnout, že přidružená homogenní LDR obvykle charakterizuje chování systému bez působení vnějších vlivů, přičemž koeficienty představované funkcemi $a_1, a_2, \dots, a_n$ odpovídají vlastnostem konstrukčních prvků systému. Budeme-li na systém působit dodatečným vnějším vlivem, tento vliv bývá obvykle reprezentován funkcí b na pravé straně lineární diferenciální rovnice. Tvrzení obsažené ve druhé části Věty 10.4 a vyjádřené mnemotechnickou pomůckou

$$Y = Y_h + y_p,$$

tak lze v kontextu terminologie teorie systémů volně formulovat takto:

„Všechny možné odezvy lineárního systému na konkrétní vnější vliv jsou vytvořeny jako součet (superpozice) všech myslitelných chování systému bez působení tohoto vlivu a jedné konkrétní reakce systému na tento vliv.“

Popsané vlastnosti se někdy říká princip superpozice.

Uvedený princip můžeme poněkud modifikovat. Uvažujme dvě LDR druhého řádu s různými pravými stranami a stejnou přidruženou homogenní rovnicí:

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t), \quad (10.13)$$

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = c(t). \quad (10.14)$$

Předpokládejme, že funkce u je na otevřeném intervalu J řešením (10.13) a funkce v je na stejném intervalu řešením (10.14). Potom můžeme lehce ukázat, že součet $u + v$ představuje na J řešení následující rovnice:

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t) + c(t).$$

Na J totiž platí:

$$\begin{aligned} (u+v)''(t) + a_1(t) \cdot (u+v)'(t) + a_2(t) \cdot (u+v)(t) &= \\ &= u''(t) + a_1(t)u'(t) + a_2(t)u(t) + \\ &+ v''(t) + a_1(t)v'(t) + a_2(t)v(t) = b(t) + c(t). \end{aligned}$$

Právě provedené pozorování je samozřejmě možné formulovat rovněž pro lineární diferenciální rovnice libovolného řádu. Jeho formulace v jazyce teorie systémů pak může znít třeba takto:

„Reakce lineárního systému na působení superpozice vnějších vlivů je dána superpozicí izolovaných odezev tohoto systému na jednotlivé vlivy.“

Na závěr poznamenejme, že princip superpozice nám někdy může ušetřit práci při hledání řešení lineárních diferenciálních rovnic.

Příklad 10.7. Uvažujme diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + y = t - 2 + \frac{e^t}{t}, \quad t \in J = (0, \infty). \quad (10.15)$$

Řešení. Jedno z řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = t - 2$$

lze uhadnout:

$$u(t) = t, \quad t \in J.$$

Později popíšeme způsob, jak najít řešení

$$v(t) = te^t (\ln(t) - 1), \quad t \in J,$$

diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}, \quad t \in J.$$

Podle principu superpozice pak platí, že funkce y_p definovaná na J předpisem

$$y_p(t) = t + te^t (\ln(t) - 1),$$

je na J řešením rovnice (10.15). ▲

Homogenní lineární diferenciální rovnice n -tého řádu

Začneme smutnou zprávou - na rozdíl od rovnice prvního řádu není znám obecný algoritmus pro nalezení fundamentálního systému řešení homogenních lineárních diferenciálních rovnic vyšších řádů. Nyní pouze popíšeme postup, který umožňuje nalézt obecné řešení homogenní rovnice v případě, že koeficienty této rovnice jsou konstantní.

Homogenní rovnice s konstantními koeficienty

Úmluva. V celém odstavci budeme předpokládat, že všechny koeficienty rovnice

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (10.16)$$

jsou konstantní funkce (stručně $a_1 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$). Řešením (10.16) budeme rozumět maximální řešení této rovnice, to znamená řešení na $\mathbb{R}$.

Nejprve si všimněme, jak vypadá řešení homogenní rovnice prvního řádu s konstantním koeficientem $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y' + a \cdot y &= 0 & | \cdot e^{\int a \, dt} \\ (y \cdot e^{a \cdot t})' &= 0 \\ y &= C \cdot e^{-a \cdot t}, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Řešením uvažované rovnice je tedy například funkce $\varphi(t) = e^{\lambda_1 t}$, kde číslo $\lambda_1 = -a$ je řešením rovnice $\lambda + a = 0$.

Hledejme proto řešení φ rovnice vyššího řádu (10.16) opět ve tvaru „exponenciály“

$$\varphi(t) = e^{\lambda t},$$

a zkusme přitom zjistit, jaké požadavky na λ získáme.

Protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí (derivujeme podle proměnné t)

$$\begin{aligned} (e^{\lambda t})' &= \lambda \cdot e^{\lambda t}, \\ (e^{\lambda t})' &= \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}, \\ &\vdots \\ (e^{\lambda t})^{(k)} &= \lambda^k \cdot e^{\lambda t}, \end{aligned}$$

můžeme, po dosazení předpokládaného tvaru řešení do (10.16), psát

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda t} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda t} + \dots + a_n \cdot e^{\lambda t} = 0.$$

Protože exponenciální funkce je v každém bodě nenulová, můžeme bez obav vzniklou rovnici vydělit $e^{\lambda t}$. Získáme tak rovnici

$$\lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0, \quad (10.17)$$

která vymezuje vhodná λ .

Polynom

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad (10.18)$$

budeme nazývat charakteristickým polynomem (přidruženým k rovnici (10.16)), rovnici (10.17) se říká charakteristická rovnice.

Má-li tedy být funkce $e^{\lambda t}$ řešením rovnice (10.16), pak λ musí být kořenem charakteristického polynomu přidruženého k této rovnici. Přitom je známo, že polynom

stupně $n \in \mathbb{N}$ má právě n (obecně komplexních) kořenů, počítáme-li každý z nich tolikrát, kolik činí jeho algebraická násobnost.

V následujícím tvrzení, jehož důkaz je možné nalézt například v [8], je popsán způsob jak získat fundamentální systém řešení homogenních rovnic s konstantními koeficienty.

Věta 10.8. *Uvažujme homogenní rovnici s konstantními koeficienty (10.16) a přidružený charakteristický polynom (10.17). Přiřadme každému reálnému kořenu λ_j násobnosti k_j tohoto polynomu k_j funkcí:*

$$e^{\lambda_j t}, t \cdot e^{\lambda_j t}, t^2 \cdot e^{\lambda_j t}, \dots, t^{k_j-1} \cdot e^{\lambda_j t}.$$

Přiřadme dále každé dvojici $\lambda_l = \alpha_l + \beta_l i$, $\bar{\lambda}_l = \alpha_l - \beta_l i$, $\alpha_l \in \mathbb{R}$, $\beta_l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, komplexně sdružených kořenů polynomu (10.18) násobnosti m_l následujících $2m_l$ funkcí :

$$\begin{aligned} &e^{\alpha_l t} \cdot \sin(\beta_l t), t \cdot e^{\alpha_l t} \cdot \sin(\beta_l t), t^2 \cdot e^{\alpha_l t} \cdot \sin(\beta_l t), \dots, t^{m_l-1} \cdot e^{\alpha_l t} \cdot \sin(\beta_l t), \\ &e^{\alpha_l t} \cdot \cos(\beta_l t), t \cdot e^{\alpha_l t} \cdot \cos(\beta_l t), t^2 \cdot e^{\alpha_l t} \cdot \cos(\beta_l t), \dots, t^{m_l-1} \cdot e^{\alpha_l t} \cdot \cos(\beta_l t). \end{aligned}$$

Popsaným způsobem získáme právě n funkcí. Tyto funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (10.16).

Příklad 10.9. Určeme fundamentální systém řešení rovnice

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 0.$$

Napišme obecné řešení této rovnice a nalezneme řešení, které vyhovuje počátečním podmínkám

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 8, \quad y''(0) = 0.$$

Řešení. Nejprve sestavme charakteristickou rovnici :

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0.$$

Uhodneme jeden z kořenů: $\lambda_1 = 3$. Protože

$$(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3) : (\lambda - 3) = \lambda^2 + 2\lambda + 1,$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2,$$

můžeme psát

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 3)^1 \cdot (\lambda - (-1))^2,$$

takže charakteristický polynom má kořen $\lambda_1 = 3$ násobnosti 1 a dvojnásobný kořen $\lambda_2 = -1$.

Fundamentálním systémem řešení zadané diferenciální rovnice je tedy systém funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, definovaných předpisy

$$\varphi_1(t) = e^{3t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-t}, \quad \varphi_3(t) = t \cdot e^{-t}.$$

Obecné řešení zapíšeme jako systém všech možných lineárních kombinací fundamentálního systému řešení:

$$y_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, \quad C_2 \in \mathbb{R}, \quad C_3 \in \mathbb{R}.$$

Dosazení obecného řešení a jeho derivací do počátečních podmínek nám umožní sestavit jednoznačně řešitelnou soustavu lineárních rovnic. Její vyřešení nám umožní zapsat řešení zadané Cauchyovy úlohy.

$$\begin{aligned} y_h(t) &= C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}, \\ y'_h(t) &= 3C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} + C_3 (1-t) e^{-t}, \\ y''_h(t) &= 9C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + C_3 (t-2) e^{-t}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(0) = 0 : \quad 0 &= C_1 + C_2, \\ y'(0) = 8 : \quad 8 &= 3C_1 - C_2 + C_3, \\ y''(0) = 0 : \quad 0 &= 9C_1 + C_2 - 2C_3. \end{aligned}$$

Řešením soustavy je trojice $(1, -1, 4)$. To znamená, že řešením φ zadané Cauchyovy úlohy je funkce zadaná předpisem

$$\varphi(t) = e^{3t} - e^{-t} + 4te^{-t}.$$

▲

Příklad 10.10. Popišme stručně jak získáme fundamentální systém řešení rovnice

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = 0.$$

Řešení. Charakteristická rovnice:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 = 0.$$

Po uhodnutí řešení $\lambda_1 = -2$ a úpravě :

$$(\lambda^2 + 2\lambda + 2) \cdot (\lambda + 2) = 0.$$

Kořeny:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2, \quad k_1 = 1, \\ \lambda_2 &= \frac{-2 + \sqrt{4-8}}{2} = -1 + i, \quad \overline{\lambda_2} = -1 - i, \quad m_2 = 1. \end{aligned}$$

Fundamentální systém řešení :

$$\underline{\underline{\varphi_1(t) = e^{-2t}, \quad \varphi_2(t) = e^{-t} \cdot \sin t, \quad \varphi_3(t) = e^{-t} \cdot \cos t.}}$$

▲

Příklad 10.11. Určeme obecné řešení rovnice

$$y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0.$$

Řešení. Po sestavení charakteristické rovnice

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = 0,$$

si lze všimnout, že lze psát

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 + 2)^2,$$

takže zbývá nalézt řešení rovnice

$$(\lambda^2 + 2) = 0.$$

Jsou jimi komplexně sdružená čísla $\lambda_1 = i\sqrt{2}$, $\overline{\lambda_1} = -i\sqrt{2}$, přičemž jde o dvojnásobné kořeny charakteristické rovnice. Fundamentální systém řešení je proto tvořen funkcemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, definovanými předpisy:

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= \sin(\sqrt{2}t), & \varphi_2(t) &= t \cdot \sin(\sqrt{2}t), \\ \varphi_3(t) &= \cos(\sqrt{2}t), & \varphi_4(t) &= t \cdot \cos(\sqrt{2}t).\end{aligned}$$

Obecné řešení naší rovnice lze proto psát ve tvaru:

$$y_h(t) = C_1 \sin(\sqrt{2}t) + C_2 t \sin(\sqrt{2}t) + C_3 \cos(\sqrt{2}t) + C_4 t \cos(\sqrt{2}t),$$

$$C_1 \in \mathbb{R}, \dots, C_4 \in \mathbb{R}.$$

▲

Wronského matice

Předpokládejme, že jsme našli n řešení $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ homogenní rovnice (10.2) se spojitými koeficienty a spojitou pravou stranou na otevřeném intervalu J . Jak poznáme, že jde o fundamentální systém řešení této rovnice? Jinými slovy, jak snadno ověříme lineární nezávislost uvažovaného systému řešení? Při hledání odpovědi na uvedenou otázku se vyplácí studovat vlastnosti čtvercové maticové funkce ve tvaru:

$$W(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}.$$

Uvedené matici budeme říkat Wronského matice, jejímu determinantu pak Wronskián.

Připomeňme na úvod jedno tvrzení, které si možná čtenář pamatuje z lineární algebry.

Věta 10.12 (O lineární závislosti funkcí). *Nechť je na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$ dán systém funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, které na J mají konečné derivace až do řádu $n-1$ včetně. Tvoří-li funkce $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ lineárně závislý systém, potom pro každé $t_0 \in J$ platí:*

$$\det W(t_0) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \dots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \dots & \varphi_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} = 0.$$

★

Důkaz. Ukážme tedy, že z lineární závislosti systému $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ nutně plyne nulovost Wronskiánu na celém intervalu J . Předpokládejme tedy, že v rovnosti

$$C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2 + \dots + C_n \cdot \varphi_n = 0,$$

je alespoň jeden z koeficientů $C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ nenulový. Pokud uvedenou rovnost postupně derivujeme, zjišťujeme, že musí platit:

$$\begin{aligned} C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2 + \dots + C_n \cdot \varphi_n &= 0, \\ C_1 \cdot \varphi_1' + C_2 \cdot \varphi_2' + \dots + C_n \cdot \varphi_n' &= 0, \\ C_1 \cdot \varphi_1'' + C_2 \cdot \varphi_2'' + \dots + C_n \cdot \varphi_n'' &= 0, \\ &\vdots \\ C_1 \cdot \varphi_1^{(n-1)} + C_2 \cdot \varphi_2^{(n-1)} + \dots + C_n \cdot \varphi_n^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}$$

To ovšem znamená, že pro každé $t \in J$ má soustava rovnic

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

nenulové řešení, což je možné právě tehdy, když matice této soustavy je singulární, a proto $\det W(t) = 0$. $\square$

V případě, že funkce $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ navíc tvoří systém řešení homogenní rovnice (10.2), můžeme předchozí tvrzení výrazně zesílit. Podle Věty 10.1 máme pro libovolně zvolené $t_0 \in J$ a libovolnou volbu $(y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ zajištěnu existenci a jednoznačnost odpovídajícího řešení φ Cauchyovy úlohy (10.2), (10.3) na

J . Z Věty 10.4 plyne, že toto řešení je dáno jako vhodná lineární kombinace fundamentálního systému řešení rovnice. Koeficienty této lineární kombinace přitom tvoří n -tici $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ reálných čísel, která je (při zachování pořadí prvků fundamentálního systému řešení) dána jednoznačně. Na základě uvedených vlastností za chvíli dokážeme následující tvrzení:

Věta 10.13 (O Wronskiánu). *Nechť jsou všechny koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_n$ homogenní rovnice (10.2) spojité funkce definované na otevřeném intervalu J . Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (10.2) na J . Potom pro každé $t_0 \in J$ je hodnota Wronského maticové funkce $W(t_0)$ regulární maticí, to znamená, že*

$$\forall t_0 \in J : \det W(t_0) \neq 0.$$

Poznámka 10.14. Pro Wronskián $\det W(t)$ odpovídající systému řešení homogenní LDR (10.2) se spojitými koeficienty na J tedy mohou nastat pouze dva případy. Buď je zmíněný Wronskián funkcí na J identicky nulovou nebo je hodnota $\det W(t)$ nenulová v každém bodě $t \in J$.



Důkaz. Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ jsou řešeními homogenní rovnice (10.2) se spojitými koeficienty definovanými na J . Všimněme si, že úloha vyjádřit řešení φ Cauchyovy úlohy (10.2),

$$y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = 0, \quad (10.19)$$

jako lineární kombinaci

$$\varphi = C_1 \cdot \varphi_1 + C_2 \cdot \varphi_2 + \dots + C_n \cdot \varphi_n,$$

je ekvivalentní problému nalezení řešení soustavy lineárních rovnic ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \dots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \dots & \varphi_n'(t_0) \\ & & \ddots & \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zvolme libovolně $t_0 \in J$. Zřejmě bude stačit, když ukážeme, že pokud $\det W(t_0) = 0$, pak je systém $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tvořen lineárně závislými funkcemi a tedy nemůže představovat fundamentální systém řešení rovnice (10.2). Tedy, nechť platí $\det W(t_0) = 0$. To znamená, že soustava lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \dots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \dots & \varphi_n'(t_0) \\ & & \ddots & \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

má singulární matici a tedy kromě nulového řešení existuje nenulové řešení $(\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \dots, \widetilde{C}_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$ této soustavy. To ovšem znamená, že na J existují dvě řešení Cauchyovy úlohy (10.2), (10.19):

$$\begin{aligned}\varphi &= 0 \cdot \varphi_1 + 0 \cdot \varphi_2 + \dots + 0 \cdot \varphi_n = 0, \\ \psi &= \widetilde{C}_1 \cdot \varphi_1 + \widetilde{C}_2 \cdot \varphi_2 + \dots + \widetilde{C}_n \cdot \varphi_n.\end{aligned}$$

Protože Cauchyova úloha má na J právě jedno řešení, musí platit $\psi = \varphi = 0$, to znamená, že

$$\widetilde{C}_1 \cdot \varphi_1 + \widetilde{C}_2 \cdot \varphi_2 + \dots + \widetilde{C}_n \cdot \varphi_n = 0,$$

kde alespoň jedno z čísel $\widetilde{C}_1, \widetilde{C}_2, \dots, \widetilde{C}_n$ je nenulové. Odtud však plyne, že systém φ_1, φ_2 až φ_n tvoří lineárně závislou soustavu, a proto nemůže představovat fundamentální systém řešení homogenní rovnice (10.2). $\square$



Poznámka 10.15. (O problému identifikace) Existuje řada systémů, jejichž chování lze úspěšně modelovat homogenní lineární diferenciální rovnicí druhého řádu ve tvaru

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0, \quad (10.20)$$

přičemž nejsou přesně známy koeficienty a_1, a_2 této rovnice. Představme si na chvíli takový systém a předpokládejme, že jsme (třeba měřením) na otevřeném intervalu J zjistili dvě lineárně nezávislá řešení φ_1, φ_2 rovnice (10.20), takže v každém bodě $t \in J$ je Wronskián

$$\det W(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix}$$

nenulové číslo. Popišme, jak nalezneme funkce a_1, a_2 . Protože ke každému řešení y uvažované rovnice na J jsou dána jednoznačně čísla C_1, C_2 taková, že na J platí

$$y(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t),$$

musí také platit:

$$\begin{aligned}y'(t) &= C_1\varphi_1'(t) + C_2\varphi_2'(t), \\ y''(t) &= C_1\varphi_1''(t) + C_2\varphi_2''(t).\end{aligned}$$

Zapišeme-li na J uvedené rovnosti vektorově:

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \\ \varphi_1''(t) \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \varphi_2''(t) \end{bmatrix},$$

ihned vidíme, že vektory

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1'(t) \\ \varphi_1''(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi_2(t) \\ \varphi_2'(t) \\ \varphi_2''(t) \end{bmatrix}$$

jsou lineárně závislé v každém bodě $t \in J$, takže na tomto intervalu platí:

$$\det \begin{bmatrix} y(t) & \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ y'(t) & \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \\ y''(t) & \varphi_1''(t) & \varphi_2''(t) \end{bmatrix} = 0.$$

Rozvineme-li determinant podle prvního sloupce, získáváme na J rovnost tvaru

$$A_1(t) \cdot y''(t) + A_2(t) \cdot y'(t) + A_3(t) \cdot y(t) = 0, \quad (10.21)$$

kde na J platí:

$$A_1(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix} = \det W(t) \neq 0,$$

$$A_2(t) = \varphi_1''(t) \cdot \varphi_2(t) - \varphi_1(t) \cdot \varphi_2''(t), \quad A_3(t) = \varphi_1'(t) \cdot \varphi_2''(t) - \varphi_1''(t) \cdot \varphi_2'(t).$$

Po vydělení rovnosti (10.21) funkcí A_1 (nenulovým Wronskiánem), zjistíme, že na J platí rovnost

$$y''(t) + a_1(t) y'(t) + a_2(t) y(t) = 0,$$

kde pro každé $t \in J$:

$$a_1(t) = \frac{A_2(t)}{A_1(t)}, \quad a_2(t) = \frac{A_3(t)}{A_1(t)}. \quad (10.22)$$

Právě jsme ukázali, že pokud má být libovolná lineární kombinace funkcí φ_1, φ_2 řešením homogenní lineární diferenciální rovnice (10.20), potom funkce a_1, a_2 musí splňovat vztahy (10.22) na J . Koeficienty rovnice (10.20) jsou tedy fundamentálním systémem řešení této rovnice dány jednoznačně. Předpisy (10.22) si přitom nemusíme pamatovat - v zadaných úlohách je vždy snadno spočítáme z příslušných determinantů. Dříve než se pustíme do konkrétních příkladů, jen požádejme laskavého čtenáře, aby si rozmyslel, jak uvedený postup modifikovat pro homogenní LDR libovolného řádu.



Příklad 10.16. Nalezněme homogenní LDR druhého řádu tak, aby funkce φ_1, φ_2 definované na otevřeném intervalu $J = (1, \infty)$ předpisy

$$\varphi_1(t) = e^t, \quad \varphi_2(t) = t,$$

tvořily fundamentální systém řešení této rovnice.

Řešení. Pro určení řešení vlastně stačí zopakovat postup z předchozí poznámky, pro stručnost budeme vynechávat označení nezávislé proměnné t u y - dostaneme tak přímo požadovanou diferenciální rovnici. Na $J = (1, \infty)$ zřejmě platí

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e^t & t \\ e^t & 1 \end{bmatrix} = e^t(1-t) \neq 0,$$

takže:

$$\det \begin{bmatrix} y & \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ y' & \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \\ y'' & \varphi_1''(t) & \varphi_2''(t) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} y(t) & e^t & t \\ y'(t) & e^t & 1 \\ y''(t) & e^t & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

$$e^t(1-t)y'' + te^ty' - e^ty = 0,$$

$$y'' + \frac{t}{1-t}y - \frac{1}{1-t} = 0, \quad t \in (1, \infty).$$

▲

Řešení následujících příkladů lze chápat jako ilustraci stručného zápisu:

Příklad 10.17. Nalezněte homogenní LDR druhého řádu tak, aby funkce φ_1, φ_2 předpisují

$$\varphi_1(t) = \cos t, \quad \varphi_2(t) = \sin t,$$

tvorily fundamentální systém řešení této rovnice.

Řešení.

$$\det \begin{bmatrix} y & \cos t & \sin t \\ y' & -\sin t & \cos t \\ y'' & -\cos t & -\sin t \end{bmatrix} = 0,$$

$$(\cos^2 t + \sin^2 t)y'' + (\cos t \sin t - \sin t \cos t)y' + (\sin^2 t + \cos^2 t)y = 0,$$

$$\underline{\underline{y'' + y = 0.}}$$

▲

Příklad 10.18. Jaká homogenní LDR třetího řádu má fundamentální systém řešení tvořen funkcemi

$$\varphi_1(t) = 1, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_3(t) = t^2?$$

Řešení.

$$\det \begin{bmatrix} y & 1 & t & t^2 \\ y' & 0 & 1 & 2t \\ y'' & 0 & 0 & 2 \\ y''' & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad -\det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot y''' +$$

$$+ \det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot y'' - \det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot y' + \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot y = 0,$$

$$-2 \cdot y''' + 0 \cdot y'' - 0 \cdot y' + 0 \cdot y = 0,$$

$$\underline{\underline{y''' = 0.}}$$

Pozamenejme, že v tomto případě bylo možné diferenciální rovnici $y''' = 0$ jednoduše uhodnout. ▲

Nehomogenní LDR řádu n

Metoda variace konstant

V tomto odstavci popíšeme obecnou metodu nalezení partikulárního řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice za předpokladu, že je znám fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice. Začneme pro jednoduchost s rovnicí druhého řádu. Uvažujme tedy rovnici

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = b(t), \quad (10.23)$$

ve které jsou jak koeficienty a_1, a_2 , tak pravá strana b spojitými funkcemi definovanými na otevřeném intervalu J . Jak již víme, přidružená homogenní rovnice

$$y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0 \quad (10.24)$$

má fundamentální systém řešení tvořený dvojicí funkcí φ_1, φ_2 . Obecné řešení y_h přidružené homogenní rovnice (10.24) tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$y_h(t) = C_1 \cdot \varphi_1(t) + C_2 \cdot \varphi_2(t), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

I.

Podobně jako u rovnice prvního řádu budeme předpokládat, že řešení y_p nehomogenní rovnice (10.23) lze zapsat ve tvaru

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t), \quad (10.25)$$

kde k_1, k_2 jsou vhodné diferencovatelné funkce definované na J (konstanty C_1, C_2 jsme zaměnili funkcemi - odtud název metoda variace konstant).

Má-li být funkce y_p řešením (10.23) na J , musí po dosazení y_p do této rovnice na J , platit vztah

$$y_p''(t) + a_1(t)y_p'(t) + a_2(t)y_p(t) = b(t),$$

který skrývá jeden požadavek pro dvojici hledaných funkcí k_1, k_2 :

$$(k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t))'' + a_1(t)(k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t))' + a_2(t)(k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t)) = b(t).$$

Za chvíli si ukážeme, jak vhodně přidat druhou podmínku.

Nejprve запиšme, jak vypadá první derivace funkce y_p na J . Použitím pravidla o derivaci součinu a následném přeuspořádání získáváme:

$$y_p'(t) = [k_1'(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2'(t) \cdot \varphi_2(t)] + [k_1(t) \cdot \varphi_1'(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2'(t)]. \quad (10.26)$$

Nyní bychom měli vypočítat ještě jednu derivaci a dosadit do (10.23). My si však výpočet druhé derivace nejprve zjednodušíme. Přidáme si již avizovanou druhou podmínku. Tou bude požadavek, aby první sčítanec v hranatých závorkách (v řádku s číslem (10.26)) byl na J nulový:

$$k'_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k'_2(t) \cdot \varphi_2(t) = 0.$$

Tak jsme získali konkrétní tvar prvního požadavku pro derivace funkcí k_1, k_2 . Za chvíli se ukáže, že to byla dobrá volba. Využijeme-li uvedené rovnosti, můžeme napsat

$$y'_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi'_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi'_2(t)$$

a další derivování nám po drobné úpravě dává:

$$y''_p(t) = [k'_1(t) \cdot \varphi'_1(t) + k'_2(t) \cdot \varphi'_2(t)] + [k_1(t) \cdot \varphi''_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi''_2(t)].$$

Nyní jsme připraveni dosadit do (10.23):

$$\begin{aligned} & [k'_1(t) \cdot \varphi'_1(t) + k'_2(t) \cdot \varphi'_2(t)] + [k_1(t) \cdot \varphi''_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi''_2(t)] + \\ & + a_1(t) [k_1(t) \cdot \varphi'_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi'_2(t)] + \\ & + a_2(t) [k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t)] = b(t). \end{aligned}$$

Po roznásobení, přeuspořádání jednotlivých sčítanců a vytknutí výrazů $k_1(t), k_2(t)$ můžeme psát:

$$\begin{aligned} & [k'_1(t) \cdot \varphi'_1(t) + k'_2(t) \cdot \varphi'_2(t)] + \\ & + k_1(t) [\varphi''_1(t) + a_1(t) \varphi'_1(t) + a_2(t) \varphi_1(t)] + \\ & + k_2(t) [\varphi''_2(t) + a_1(t) \varphi'_2(t) + a_2(t) \varphi_2(t)] = b(t). \end{aligned}$$

Protože φ_1, φ_2 jsou řešeními přidružené homogenní rovnice (10.24), funkce ve druhé a třetí hranaté závorce jsou nulové. Uvedený vztah tedy přechází do jednoduchého tvaru

$$k'_1(t) \cdot \varphi'_1(t) + k'_2(t) \cdot \varphi'_2(t) = b(t),$$

který je druhou podmínkou kladenou na derivace funkcí k_1, k_2 .

Napíšeme-li si pro přehlednost obě rovnosti pod sebe

$$\begin{aligned} k'_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k'_2(t) \cdot \varphi_2(t) &= 0, \\ k'_1(t) \cdot \varphi'_1(t) + k'_2(t) \cdot \varphi'_2(t) &= b(t), \end{aligned}$$

vidíme, že jde vlastně o soustavu lineárních rovností pro funkce k'_1, k'_2 , přičemž maticí této soustavy je Wronského maticová funkce:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi'_1(t) & \varphi'_2(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k'_1(t) \\ k'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

II.

Tak a obtížnější část je za námi. Z předpokladu, že řešení y_p nehomogenní rovnice (10.23) lze zapsat ve tvaru (10.25) jsme získali soustavu rovností, které musí splňovat derivace funkcí k_1, k_2 . Zbývá ukázat, že náš výchozí předpoklad o tvaru řešení y_p a diferencovatelnosti funkcí k_1, k_2 byl oprávněný. Proto na J uvažujme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Protože φ_1, φ_2 tvoří fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice (10.24), Wronského matice $W(t)$ je regulární maticí pro každé $t \in J$. To ovšem znamená, že funkce u_1, u_2 jsou na J jednoznačně definovány. Obě funkce jsou na J navíc spojité, což je bezprostřední důsledek spojitosti koeficientů Wronského maticové funkce a funkcí na pravé straně soustavy. Ze spojitosti obou funkcí u_1, u_2 plyne existence primitivní funkce k_1 k u_1 na J a existence primitivní funkce k_2 k u_2 na J :

$$k_1(t) = \int u_1(t) \, dt, \quad k_2(t) = \int u_2(t) \, dt.$$

Definujme nyní na J funkci y_p předpisem

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t).$$

Ze způsobu, jakým jsou utvořeny funkce k_1, k_2 je jasné, že obě jsou diferencovatelné na J a splňují vztahy

$$\begin{aligned} k_1'(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2'(t) \cdot \varphi_2(t) &= 0, \\ k_1'(t) \cdot \varphi_1'(t) + k_2'(t) \cdot \varphi_2'(t) &= b(t). \end{aligned}$$

Odtud plyne, že po výpočtu y_p, y_p', y_p'' a patřičném dosazení přejde rovnice (10.23) v rovnost na J . Tím je ukázáno, že před chvílí definovaná funkce y_p je skutečně řešením (10.23) na J .

Dosud provedenými úvahami jsme vlastně dokázali speciální případ následujícího tvrzení.

Věta 10.19 (O metodě variace konstant pro LDR řádu n). *Budiž dána lineární diferenciální rovnice (10.1), přičemž všechny koeficienty $a_1, a_2, \dots, a_n$ i pravá strana b této rovnice nechť jsou spojitými funkcemi definovanými na otevřeném intervalu J . Nechť na J funkce $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (10.2) přidružené k rovnici (10.1). Pak existují na J diferencovatelné funkce $k_1, k_2, \dots, k_n$ takové, že funkce y_p definovaná na J předpisem*

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t) + \dots + k_n(t) \cdot \varphi_n(t),$$

je na tomto intervalu řešením rovnice (10.1). n -tice derivací $(k'_1, k'_2, \dots, k'_n)$, je přitom na J jednoznačně zadána vztahem

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi'_1(t) & \varphi'_2(t) & \dots & \varphi'_n(t) \\ & & \ddots & \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k'_1(t) \\ k'_2(t) \\ \vdots \\ k'_{n-1}(t) \\ k'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}. \quad (10.27)$$



Poznámka 10.20. Důkaz právě uvedeného tvrzení zůstává pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ téměř beze změn stejný jako odvození, které jsme výše uvedli pro rovnici druhého řádu. Jediné, o čem by mohl čtenář pochybovat je, že získaná soustava rovnic bude skutečně tvaru (10.27). Proto stručně uvedme odvození této soustavy.

Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady věty. Nechť fundamentální systém řešení rovnice (10.2) je tvořen funkcemi $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, tedy

$$y_h(t) = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + \dots + C_n\varphi_n, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Hledejme vztahy pro n -tici na J diferencovatelných funkcí $k_1, \dots, k_n$ tak, aby funkce $y_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y_p(t) = k_1(t)\varphi_1(t) + \dots + k_n(t)\varphi_n(t), \quad t \in J,$$

byla řešením nehomogenní rovnice (10.1). Po dosazení předpokládaného tvaru y_p do rovnice (10.1), získáme jeden požadavek pro n neznámých funkcí. Můžeme si proto dovolit přidat ještě $n - 1$ vhodných podmínek.

Nejprve vypočteme 1. derivaci hledaného řešení y_p na J :

$$\begin{aligned} y'_p(t) &= k'_1(t)\varphi_1(t) + k'_2(t)\varphi_2(t) + \dots + k'_n(t)\varphi_n(t) + \\ &+ k_1(t)\varphi'_1(t) + k_2(t)\varphi'_2(t) + \dots + k_n(t)\varphi'_n(t). \end{aligned}$$

Stručněji:

$$y'_p(t) = \sum_{i=1}^n k'_i(t)\varphi_i(t) + \sum_{i=1}^n k_i(t)\varphi'_i(t).$$

První vztah pro funkce $k'_1, \dots, k'_n$ na J zvolíme takto:

$$\sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi_i(t) = 0. \quad (R_1)$$

Tím jsme si zjednodušili předpis pro druhou derivaci y_p'' :

$$y_p''(t) = \sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi'_i(t) + \sum_{i=1}^n k_i(t) \varphi''_i(t).$$

Druhou podmínku zvolme takto:

$$\sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi'_i(t) = 0. \quad (R_2)$$

Podobně počítejme další derivace funkce y_p a přidávejme příslušné vztahy:

$$y_p'''(t) = \sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi''_i(t) + \sum_{i=1}^n k_i(t) \varphi'''_i(t),$$

$$\sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi''_i(t) = 0, \quad (R_3)$$

$\vdots$

$$y_p^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi_i^{(n-2)}(t) + \sum_{i=1}^n k_i(t) \varphi_i^{(n-1)}(t),$$

$$\sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi_i^{(n-2)}(t) = 0, \quad (R_{n-1})$$

$$y_p^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^n k_i(t) \varphi_i^{(n)}(t).$$

Dosažením funkce y_p a jejich derivací do rovnice (10.1) získáme s přihlédnutím k (R_1) až (R_{n-1}) na J :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^n k_i(t) \varphi_i^{(n)}(t) + a_1(t) \sum_{i=1}^n k_i(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) + \\ & + a_2(t) \sum_{i=1}^n k_i(t) \varphi_i^{(n-2)}(t) + \dots + a_n(t) \sum_{i=1}^n k_i(t) \varphi_i(t) = b(t). \end{aligned}$$

Po zřejmých úpravách lze uvedený vztah napsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) + k_1(t) \left[\varphi_1^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_1^{(n-i)}(t) \right] + \\ & + k_2(t) \left[\varphi_2^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_2^{(n-i)}(t) \right] + \\ & \quad \dots \\ & + k_n(t) \left[\varphi_n^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_n^{(n-i)}(t) \right] = b(t). \end{aligned}$$

Protože každá z funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ je řešením homogenní rovnice (10.2), výrazy v hranatých závorkách jsou nulové, takže můžeme zapsat poslední rovnici ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^n k'_i(t) \varphi_i^{(n-1)}(t) = b(t). \quad (R_n)$$

Nyní je již nahlédnutelné, že n -tice funkcí $(k'_1, k'_2, \dots, k'_n)$ je dána jednoznačně jako řešení soustavy (10.27).

Příklad 10.21. Nalezněme na $\mathbb{R}$ obecné řešení rovnice

$$y'' - \frac{2t}{t^2 + 1} y' + \frac{2}{t^2 + 1} y = t^2 + 1,$$

víme-li, že fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice

$$y'' - \frac{2t}{t^2 + 1} y' + \frac{2}{t^2 + 1} y = 0,$$

na $\mathbb{R}$ je tvořen dvojicí funkcí φ_1, φ_2 zadaných předpisem

$$\varphi_1(t) = t, \quad \varphi_2(t) = t^2 - 1.$$

Řešení. Nejprve nalezneme partikulární řešení

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t)$$

zadané rovnice na $\mathbb{R}$. K tomu je potřeba vyřešit soustavu rovnic (10.27) pro neznámé funkce k'_1, k'_2 z Věty 10.19. Protože

$$\varphi'_1(t) = 1, \quad \varphi'_2(t) = 2t,$$

půjde o jednoznačně řešitelnou soustavu

$$\begin{bmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k'_1(t) \\ k'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Řešení uvedené soustavy můžeme nalézt třeba Cramerovým pravidlem. Determinantem soustavy je Wronskián

$$\det W(t) = \det \begin{bmatrix} t & t^2 - 1 \\ 1 & 2t \end{bmatrix} = t^2 + 1,$$

musíme ještě vypočítat (pravou stranou soustavy postupně nahrazujeme sloupce Wronskiánu)

$$\begin{aligned} \det W_1(t) &= \det \begin{bmatrix} 0 & t^2 - 1 \\ t^2 + 1 & 2t \end{bmatrix} = (1 - t^2) \cdot (t^2 + 1), \\ \det W_2(t) &= \det \begin{bmatrix} t & 0 \\ 1 & t^2 + 1 \end{bmatrix} = t \cdot (t^2 + 1). \end{aligned}$$

Podle Cramerova pravidla platí

$$k'_1(t) = \frac{\det W_1(t)}{\det W(t)} = \frac{(1-t^2) \cdot (t^2+1)}{t^2+1} = 1-t^2,$$

$$k'_2(t) = \frac{\det W_2(t)}{\det W(t)} = \frac{t \cdot (t^2+1)}{t^2+1} = t,$$

takže například

$$k_1(t) = \int (1-t^2) dt = t - \frac{t^3}{3}, \quad k_2(t) = \int t dt = \frac{t^2}{2}.$$

Partikulární řešení y_p zadané nehomogenní rovnice je tedy dáno předpisem

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}\right) \cdot t + \frac{t^2}{2} \cdot (t^2 - 1) = \frac{t^4 + 3t^2}{6}.$$

Podle principu superpozice je obecné řešení nehomogenní rovnice dáno jako součet partikulárního řešení y_p této rovnice a obecného řešení přidružené homogenní rovnice. Proto lze psát:

$$y(t) = C_1 \cdot t + C_2 \cdot (t^2 - 1) + \frac{t^4 + 3t^2}{6}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme ještě na závěr, že obecné řešení zadané rovnice jsme mohli napsat v poněkud modifikované podobě rovnou, pokud bychom při integraci funkcí k'_1, k'_2 zahrnuli do výsledku integrační konstanty C_1, C_2 :

$$y(t) = \left(t - \frac{t^3}{3} + C_1\right) \cdot t + \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right) \cdot (t^2 - 1), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Právě uvedená poznámka zřejmě platí obecně, její platnost plyne z tvaru obecného řešení homogenní rovnice a tvaru řešení nehomogenní rovnice získaného metodou variace konstant.

▲

Příklad 10.22. Určete maximální řešení Cauchyovy úlohy:

$$y''' - 2y'' + y' = \frac{e^t}{1+t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1, y''(0) = -3.$$

Řešení. Vzhledem k počáteční podmínce a pravé straně rovnice, bude maximální řešení úlohy definováno na intervalu $J = (-1; +\infty)$. Proto budeme od této chvíle všechny úvahy provádět na tomto intervalu. Snadno lze zjistit, že funkce $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$

definované předpisy $\varphi_1(t) = e^t$, $\varphi_2(t) = t \cdot e^t$, $\varphi_3(t) = 1$, tvoří na J fundamentální systém řešení přidružené homogenní rovnice

$$y''' - 2y'' + y' = 0.$$

Řešení y_p budeme hledat metodou variace konstant, to znamená, že předpokládáme:

$$y_p(t) = k_1(t) \cdot e^t + k_2(t) \cdot t \cdot e^t + k_3(t), \quad t \in J. \quad (10.28)$$

Odpovídající systém lineárních rovnic na J :

$$k_1'(t) \cdot e^t + k_2'(t) \cdot t e^t + k_3'(t) = 0,$$

$$k_1'(t) \cdot e^t + k_2'(t) \cdot (1+t) \cdot e^t = 0,$$

$$k_1'(t) \cdot e^t + k_2'(t) \cdot (2+t) \cdot e^t = \frac{e^t}{1+t}.$$

Z posledních dvou rovnic dostáváme postupně: $k_2'(t) = \frac{1}{1+t}$, $k_1(t) = -1$. Z prvé rovnice pak plyne $k_3'(t) = \frac{e^t}{1+t}$. Funkce k_1, k_2, k_3 lze tedy na J například volit takto :

$$k_1(t) = -t, \quad k_2(t) = \ln(1+t), \quad k_3(t) = \int_0^t \frac{e^s}{1+s} ds.$$

Poznamenejme, že k použití určitého integrálu jako funkce horní meze jsme se uchýlili proto, že primitivní funkce k funkci $\frac{e^t}{1+t}$ není elementární.

Po dosazení zjištěných funkcí do (10.28) a aplikaci principu superpozice řešení můžeme napsat obecné řešení uvažované rovnice:

$$y(t) = C_1 \cdot e^t + C_2 t \cdot e^t + C_3 - t \cdot e^t + \ln(1+t) \cdot t \cdot e^t + \int_0^t \frac{e^s}{1+s} ds,$$

$C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$, $C_3 \in \mathbb{R}$.

Řešení φ Cauchyovy úlohy musí splňovat počáteční podmínky : $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -3$, takže pro konstanty C_1, C_2, C_3 získáváme po dvojím derivování a úpravě následující systém rovnic :

$$C_1 + C_3 = 0,$$

$$C_1 + C_2 = -1,$$

$$C_1 + 2C_2 = -3.$$

Řešením této soustavy je uspořádaná trojice $(1, -2, -1)$. Maximálním řešením uvažované Cauchyovy úlohy je proto funkce φ daná předpisem :

$$\varphi(t) = e^t \cdot (1 - 3t) - 1 + t \cdot e^t \ln(1+t) + \int_0^t \frac{e^s}{1+s} ds.$$

▲

Příklad 10.23. Na intervalu $J = (0, \infty)$ určíme řešení y_p diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = t - 2 + \frac{e^t}{t}.$$

Řešení. Nejprve uhadneme řešení $u(t) = t$ rovnice

$$y'' - 2y' + y = t - 2.$$

Nyní nalézneme na J metodou variace konstant řešení v rovnice

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t}.$$

Protože fundamentální systém přidružené homogenní rovnice je tvořen funkcemi tvaru (prověřte)

$$\varphi_1(t) = e^t, \quad \varphi_2(t) = te^t,$$

můžeme sestavit příslušnou soustavu s Wronského maticí ve tvaru

$$\begin{bmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1'(t) \\ k_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{e^t}{t} \end{bmatrix}.$$

Snadno vypočteme Wronskián a další determinanty potřebné pro aplikaci Cramerova pravidla:

$$W(t) = \det \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{bmatrix} = e^{2t},$$

$$W_1(t) = \det \begin{bmatrix} 0 & te^t \\ \frac{e^t}{t} & (t+1)e^t \end{bmatrix} = -e^{2t}, \quad W_2(t) = \det \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ e^t & \frac{e^t}{t} \end{bmatrix} = \frac{e^{2t}}{t}.$$

Odtud na J například

$$k_1(t) = \int \frac{-e^{2t}}{e^{2t}} dt = \int -1 dt = -t, \quad k_2(t) = \int \frac{\frac{e^{2t}}{t}}{e^{2t}} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln t.$$

Předpis pro řešení v na J tedy vypadá takto:

$$v(t) = k_1(t) \cdot \varphi_1(t) + k_2(t) \cdot \varphi_2(t) = -te^t + te^{t \ln t}.$$

Nyní jsme připraveni aplikovat princip superpozice a zapsat předpis pro řešení původně zadané rovnice na J :

$$y_p(t) = u(t) + v(t) = t - te^t + te^{t \ln t}.$$



Metoda speciální pravé strany

Jak jsme si ukázali, je-li rovnice (10.1) nehomogenní, pak její řešení lze (po nalezení fundamentálního systému řešení přidružené homogenní rovnice (10.2)) hledat metodou variace konstant. V případě rovnice s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou b , lze většinou postupovat rychleji.

Věta 10.24 (O rovnicích se speciální pravou stranou). *Uvažujme diferenciální rovnici s konstantními koeficienty ve tvaru*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = e^{\alpha t} \cdot [P_1(t) \cdot \sin(\beta t) + P_2(t) \cdot \cos(\beta t)], \quad (10.4)$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ a P_1, P_2 jsou reálné polynomy. Označme písmenem s větší ze stupňů polynomů P_1, P_2 . Přitom se dohodneme, že stupněm konstantního nenulového polynomu bude číslo 0 a stupněm nulového polynomu bude číslo -1 . Nechť číslo M udává algebraickou násobnost čísla $\alpha + i \cdot \beta$ jakožto kořene charakteristického polynomu $\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_n$, přičemž v případě, že $\alpha + i\beta$ není kořenem tohoto polynomu, klademe $M = 0$.

Pak na $\mathbb{R}$ existuje řešení y_p rovnice (10.4), které lze zapsat ve tvaru :

$$y_p(t) = t^M \cdot e^{\alpha t} \cdot [Q_1(t) \cdot \sin(\beta t) + Q_2(t) \cdot \cos(\beta t)],$$

kde Q_1, Q_2 jsou reálné polynomy stupně nejvýše s .

Poznámka 10.25. Je-li v uvedené větě $\sin \beta = 0$, je vhodné zvolit $P_1 = 0$. Je-li $\cos \beta = 0$, položíme $P_2 = 0$.

Poznámka 10.26. Polynomy Q_1, Q_2 určujeme dosazením předpokládaného tvaru řešení y_p do rovnice (10.4). K určení polynomů Q_1, Q_2 potřebujeme určit jejich koeficienty. To se provádí metodou neurčitých koeficientů (vzpomeňme si na hledání rozkladu ryzí racionální funkce na parciální zlomky). Nejlepší bude daný postup demonstrovat na příkladech:

Příklad 10.27. Nalezneme maximální řešení diferenciální rovnice

$$y'' - 2y' + y = e^t.$$

Řešení. Nejprve nalezneme kořeny charakteristického polynomu přidružené homogenní rovnice. Protože

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2,$$

charakteristický polynom má jediný dvojnásobný kořen $\lambda_1 = 1$.

Protože na $\mathbb{R}$ platí

$$e^t = e^{1 \cdot t} \cdot [0 \cdot \sin(0 \cdot t) + 1 \cdot \cos(0 \cdot t)]$$

zadaná rovnice je rovnicí s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Zřejmě můžeme položit

$$\alpha = 1, \beta = 0, P_1(t) = 0 \text{ na } \mathbb{R}, P_2(t) = 1 \text{ na } \mathbb{R},$$

takže

$$s = \max \{-1, 0\} = 0.$$

Protože číslo $\alpha + \beta i = 1 + 0i = 1$ je dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu přidružené homogenní rovnice, musíme položit

$$M = 2.$$

Z Věty 10.24 plyne, že existují konstantní funkce

$$Q_1(t) = A, A \in \mathbb{R}, \quad Q_2(t) = B, B \in \mathbb{R},$$

takové, že zadaná rovnice má na $\mathbb{R}$ řešení y_p , které lze vyjádřit předpisem

$$y_p(t) = t^2 \cdot e^{1 \cdot t} \cdot [A \cdot \sin(0 \cdot t) + B \cdot \cos(0 \cdot t)] = t^2 \cdot e^t \cdot B.$$

Poznamenejme, že na hodnotě čísla A nezáleží, protože $\beta = 0$. K vyřešení úlohy zbývá nalézt číslo B , které zjistíme po dosazení y_p do rovnice. Po výpočtu potřebných derivací

$$y_p(t) = Bt^2 e^t, \quad y_p'(t) = B(t^2 + 2t)e^t, \quad y_p''(t) = B(t^2 + 4t + 2)e^t,$$

můžeme dosadit do zadané rovnice:

$$B(t^2 + 4t + 2)e^t - 2[B(t^2 + 2t)e^t] + Bt^2 e^t = e^t.$$

Po drobných ekvivalentních úpravách ihned zjistíme, že

$$2B = 1,$$

takže $B = \frac{1}{2}$, a tedy

$$y_p(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t.$$

▲

Příklad 10.28. Určeme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = \cos(2t). \quad (10.5)$$

Řešení. Nejprve vypočítáme obecné řešení příslušné přidružené homogenní rovnice

$$y''' - y'' - 5y' - 3y = 0.$$

Charakteristický polynom

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3 = (\lambda - 3)^1 \cdot (\lambda + 1)^2$$

má zjevně kořen $\lambda_1 = 3$ násobnosti 1 a kořen $\lambda_2 = -1$ násobnosti 2. Odtud plyne, že obecné řešení přidružené homogenní rovnice můžeme psát ve tvaru

$$y_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}, \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Nyní můžeme přistoupit ke hledání partikulárního řešení y_p zadané rovnice (10.5). Pravou stranu uvažované nehomogenní rovnice lze zřejmě psát takto :

$$\cos(2t) = e^{0 \cdot t} \cdot [1 \cdot \cos(2t) + 0 \cdot \sin(2t)].$$

Odtud plyne, že můžeme použít Větu 10.24, přičemž postupně klademe $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $P_1(t) = 1$, $P_2(t) = 0$. Pak je ovšem

$$s = \max \{st.P_1, st.P_2\} = \max \{0, -1\} = 0,$$

a protože číslo

$$\alpha + \beta i = 0 + 2i$$

není kořenem charakteristické rovnice ($2i \neq 3$, $2i \neq -1$), je $M = 0$. Podle tvrzení Věty existuje řešení y_p rovnice (10.5), které lze psát ve tvaru

$$y_p(t) = t^0 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot [Q_1(t) \cdot \cos(2t) + Q_2(t) \cdot \sin(2t)],$$

přičemž polynomy Q_1, Q_2 mají stupeň nejvýše 0, jde tedy o konstantní funkce. Označíme-li

$$Q_1(t) = A, \quad (A \in \mathbb{R}), \quad Q_2(t) = B, \quad (B \in \mathbb{R}),$$

můžeme po drobné úpravě psát vztah pro y_p takto:

$$y_p(t) = A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t).$$

K nalezení hodnot A, B potřebujeme dosadit do rovnice (10.5). Proto si nejprve vypočteme potřebné derivace a přehledně vše uspořádáme:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A \cdot \sin(2t) + B \cdot \cos(2t), \\ y_p'(t) &= 2A \cdot \cos(2t) - 2B \cdot \sin(2t), \\ y_p''(t) &= -4A \cdot \sin(2t) - 4B \cdot \cos(2t), \\ y_p'''(t) &= -8A \cdot \cos(2t) + 8B \cdot \sin(2t). \end{aligned}$$

Po dosazení do (10.5) a několika úpravách získáváme rovnici

$$\cos(2t) \cdot (B - 18A - 1) + \sin(2t) \cdot (18B + A) = 0,$$

ze které, vzhledem k lineární nezávislosti funkcí $\sin(2t), \cos(2t)$ obdržíme následující jednoznačně řešitelnou soustavu lineárních rovnic:

$$-18A + B = 1, \quad A + 18B = 0.$$

Není těžké ověřit, že řešením této soustavy je uspořádaná dvojice čísel: $(-\frac{18}{325}, \frac{1}{325})$. Rovnice (10.5) má tedy řešení

$$y_p(t) = \frac{1}{325}(\cos(2t) - 18\sin(2t)).$$

Při znalosti obecného řešení přidružené homogenní rovnice můžeme nyní po aplikaci principu superpozice rovnou napsat obecné řešení studované rovnice:

$$y(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t} + \frac{1}{325}(\cos(2t) - 18\sin(2t)), \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$$

▲

Poznámka 10.29. Větu 10.24 lze použít i na rovnici prvního řádu ve tvaru

$$y' = e^{\alpha t} \cdot [P_1(t) \cdot \sin(\beta t) + P_2(t) \cdot \cos(\beta t)],$$

to znamená, při výpočtu integrálů typu

$$\int e^{\alpha t} \cdot [P_1(t) \cdot \sin(\beta t) + P_2(t) \cdot \cos(\beta t)] dt.$$

Příklad 10.30. Vypočtěte na $\mathbb{R}$

$$\int t \cdot \cos t dt.$$

Řešení. Na $\mathbb{R}$ hledáme řešení rovnice

$$y' = t \cdot \cos t. \quad (10.6)$$

Zřejmě lze postupovat podle Věty 10.24, kde

$$\alpha = 0, \beta = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = 0, \quad s = 1, M = 0,$$

takže primitivní funkce k funkci $t \cdot \cos t$ je pro vhodná reálná čísla A, B, C, D dána předpisem

$$y_p(t) = (At + B) \cdot \sin t + (Ct + D) \cdot \cos t.$$

Po derivování funkce y_p a dosazení do vztahu (10.6) získáváme:

$$(A - D) \sin t - Ct \sin t + At \cos t + (B + C) \cos t = 0 \cdot \sin t + 0 \cdot t \sin t + 1 \cdot t \cos t + 0 \cdot \cos t.$$

Z lineární nezávislosti systému funkcí daných předpisy $\sin t, \cos t, t \sin t, t \cos t$ plyne, že na základě právě uvedené rovnice můžeme sestavit jednoznačně řešitelnou soustavu rovnic

$$A - D = 0, \quad -C = 0, \quad A = 1, \quad B + C = 0.$$

Snadno nahlédneme, že

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 1,$$

takže například:

$$\int t \cdot \cos t \, dt = t \cdot \sin t + \cos t.$$

▲

Příklad 10.31. Nalezněme obecné řešení diferenciální rovnice

$$y''' = \cos(t).$$

Řešení. Uvedená rovnice je rovnicí s konstantními koeficienty a speciální pravou stranou. Proto může být řešena pomocí Věty 10.24 (provedte). Daleko rychleji však rovnici vyřešíme přímou integrací. Stručný zápis postupu:

$$y''' = \cos t \Rightarrow y'' = A + \sin t \Rightarrow y' = B + At - \cos t \Rightarrow y = C + Bt + \frac{1}{2}At^2 - \sin t,$$

Obecné řešení:

$$\underline{\underline{y(t) = C_3 + C_2t + C_1t^2 - \sin t, \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.}}$$

▲

Příklady k procvičení

- Nalezněte intervaly, na kterých jsou definována maximální řešení zadaných Cauchyových úloh:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} y''' - \frac{\sin t}{\cos^3 t} y'' + \ln\left(t + \frac{99}{88}\right) y = t^2, \\ y(-1) = 3, y'(-1) = 33, y''(-1) = 333, \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} y'' - \frac{1}{t^2+t-2} y' = \arcsin\left(t - \frac{1}{2}\right), \\ y(0) = 4, y'(0) = 44, \end{cases} \\ \text{c)} \quad \begin{cases} (t^2 + 1) y'' - y' = \arccos \frac{t}{2}, \\ y(0) = 5, y'(0) = -55. \end{cases} & \end{array}$$

- Nalezněte maximální řešení zadaných Cauchyových úloh:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} y'' - \frac{3}{t^2} y' = \frac{1}{t^2}, \\ y(3) = 0, y'(3) = -\frac{1}{3}, \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} y''' - \sin(\cos(\sin(t^2))) \cdot y'' = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0. \end{cases} \end{array}$$

- Nalezněte obecná řešení následujících homogenních lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad y'' - 20y' + 64y = 0, & \text{b)} \quad y'' - 7y = 0, \\ \text{c)} \quad y'' + 64y = 0, & \text{d)} \quad y'' - 16y' + 64y = 0, \\ \text{e)} \quad y'' + 2y' + 3y = 0, & \text{f)} \quad y''' - y'' - y' + y = 0, \\ \text{g)} \quad y''' - 3y'' + 3y' + y = 0, & \text{h)} \quad y^{(4)} + 10y'' + 9y = 0. \end{array}$$

4. Jak vypadá LDR řádu 4 s konstantními reálnými koeficienty, jestliže kořeny jejího charakteristického polynomu jsou:

$$1, 1, -3i, 3i.$$

5. Nalezněte obecné řešení homogenní lineární diferenciální rovnice čtvrtého řádu s konstantními reálnými koeficienty, víte-li, že jedním z řešení této rovnice je funkce daná předpisem $t \cos(4t)$. Jak vypadá příslušná rovnice?

6. Nalezněte řešení zadaných Cauchyových úloh:

$$\text{a) } \begin{cases} y'' + 2y' + 3y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = -1, \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' + y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 3. \end{cases}$$



7. Napište homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu, jejímž fundamentálním systémem řešení je dvojice zadaných funkcí:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \varphi_1(t) = t, t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right), \quad \varphi_2(t) = e^{2t}, t \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right), \\ \text{b) } & \varphi_1(t) = 1, t \in (0, \infty), \quad \varphi_2(t) = \ln(t^2 + 1), t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

8. Diferenciální rovnice $y'' - \frac{6}{t^2}y = 0$ má obecné řešení $y_h(t) = C_1 t^3 + C_2 \frac{1}{t^2}$, $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$. Určete řešení y_p diferenciální rovnice $y'' - \frac{6}{t^2}y = t \ln t$.

9. Nalezněte obecná řešení zadaných lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \text{a) } & y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^5}, & \text{b) } & y'' + 4y = \sin^2(2t), \\ \text{c) } & y''' - 5y'' + 25y' - 125y = 1000, & \text{d) } & y'' - y' - 2y = e^{3t}, \\ \text{e) } & y'' - 6y' + 25y = 50t^3 - 36t^2 - 63t + 18. \end{aligned}$$

10. Nalezněte řešení zadaných Cauchyových úloh:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} y'' + 9y = \frac{1}{\sin(3t)}, \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}, \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} y'' + 16y = 1, \quad y(0) = \frac{1}{8}, \\ y(0) = \frac{1}{8}, y'(0) = \frac{1}{4}, \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} y'' + 4y = \sin t + 2 \sin(3t), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

11. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} y''(t) + 10y(t) = 0, \\ y(0) = 0,1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

z Příkladu 1.6 popisující výchylku y kyvadla v závislosti na čase.

12. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 50y(t) = -10, \\ y(0) = 0,1, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

z Příkladu 1.7 popisující výchylku y závaží, které je zavěšeno na pružině, v závislosti na čase.

13. Vyřešte úlohy

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} q''(t) + 2q'(t) + q(t) = 10, \\ q(0) = 0, \quad q'(0) = 0, \end{cases} \\ \text{b)} \quad & \begin{cases} q''(t) + 2q'(t) + q(t) = 0, \\ q(0) = 10, \quad q'(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

z Příkladu 1.8 popisující hodnotu elektrického náboje q v obvodu popsaném v tomto příkladě v závislosti na čase.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $\left(-\frac{99}{88}, \frac{\pi}{2}\right)$, b) $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$,
c) $(-2, 2)$.
2. a) $\varphi(t) = \frac{3-t}{3}, t \in (0, \infty)$, b) $\varphi(t) = 1, t \in \mathbb{R}$.
3. a) $y(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{16t}, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$,
b) $y(t) = C_1 e^{-\sqrt{7}t} + C_2 e^{\sqrt{7}t}, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$,
c) $y(t) = C_1 \cos(8t) + C_2 \sin(8t), C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$,
d) $y(t) = C_1 e^{8t} + C_2 t e^{8t}, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$,
e) $y(t) = C_1 e^{-t} \cos(\sqrt{2}t) + C_2 e^{-t} \sin(\sqrt{2}t), C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}$,
 $t \in \left(\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R}$,
f) $y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{-t}, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R}$,
g) $y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R}$,
h) $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \cos t + C_3 \sin 3t + C_4 \sin 3t, C_1 \in \mathbb{R}, \dots, C_4 \in \mathbb{R}$.
4. $y^{(4)} - 2y''' + 10y'' - 18y' + 9y = 0$.
5. $y(t) = C_1 \cos 4t + C_2 t \cos 4t + C_3 \sin 4t + C_4 t \sin 4t, C_1 \in \mathbb{R}, \dots, C_4 \in \mathbb{R}$,
 $y^{(4)} + 16y'' + 256y = 0$.
6. a) $\varphi(t) = e^{-t} \cos(\sqrt{2}t), t \in \mathbb{R}$,
b) $\varphi(t) = (2t^2 - t + 1)e^t, t \in \mathbb{R}$.
7. a) $y'' - \frac{4t}{2t-1}y' + \frac{4}{2t-1} = 0$,
b) $y'' + \frac{t^2-1}{t(t^2+1)}y' = 0$.

8. $y_p(t) = \frac{t^3}{10} \ln^2 t + \frac{t^3(1-5 \ln t)}{125}.$
9. a) $y(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + \frac{1}{12} t^{-3} e^t, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R},$
b) $y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{6} \cos^2(2t) + \frac{1}{12} \sin^2(2t), C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R},$
c) $y(t) = C_1 e^{5t} + C_2 \sin(5t) + C_3 \cos(5t) - 8, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}, C_3 \in \mathbb{R},$
d) $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R},$
e) $y(t) = C_1 e^{3t} \cos(4t) + C_2 e^{3t} \sin(4t) + 2t^3 - 3t, C_1 \in \mathbb{R}, C_2 \in \mathbb{R}.$
10. a) $\varphi(t) = \frac{\sin(3t)}{9} (9 + \ln(\sin(3t))) - \frac{t \cos(3t)}{3}, t \in (0, \frac{\pi}{3}),$
b) $\varphi(t) = \frac{1}{16} (\cos(4t) + \sin(4t) + 1), t \in \mathbb{R},$
c) $\varphi(t) = \frac{1}{30} (13 \sin(2t) + 10 \sin t - 12 \sin(3t)), t \in \mathbb{R}.$
11. $\varphi(t) = 0,1 \cdot \cos(\sqrt{10} \cdot t), t \in \mathbb{R}.$
12. $\varphi(t) = \frac{1}{70} \cdot e^{-t} \cdot \sin(7 \cdot t) + 0,1 \cdot e^{-t} \cdot \cos(7 \cdot t) - 0.2, t \in \mathbb{R}.$
13. a) $q(t) = -10 \cdot e^{-t} - 10 \cdot t \cdot e^{-t} + 10, t \in \mathbb{R},$
b) $q(t) = 10 \cdot e^{-t} + 10 \cdot t \cdot e^{-t}, t \in \mathbb{R}.$

Kapitola 11

Systémy obyčejných diferenciálních rovnic

V úvodní kapitole jsme uvedli některé úlohy, které vedou k soustavám obyčejných diferenciálních rovnic. Uvedme si ještě jeden příklad, který ukazuje na souvislost mezi obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu a soustavou dvou diferenciálních rovnic.

Příklad 11.1. Pozorujme vertikální, v čase t proměnnou pozici $y_1(t)$ parašutisty seskakujícího do propasti (v uvažovaném modelu vylučujeme vliv větru). Na parašutistu působí gravitační síla G měřená v Newtonech, takže

$$G = m \cdot g,$$

kde $m > 0$ je hmotnost parašutisty v kg a $g \doteq 9.81 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$ je konstanta tíhového zrychlení. Kromě uvedené síly je pohyb parašutisty bržděn třecí silou (opět měříme v Newtonech)

$$F(t) = -k \cdot y_1'(t),$$

která je přímo úměrná rychlosti pádu. Koeficient tření $k > 0$, který charakterizuje především plochu použitého padáku a hustotu vzduchu v propasti, nechť je udán v jednotkách $\frac{\text{Ns}}{\text{m}}$. Podle Newtonova zákona síly pak platí v každém okamžiku t pádu vztah

$$m \cdot y_1''(t) = m \cdot g - k \cdot y_1'(t),$$

tedy

$$y_1''(t) = g - \frac{k}{m} \cdot y_1'(t).$$

Označíme-li

$$y_2(t) = y_1'(t), \tag{11.1}$$

pak funkce y_2 popisuje okamžitou rychlost parašutisty a po dosazení do předchozího vztahu můžeme psát

$$y_2'(t) = g - \frac{k}{m} \cdot y_2. \tag{11.2}$$

Poloha a rychlost padajícího parašutisty je tedy vektorovou funkcí času, která vyhovuje soustavě obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{k}{m} \cdot y_1 + g. \end{aligned}$$

▲

Všimněme si, že při zápisu soustav diferenciálních rovnic, podobně jako v případě diferenciálních rovnic, nezávisle proměnnou t u neznámých funkcí (y_1, y_2) obvykle nevypisujeme. Definujeme-li vektorovou funkci $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ předpisem

$$f(\beta, \gamma) = \begin{pmatrix} f_1(\beta, \gamma) \\ f_2(\beta, \gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -\frac{k}{m} \cdot \beta + g \end{pmatrix}$$

a označíme-li $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, pak můžeme uvedenou soustavu zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

nebo stručněji

$$y' = f(y).$$

Pojem řešení soustavy ODR

V další části textu budeme předpokládat, že čtenář je obeznámen se základními pojmy a obvyklým značením používaným v lineární algebře a teorii vektorových funkcí.

Upřesněme, co budeme chápat pod pojmem řešení soustavy ODR prvního řádu. Všimněme si přitom podobnosti definice se zavedením pojmu řešení pro případ jednotlivých diferenciálních rovnic.

Definice 11.2. Nechť je dána vektorová funkce $f : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Řekneme, že vektorová funkce $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešením soustavy ODR

$$y' = f(t, y) \tag{11.3}$$

na otevřeném intervalu $J \subset \mathbb{R}$, jestliže pro každé $t \in J$ platí rovnost

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)). \tag{11.4}$$

Poznámka 11.3. Po dosazení řešení φ do (11.3) tato rovnice tedy přejde v rovnost dvou vektorových funkcí na příslušném intervalu. Označíme-li postupně

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n),$$

můžeme soustavu (11.3) zapsat po složkách ve tvaru

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}$$

zatímco vektorovou rovnost (11.4) lze zapsat takto:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= f_1(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ \varphi_2'(t) &= f_2(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \\ &\dots \\ \varphi_n'(t) &= f_n(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)). \end{aligned}$$

Příklad 11.4. Je-li $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\alpha, \beta, \gamma) = (f_1(\alpha, \beta, \gamma), f_2(\alpha, \beta, \gamma)) = (\gamma, \beta^2 + \gamma - \alpha^4 - 2\alpha + 2)$, pak soustava (11.3) přechází do konkrétní podoby

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1^2 + y_2 - t^4 - 2t + 2. \end{aligned}$$

Lehce nahlédneme, že například funkce

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (t^2, 2t)$$

je na intervalu $J = \mathbb{R}$ řešením zadané soustavy. Na J totiž platí

$$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \varphi_2'(t)) = (2t, 2),$$

takže pro každé $t \in J$ jsou současně splněny požadované rovnosti

$$\begin{aligned} (t^2)' &= 2t \\ (2t)' &= (t^2)^2 + (2t) - t^4 - 2t + 2. \end{aligned}$$

▲

V případě zkoumání jednotlivých obyčejných diferenciálních rovnic jsme často zadávali ještě počáteční podmínku umožňující jednoznačný výběr řešení. Ukazuje se, že v případě soustav n obyčejných diferenciálních rovnic je rozumné zadat systém n počátečních podmínek.

Nechť je dáno číslo $t_0 \in \mathbb{R}$ a vektor $y_0 \in \mathbb{R}^n$. K soustavě rovnic (11.3) připojme požadavek, aby hledaná vektorová funkce v bodě t_0 nabývala hodnoty y_0 :

$$y(t_0) = y_0. \quad (11.5)$$

Požadavku (11.5) se říká počáteční podmínka. Úlohu (11.3), (11.5) nazýváme Cauchyovou úlohou. Řekneme, že funkce φ je řešením Cauchyovy úlohy (11.3), (11.5) (na otevřeném intervalu J), jestliže φ je řešením (11.3) (na J) a navíc platí $\varphi(t_0) = y_0$.

Stejným způsobem jako v případě jednotlivých rovnic se definuje pojem maximálního řešení v případě soustav obyčejných diferenciálních rovnic. Formulaci definice přenechme čtenáři jako jednoduché opakování.

Pro Cauchyovu úlohu v případě soustav rovnic lze formulovat tvrzení analogická výrokům, které jsme formulovali pro jednotlivé obyčejné diferenciální rovnice. Platí například přirozené zobecnění Peanovy věty o existenci řešení. Pro čtenáře, který doposud není příliš obeznámen s teorií vektorových funkcí, poznamenejme, že vektorová funkce

$$f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

je spojitá právě tehdy, když jsou současně spojitě všechny její komponenty

$$f_1 : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}, f_2 : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Věta 11.5 (Peanova, o existenci řešení). *Nechť $f : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkce definovaná na otevřené množině a bod $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ patří do definičního oboru funkce f . Pak Cauchyova úloha (11.3), (11.5) má alespoň jedno maximální řešení.*

Než se pustíme do formulace věty o existenci a jednoznačnosti pro soustavy rovnic, dohodněme se, že je-li dána vektorová funkce $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, pak symbolem $\frac{\partial f}{\partial z}$ budeme rozumět vektorovou funkci $(\frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial z}) : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, která je složená z příslušných parciálních derivací jednotlivých komponent funkce f podle proměnné z .

Věta 11.6 (O existenci a jednoznačnosti). *Předpokládejme, že $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá vektorová funkce definovaná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+n}$, přičemž $(t_0, y_0) \in \Omega$. Nechť na Ω jsou navíc spojitě vektorové funkce $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$, to znamená, že jsou zde spojitě parciální derivace všech složek funkce f podle druhé až n -té proměnné. Potom Cauchyova úloha (11.3), (11.5) má právě jedno maximální řešení.*

Příklad 11.7. Uvažujme Cauchyovu úlohu

$$\begin{aligned} y_1' &= t + \ln(y_1^2 + y_2^2) \\ y_2' &= ty_1y_2, \\ y_1(1) &= 22 \\ y_2(1) &= 333. \end{aligned}$$

Píšeme-li postupně

$$\begin{aligned} f(t, y_1, y_2) &= (f_1(t, y_1, y_2), f_2(t, y_1, y_2)) = (t + \ln(y_1^2 + y_2^2), ty_1y_2), \\ \Omega &= \{(t, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 > 0\}, \quad t_0 = 1, \quad y_0 = (22, 333), \\ \frac{\partial f}{\partial y_1}(t, y_1, y_2) &= \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2}, ty_2 \right), \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}(t, y_1, y_2) = \left(\frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2}, ty_1 \right), \end{aligned}$$

ihned vidíme, že jsou splněny všechny předpoklady věty o existenci a jednoznačnosti řešení. Zadaná Cauchyova úloha má tedy právě jedno maximální řešení. ▲

Soustavy homogenních lineárních obyčejných diferenciálních rovnic

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a pro všechna $i = 1, 2, \dots, n$ a $j = 1, 2, \dots, n$ jsou dány funkce $a_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Soustavu obyčejných diferenciálních rovnic tvaru

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n, \\ y_2' &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n, \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n \end{cases} \quad (11.6)$$

nazýváme homogenní systém lineárních diferenciálních rovnic.

Utvořme maticovou funkci $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$. Jestliže na správném místě (za účelem maticového násobení) ztotožníme vektor s jednosloupcovou maticí, lze (11.6) zapsat stručněji ve tvaru

$$y' = A(t) \cdot y. \quad (11.7)$$

Pro homogenní soustavy lze formulovat zesílení obecného tvrzení o existenci a jednoznačnosti.

Věta 11.8 (O existenci a jednoznačnosti pro homogenní soustavy). *Nechť J je otevřený interval, $t_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Uvažujme Cauchyovu úlohu (11.6),*

$$y(t_0) = y_0. \quad (11.8)$$

Předpokládejme, že pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ a pro všechna $j = 1, 2, \dots, n$ jsou reálné funkce a_{ij} spojité funkce definované na J .

Pak existuje právě jedno řešení φ Cauchyovy úlohy (11.6), (11.8), které je definováno na celém intervalu J .

Poznámka 11.9. V případě homogenního systému lineárních diferenciálních rovnic se vyplatí uvažovat rovněž komplexní řešení těchto systémů.

Nechť $J \subset \mathbb{R}$ a budiž dány reálné vektorové funkce $u \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ a $v \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$. Pak lze uvažovat komplexní funkci $\psi \stackrel{\text{ozn.}}{=} u + iv$ jako funkci zadanou předpisem:

$$\forall t \in J \quad \psi(t) = u(t) + iv(t).$$

Definice 11.10. Derivací ψ' komplexní vektorové funkce $\psi = u + iv$ rozumíme funkci $\psi' : J \rightarrow \mathbb{C}^n$ takovou, že

$$\forall t \in J : \psi'(t) = u'(t) + iv'(t).$$

Příklad 11.11. Uvažujme funkci $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\psi(t) = \left(\frac{1}{1+it}, e^{(2+i)t}\right)$.

Připomeňme důležitý vztah:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad e^{\alpha+i\beta} = e^\alpha \cdot e^{i\beta} = e^\alpha (\cos \beta + i \sin \beta) \quad (11.9)$$

Odtud $\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = \left(\frac{1}{1+it} \cdot \frac{1-it}{1-it}, e^{2t} \cdot e^{it}\right) = \left(\frac{1}{1+t^2} + i \frac{-t}{1+t^2}, e^{2t} \cdot \cos t + ie^{2t} \cdot \sin t\right)$.

Tedy ψ' je definována předpisem

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi'(t) = \left(\frac{-2t}{(1+t^2)^2} + i \frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}, e^{2t}(2 \cos t - \sin t) + ie^{2t}(2 \sin t + \cos t) \right).$$

▲

Definice 11.12. Řekneme, že $\psi : J \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\psi = u + iv$ je (komplexním) řešením (11.7) na J , jestliže funkce u a v jsou současně řešením (11.7) na J .

Příklad 11.13. Nechť $u^{[1]} \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $u^{[2]} \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $v^{[1]} \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $v^{[2]} \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$.

Definujme funkce

$$\begin{aligned} \psi^{[1]} : J &\rightarrow \mathbb{C}^n, \psi^{[1]} = u^{[1]} + iv^{[1]}, \\ \psi^{[2]} : J &\rightarrow \mathbb{C}^n, \psi^{[2]} = u^{[2]} + iv^{[2]}. \end{aligned}$$

Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dokažte následující tvrzení:

$$(\lambda \cdot \psi^{[1]})' = \lambda \cdot (\psi^{[1]})', \quad (11.10)$$

$$(\psi^{[1]} + \psi^{[2]})' = (\psi^{[1]})' + (\psi^{[2]})', \quad (11.11)$$

$$\overline{(\psi^{[1]})'} = \left(\overline{\psi^{[1]}} \right)', \quad (11.12)$$

$$\overline{e^{\lambda t}} = e^{\bar{\lambda}t}, \text{ kde } \forall t \in \mathbb{R}, \quad (11.13)$$

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, \text{ kde } \forall t \in \mathbb{R}. \quad (11.14)$$

Věta 11.14. *Nechť je dána funkce $\psi = J \rightarrow \mathbb{C}^n$. Pak ψ je řešením (11.7) na J právě tehdy, když $\bar{\psi}$ je řešením (11.7) na J .*

Důkaz. Zřejmě platí:

$$\begin{aligned} \psi \text{ řeší (11.7) na } J &\iff (u \text{ řeší (11.7) na } J \wedge v \text{ řeší (11.7) na } J) \iff \\ &\iff (u \text{ řeší (11.7) na } J \wedge -v \text{ řeší (11.7) na } J) \iff \bar{\psi} \text{ řeší (11.7) na } J. \end{aligned}$$

Nechť $u \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $v \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$, $\psi : J \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\psi = u + iv$.

Pak funkci u nazýváme reálnou částí funkce ψ a funkci v říkáme imaginární část ψ . Píšeme

$$u = \operatorname{Re} \psi, \quad v = \operatorname{Im} \psi.$$

□

Příklad 11.15. Dokažte, že pro funkci $\psi : J \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\psi = u + iv$ platí:

$$\forall t \in J: \quad \operatorname{Re} \psi(t) = \frac{1}{2} (\psi(t) + \bar{\psi}(t)), \quad \operatorname{Im} \psi(t) = \frac{1}{2i} (\psi(t) - \bar{\psi}(t)).$$

Věta 11.16. *Nechť $\forall i = 1, 2, \dots, n$, $\forall j = 1, 2, \dots, n$ platí $a_{ij} \in C(J, \mathbb{R}^n)$.*

Nechť $A \stackrel{\text{ozn.}}{=} (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$.

Označme:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \{ \varphi : \varphi \text{ je reálným řešením (11.7) na } J \}, \\ \mathbb{H}_{\mathbb{C}} &= \{ \psi : \psi \text{ je komplexním řešením (11.7) na } J \}. \end{aligned}$$

Potom platí:

$$\mathbb{H} \text{ je vektorový prostor dimenze } n \text{ (nad } \mathbb{R}). \quad (11.15)$$

$$\mathbb{H}_{\mathbb{C}} \text{ je vektorový prostor dimenze } n \text{ (nad } \mathbb{C}). \quad (11.16)$$



Důkaz. A Nejprve dokážeme 11.15.

A1 Ze vztahů (11.10), (11.11) plyne:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \varphi^{[1]} \in \mathbb{H}, \varphi^{[2]} \in \mathbb{H} &\Rightarrow \forall t \in J: \\ (\lambda_1 \varphi^{[1]}(t) + \lambda_2 \varphi^{[2]}(t))' &= \lambda_1 \varphi^{[1]'}(t) + \lambda_2 \varphi^{[2]'}(t) = \lambda_1 A(t) \varphi^{[1]}(t) + \lambda_2 A(t) \varphi^{[2]}(t) = \\ = A(t) (\lambda_1 \varphi^{[1]}(t) + \lambda_2 \varphi^{[2]}(t)). & \\ \text{Tedy } \lambda_1 \varphi^{[1]}(t) + \lambda_2 \varphi^{[2]}(t) \in \mathbb{H}, &\text{ takže } \mathbb{H} \text{ je vektorovým podprostorem prostoru } C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

A2 Zde dokážeme $\dim \mathbb{H} \geq n$.

Připomeňme nejprve, že $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]} \in \mathbb{H}$ jsou lineárně nezávislé, platí-li pro všechna $c_1 \in \mathbb{R}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ implikace

$$\sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]} = o \Rightarrow c_1, \dots, c_n = 0. \quad (11.17)$$

Zvolme libovolně $t_0 \in J$. Víme, že existuje právě n reálných řešení $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$ systému 11.7 na J , pro která platí:

$$\begin{cases} \varphi^{[1]}(t_0) = (1, 0, 0, \dots, 0, 0) \stackrel{ozn}{=} e_1 \in \mathbb{R}^n, \\ \varphi^{[2]}(t_0) = (0, 1, 0, \dots, 0, 0) \stackrel{ozn}{=} e_2 \in \mathbb{R}^n, \\ \vdots \\ \varphi^{[n]}(t_0) = (0, 0, 0, \dots, 0, 1) \stackrel{ozn}{=} e_n \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (11.18)$$

Nechť $c_1 \in \mathbb{R}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Platí-li $\sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]} = o$, pak také $\sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]}(t_0) = o$, tedy

$\sum_{j=1}^n c_j e_j = o$, takže nutně $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$, neboť $e_1, \dots, e_n$ jsou lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^n$. Ukázali jsme, že platí implikace (11.17). Tedy $\dim \mathbb{H} \geq n$, neboť $\mathbb{H}$ obsahuje alespoň n lineárně nezávislých vektorů $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$.

A3 Ukažme, že funkce $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \dots, \varphi^{[n]}$ z předchozího bodu tvoří bázi v $\mathbb{H}$. Protože jde o lineárně nezávislý systém stačí dokázat, že každé řešení $\varphi \in \mathbb{H}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$.

Nechť $\varphi \in \mathbb{H}$. Buď $t_0 \in J$ stejně jako v předchozím bodě, tzn. platí (11.18).

Potom

$$\varphi(t_0) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}, \dots, c_n \in \mathbb{R} \quad \varphi(t_0) = \sum_{j=1}^n c_j e_j = \sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]}(t_0).$$

Položme $\tilde{\varphi} = \sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]}$. Již víme, že $\tilde{\varphi} \in \mathbb{H}$. Dále víme, že $\tilde{\varphi}(t_0) = \varphi(t_0)$. Z Věty o existenci a jednoznačnosti pro homogenní soustavy pak plyne, že $\tilde{\varphi}$ je určeno jednoznačně,

takže nutně musí platit $\tilde{\varphi} = \varphi$, tedy φ je lineární kombinací $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \dots, \varphi^{[n]}$.

B Nyní naznačíme důkaz vztahu 11.16.

B1 Podobně jako v předchozí sekci se ukáže, že $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{C}$ (provedte).

B2 Zde dokážeme, že $\dim \mathbb{H}_{\mathbb{C}} = n$. Vezměme systém funkcí $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \dots, \varphi^{[n]}$ z první části důkazu a definujme:

$$\begin{aligned}\psi^{[1]} &= \varphi^{[1]} + i\varphi^{[1]}, \\ \psi^{[2]} &= \varphi^{[2]} + i\varphi^{[2]}, \\ &\vdots \\ \psi^{[n]} &= \varphi^{[n]} + i\varphi^{[n]}.\end{aligned}$$

Zřejmě $\psi^{[1]} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \psi^{[2]} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}, \dots, \psi^{[n]} \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$. Dokažme, že jde o lineárně nezávislý systém.

Nechť $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \beta_1 \in \mathbb{R}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Máme dokázat:

$$\sum_{j=1}^n (\alpha_j + i\beta_j) \cdot \psi^{[j]} = o \Rightarrow (\forall j = 1, \dots, n : \alpha_j + i\beta_j = 0).$$

$$\text{Nechť tedy } \sum_{j=1}^n (\alpha_j + i\beta_j) \cdot \psi^{[j]} = o, \text{ tj. } \sum_{j=1}^n (\alpha_j + i\beta_j)(\varphi^{[j]} + i\varphi^{[j]}) = o.$$

$$\text{Pak } \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \beta_j)\varphi^{[j]} = o \wedge i \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j)\varphi^{[j]} = o.$$

Protože $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \dots, \varphi^{[n]}$ je lineárně nezávislý systém v $\mathbb{H}$, musí pro $j = 1, \dots, n$ platit $\alpha_j - \beta_j = 0, \alpha_j + \beta_j = 0$, tedy $\alpha_j + i\beta_j = 0$, což jsme chtěli dokázat.

Ukažme konečně, že každé řešení $\psi \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci řešení $\psi^{[1]}, \dots, \psi^{[n]}$:

Nechť $u \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n), v \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}^n)$ jsou takové funkce, že $\psi = u + iv \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

Pak $u \in \mathbb{H}, v \in \mathbb{H}$ a tedy existují reálná čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$, taková, že

$$u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi^{[j]} \quad \wedge \quad v = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi^{[j]}$$

Pak ovšem

$$\begin{aligned}\psi = u + iv &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi^{[j]} + i \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi^{[j]} = \sum_{j=1}^n (\alpha_j + i\beta_j) \varphi^{[j]} = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j + i\beta_j}{1+i} (1+i) \varphi^{[j]} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j + i\beta_j}{1+i} (\varphi^{[j]} + i\varphi^{[j]}) = \sum_{j=1}^n \frac{\alpha_j + i\beta_j}{1+i} \psi^{[j]},\end{aligned}$$

což jsme chtěli ukázat. □

Definice 11.17. Každou bázi prostoru $\mathbb{H}$ z právě uvedené Věty nazýváme fundamentálním systémem řešení homogenního systému (11.7) na J .

Nechť $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$ tvoří fundamentální systém řešení homogenního systému (11.7) na J .

Pak funkci

$$\varphi_{\text{ob.}} : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi_{\text{ob.}}(t, c_1, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]}(t)$$

nazýváme obecným řešením (11.7) na J .

Poznámka 11.18. Většinou píšeme $\varphi_{\text{ob.}}(t) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]}(t)$, $c_1 \in \mathbb{R}, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ místo

$$\varphi_{\text{ob.}}(t, c_1, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]}(t).$$

Homogenní soustavy s konstantními koeficienty

Nechť $\forall i = 1, 2, \dots, n, \forall j = 1, 2, \dots, n$ jsou funkce $a_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konstantní. Pak (11.7) lze psát ve tvaru

$$y' = A \cdot y, \quad (11.19)$$

kde $A \stackrel{\text{ozn.}}{=} (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ lze považovat za reálnou číselnou matici typu (n, n) .

Systému obyčejných diferenciálních rovnic (11.19) se říká systém homogenních lineárních obyčejných diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Postupně se naučíme, jak nalézt fundamentální systém řešení takovýchto soustav.

Úmluva. Nechť $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní číslo matice A , tj. platí $\det(A - \lambda E) = 0$. Nechť $s \in \mathbb{N}$. Pak píšeme

$$N_{\lambda}^{[s]} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A - \lambda E)^s \xi = o\}.$$

Poznámka 11.19. $N_{\lambda}^{[s]}$ je zřejmě podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{C}^n$.

Věta 11.20 (O tvaru řešení homogenních soustav). *Nechť $\lambda_1 \in \mathbb{C}, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ jsou po dvou různá komplexní čísla. Nechť $m_1 \in \mathbb{N}, m_2 \in \mathbb{N}, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ jsou taková čísla, že platí:*

$$\det(A - \lambda E) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

(tzn. λ_j jsou vlastní čísla matice A , m_j jejich algebraické násobnosti).

Nechť $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ a $\xi \in \mathbb{C}^n$. Definujme funkci $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ přepisem

$$\psi(t) = \left(\sum_{l=0}^{m_j-1} \frac{(A - \lambda_j E)^l \cdot \xi}{l!} \cdot t^l \right) e^{\lambda_j t}. \quad (11.20)$$

Potom platí:

$$\psi \text{ je řešením (11.19) na } \mathbb{R} \Leftrightarrow \xi \in \mathbb{N}_{\lambda_j}^{[m_j]}.$$

★

Důkaz. Důkaz provedeme „dosazením ψ do (11.19)“. Připomeňme, že platí:

$$\psi \text{ řeší (11.19) na } \mathbb{R} \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R} : \psi'(t) = A\psi(t)).$$

A Nechť $m_j = 1$. Potom $\psi(t) = \xi e^{\lambda_j t}$ a pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$(\xi e^{\lambda_j t})' = A(\xi e^{\lambda_j t}) \Leftrightarrow \lambda_j \xi e^{\lambda_j t} = A \xi e^{\lambda_j t} \Leftrightarrow (A - \lambda_j E) \xi e^{\lambda_j t} = o \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} (A - \lambda_j E)^1 \xi = o \Leftrightarrow \xi \in \mathbb{N}_{\lambda_j}^{[1]}$$

(*) $\forall \lambda_j \in \mathbb{C} \forall t \in \mathbb{R} : e^{\lambda_j t} \neq 0$ (ověřte použitím (11.9)).

B Nechť $m_j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Potom pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí:

$$\begin{aligned} (\psi'(t) = A\psi(t)) &\Leftrightarrow \left((e^{\lambda_j t} \cdot \sum_{l=0}^{m_j-1} \frac{t^l}{l!} (A - \lambda_j E)^l \xi)' = A\psi(t) \right) \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \left(\lambda_j \psi(t) + e^{\lambda_j t} \cdot \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} (A - \lambda_j E)^l \xi = A\psi(t) \right) \stackrel{(***)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \left((A - \lambda_j E) \cdot e^{\lambda_j t} \cdot \sum_{l=1}^{m_j-1} \frac{t^{l-1}}{(l-1)!} (A - \lambda_j E)^{l-1} \xi = (A - \lambda_j E) \psi(t) \right) \stackrel{(x)}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow \left((A - \lambda_j E) \cdot e^{\lambda_j t} \cdot \sum_{l=0}^{m_j-2} \frac{t^l}{l!} (A - \lambda_j E)^l \xi = (A - \lambda_j E) \psi(t) \right) \stackrel{(xx)}{\Leftrightarrow} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left((A - \lambda_j E) \cdot (\psi(t) - e^{\lambda_j t} \cdot \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} (A - \lambda_j E)^{m_j-1} \xi) = (A - \lambda_j E) \psi(t) \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(-e^{\lambda_j t} \cdot \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} (A - \lambda_j E)^{m_j} \xi = o \right) \Leftrightarrow (t^{m_j-1} (A - \lambda_j E)^{m_j-1} \xi = o). \end{aligned}$$

(**) Ověřte, že můžeme postupovat podle pravidla o „derivaci součinu“.

(***) Odečetli jsme $\lambda_j \psi(t)$ od obou stran rovnosti a poté na levé straně vytkli $(A - \lambda_j E)$.

(x) Změna indexů v sumě na levé straně.

(xx) Na levé straně jsme přičetli a odečetli $e^{\lambda_j t} \cdot \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} (A - \lambda_j E)^{m_j-1} \xi$.

Nyní již důkaz tvrzení snadno dokončíme:

$$\begin{aligned} (\forall t \in \mathbb{R} : \psi'(t) = A\psi(t)) &\Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R} : t^{m_j-1} \cdot (A - \lambda_j E)^{m_j} \cdot \xi = o) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda_j E)^{m_j} \cdot \xi = o \Leftrightarrow \xi \in N_{\lambda_j}^{[m_j]}. \end{aligned}$$

□

Poznámka 11.21. Podstatné části důkazu následujícího tvrzení jsou založeny na poznatcích lineární algebry, obtížný důkaz vypustíme.

Věta 11.22. (A)

$$\forall j = 1, 2, \dots, k : \dim N_{\lambda_j}^{[m_j]} = m_j.$$

(B)

Všimněme si, že $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ a utvořme n komplexních řešení $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}, \dots, \psi^{[n]}$ systému (11.19) takto:

Nechť

$$\begin{aligned} &\xi^{[1]}, \xi^{[2]}, \dots, \xi^{[m_1]} \quad \text{je báze } N_{\lambda_1}^{[m_1]}, \\ &\xi^{[m_1+1]}, \xi^{[m_1+2]}, \dots, \xi^{[m_1+m_2]} \quad \text{je báze } N_{\lambda_2}^{[m_2]}, \\ &\vdots \\ &\xi^{[m_1+m_2+\dots+m_{k-1}+1]}, \xi^{[m_1+m_2+\dots+m_{k-1}+2]}, \dots, \xi^{[n]} \quad \text{je báze } N_{\lambda_k}^{[m_k]}. \end{aligned}$$

Nechť pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $\psi^{[j]}$ řešení, které získáme dosazením vektoru $\xi^{[j]}$ a odpovídajícího vlastního čísla do vzorce (11.20).

Potom $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}, \dots, \psi^{[n]}$ tvoří bázi všech (komplexních) řešení (11.19) na $\mathbb{R}$.

Příklad 11.23. Určeme bázi v $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ systému

$$\begin{aligned} y' &= y + z, \\ z' &= -2y + 3z. \end{aligned} \quad (11.21)$$

(1) Sestavíme matici soustavy: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Vypočteme

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5.$$

Určíme vlastní čísla matice A a jejich násobnosti:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = (2 + i) \vee \lambda = (2 - i)),$$

přitom $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - (2 + i))^1 \cdot (\lambda - (2 - i))^1$, tedy

$$\underline{\lambda_1 = 2 + i, m_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 - i, m_2 = 1.}$$

(2) Určíme báze prostorů $N_{2+i}^{[1]}$, $N_{2-i}^{[1]}$ a komplexní řešení $\psi^{[1]}$, $\psi^{[2]}$:

$N_{2+i}^{[1]}$:

$$\begin{aligned} (A - (2 + i)E)\xi = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 - i & 1 \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1. \text{ řádek násobíme číslem } -1 + i \\ \text{komplexně sdruženým k } -1 - i \end{vmatrix} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 + i \\ -2 & 1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\xi_1 + (-1 + i)\xi_2 = 0. \end{aligned}$$

Jednoprvkovou bází $N_{2+i}^{[1]}$ je tedy např. vektor $\underline{\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 - i \end{pmatrix}}$.

Z (11.20) pak máme $\underline{\psi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 - i \end{pmatrix} \cdot e^{2+i}t}$.

$N_{2-i}^{[1]}$:

$$\begin{aligned} (A - (2 - i)E)\xi = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 + i & 1 \\ -2 & 1 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 - i \\ -2 & 1 + i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\Leftrightarrow 2\xi_1 + (-1 - i)\xi_2 = 0. \end{aligned}$$

Jednoprvkovou bází $N_{2-i}^{[1]}$ je tedy např. vektor $\underline{\xi^{[2]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 + i \end{pmatrix}}$.

Z (11.20) pak máme $\underline{\psi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 + i \end{pmatrix} \cdot e^{2-i}t}$.

▲

Poznámka 11.24. Víme, že $\det(A - (2 + i)E) = \det(A - (2 - i)E) = 0$, tedy (protože A je typu $(2, 2)$) řádky u příslušných soustav rovnic musí být lineárně závislé; mohli jsme si tedy ušetřit práci a nalézt pouze vhodná řešení rovnice

$$\begin{aligned} (-1-i)\xi_1 + \xi_2 &= 0 & (\text{případ } N_{2+i}^{[1]}, \text{ resp. rovnice} \\ (-1+i)\xi_1 + \xi_2 &= 0 & (\text{případ } N_{2-i}^{[1]}). \end{aligned}$$

Poznámka 11.25. Protože $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, lze volit $\xi^{[2]} = \bar{\xi}^{[1]} \Rightarrow \psi^{[2]} = \bar{\psi}^{[1]}$.

Poznámka 11.26. Obecněji,

matice A systému (11.19) má reálné koeficienty, takže $\forall j = 1, 2, \dots, k$:
 $(A - \lambda_j E) \cdot \xi = o \Leftrightarrow (A - \lambda_j E) \cdot \bar{\xi} = \bar{o} \Leftrightarrow (A - \lambda_j E) \cdot \bar{\xi} = o \Leftrightarrow (\bar{A} - \bar{\lambda}_j \bar{E}) \cdot \bar{\xi} = o \Leftrightarrow (A - \bar{\lambda}_j E) \cdot \bar{\xi} = o$.

Dokázali jsme tak následující tvrzení: Necht λ_j je vlastní číslo matice A . Pak $\bar{\lambda}_j$ je rovněž vlastní číslo matice A . Lze ukázat, že násobnosti čísel $\lambda_j, \bar{\lambda}_j$ jsou stejné, tedy

$$\xi \in N_{\lambda_j}^{[m_j]} \Leftrightarrow \bar{\xi} \in N_{\bar{\lambda}_j}^{[m_j]}.$$

Odtud a z (11.20) lze odvodit, že každé dvojici komplexně sdružených vlastních čísel $\lambda, \bar{\lambda}$ (s nenulovou imaginární částí) násobnosti m lze (volbou bázi $\xi^{[1]}, \dots, \xi^{[m]}$ v $N_{\lambda}^{[m]}$, $\bar{\xi}^{[1]}, \dots, \bar{\xi}^{[m]}$ v $N_{\bar{\lambda}}^{[m]}$) přiřadit $2m$ komplexních lineárně nezávislých řešení $\psi^{[1]}, \bar{\psi}^{[1]}, \dots, \psi^{[m]}, \bar{\psi}^{[m]}$ systému (11.19).

Jejich vhodnými lineárními kombinacemi pak získáváme $2m$ reálných lineárně nezávislých řešení $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[2m]}$ takto:

$$\begin{aligned} \varphi^{[1]} &= \frac{1}{2}(\psi^{[1]} + \bar{\psi}^{[1]}) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{Re}(\psi^{[1]}), & \varphi^{[2]} &= \frac{1}{2i}(\psi^{[1]} - \bar{\psi}^{[1]}) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{Im}(\psi^{[1]}), \\ \varphi^{[3]} &= \frac{1}{2}(\psi^{[2]} + \bar{\psi}^{[2]}) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{Re}(\psi^{[2]}), & \varphi^{[4]} &= \frac{1}{2i}(\psi^{[2]} - \bar{\psi}^{[2]}) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{Im}(\psi^{[2]}), \\ &\vdots & &\vdots \\ \varphi^{[2m-1]} &= \frac{1}{2}(\psi^{[m]} + \bar{\psi}^{[m]}) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{Re}(\psi^{[m]}), & \varphi^{[2m]} &= \frac{1}{2i}(\psi^{[m]} - \bar{\psi}^{[m]}) \stackrel{(*)}{=} \operatorname{Im}(\psi^{[m]}). \end{aligned}$$

★

Poznámka 11.27. Přesněji, získáváme komplexní řešení s nulovými imaginárními složkami. Taková řešení budeme pro přístě ztotožňovat s reálnými řešeními.

Příklad 11.28. Určeme fundamentální systém řešení (tj. bázi $\mathbb{H}$) systému (11.21). Určeme obecné řešení (11.21).

Využijeme výsledku předchozího příkladu, kde jsme mimo jiné získali: $\lambda_1 = 2 + i, m_1 = 1, \lambda_2 = 2 - i = \bar{\lambda}_1, m_2 = 1$,

$$\psi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1-i \end{pmatrix} \cdot e^{(2+i)t}. \text{ Odtud ihned:}$$

$$\begin{aligned} \varphi^{[1]}(t) &= \operatorname{Re}(\psi^{[1]}(t)) = \operatorname{Re}(e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1-i \end{pmatrix} \cdot (\cos t + i \sin t)) = \\ &= e^{2t} \cdot \operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} -\cos t + i(-\sin t) \\ -\cos t + \sin t + i(-\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \right) = \underline{\underline{e^{2t} \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi^{[2]}(t) &= \operatorname{Im}(\psi^{[1]}(t)) = e^{2t} \cdot \operatorname{Im} \left(\begin{pmatrix} -\cos t + i(-\sin t) \\ -\cos t + \sin t + i(-\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \right) = \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Zbývá určit obecné řešení (11.21):

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{ob}}(t) &= c_1 \varphi^{[1]}(t) + c_2 \varphi^{[2]}(t) = \\ &= \underline{\underline{(-e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t), -e^{2t}((c_1 + c_2) \cos t + (c_2 - c_1) \sin t))}}, \underline{\underline{c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}}}.\end{aligned}$$

▲

Shrnutí postupu při určování fundamentálního systému řešení

(A)

Určíme všechna reálná různá vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ matice A spolu s jejich násobnostmi $m_1, \dots, m_s$.

Určíme všechny dvojice komplexně sdružených vlastních čísel matice A $\lambda_{s+1}, \bar{\lambda}_{s+1}$ až $\lambda_l, \bar{\lambda}_l$ spolu s jejich násobnostmi $m_{s+1}, \dots, m_l$.

(B)

Pro $j = 1, \dots, s$ nalezneme báze prostorů $N_{\lambda_j}^{[m_j]}$ a podle (11.20) určíme $m_1 + m_2 + \dots + m_s$ reálných řešení

$$\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[m_1 + m_2 + \dots + m_s]}$$

systému (11.19).

(C)

Pro $j = s+1, \dots, l$ nalezneme báze prostorů $N_{\lambda_j}^{[m_j]}$ a podle (11.20) určíme $m_{s+1} + m_{s+2} + \dots + m_l$ komplexních řešení

$$\psi^{[m_1 + \dots + m_{s+1}]}, \dots, \psi^{[m_1 + \dots + m_l]}$$

systému (11.19). Ke každému z těchto řešení určíme dvojici reálných řešení (11.19), tedy

$$\begin{aligned}\varphi^{[m_1 + \dots + m_{s+1}]} &= \operatorname{Re}(\psi^{[m_1 + \dots + m_{s+1}]}), & \varphi^{[m_1 + \dots + m_{s+2}]} &= \operatorname{Im}(\psi^{[m_1 + \dots + m_{s+1}]}), \\ \varphi^{[m_1 + \dots + m_{s+3}]} &= \operatorname{Re}(\psi^{[m_1 + \dots + m_{s+2}]}), & \varphi^{[m_1 + \dots + m_{s+4}]} &= \operatorname{Im}(\psi^{[m_1 + \dots + m_{s+2}]}), \\ \vdots & & \vdots & \\ \varphi^{[n-1]} &= \operatorname{Re}(\psi^{[m_1 + \dots + m_l]}), & \varphi^{[n]} &= \operatorname{Im}(\psi^{[m_1 + \dots + m_l]}),\end{aligned}$$

(D)

Přehledně sepíšeme nalezený fundamentální systém řešení $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$ SODR (11.19).

Příklad 11.29. Určeme fundamentální systém řešení soustavy

$$\begin{aligned} u' &= 2u - v + 2w, \\ v' &= u + 2w, \\ w' &= -2u + v - w, \end{aligned}$$

Řešení. (A)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \det(A - \lambda E) = \dots = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1, \lambda_1 = 1, m_1 = 1;$$

$\lambda_2 = i, m_2 = 1; \lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = -i, m_1 = m_2 = 1$, (vypočtete).

(B)

$$\begin{aligned} (A - E)\xi = o &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 &= 0, \\ -\xi_2 + 2\xi_3 &= 0. \end{aligned} \text{ Zvolme } \xi_3 = 1 \Rightarrow \xi_2 = 2 \Rightarrow \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[1]}(t) = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^t = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

(C)

$$\begin{aligned} (A - iE)\xi = o &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2-i & -1 & 2 \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 5 & -2-i & 4+2i \\ 1 & -i & 2 \\ -2 & 1 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2+4i & -6+2i \\ 1 & -i & 2 \\ 0 & 1-2i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1-2i & 3-i \\ 1 & -i & 2 \\ 0 & 1-2i & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{(**)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5+5i \\ 1 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1+i \\ 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} \xi_2 + (1+i)\xi_3 &= 0, \\ \xi_1 + (1+i)\xi_3 &= 0. \end{aligned} \\ &\quad \begin{pmatrix} (*) & 1. \text{ řádek násoben } 2+i (= \overline{2-i}), \\ (**) & 1. \text{ řádek násoben } 1+2i (= \overline{1-2i}). \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Zvolme např. } \xi_3 = 1-i \Rightarrow \xi_2 = -2, \xi_1 = -2 \Rightarrow \xi^{[2]} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^{[2]}(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1-i \end{pmatrix} \cdot e^{it} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1-i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} -2 \cos t + i(-2 \sin t) \\ -2 \cos t + i(-2 \sin t) \\ \cos t + \sin t + i(\cos t + i \sin t) \end{pmatrix}.$$

Odtud

$$\varphi^{[2]}(t) = \operatorname{Re}(\psi^{[2]}(t)) = \begin{pmatrix} -2 \cos t \\ -2 \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{[3]}(t) = \operatorname{Im}(\psi^{[2]}(t)) = \begin{pmatrix} -2 \sin t \\ -2 \sin t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}.$$

▲

Příklad 11.30. Určeme fundamentální systém řešení soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - y_2 - y_3, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_3' &= -y_1 + y_2 + 2y_3, \end{aligned} \quad (11.22)$$

Řešení. (A) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= \dots = (1-\lambda)(\lambda-1)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, m_1 = 3 \text{ (vypočtěte)}$$

(B)

$$(A - E) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (A - E)^2 = \dots,$$

$$(A - E)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{ani nemusíme počítat, neboť víme, že}$$

$$3 = \dim N_1^{[3]} = \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A - E)^3 \cdot \xi = o\}, \text{ a } A \text{ je typu } (3, 3).$$

$$\text{Zvolme například: } \xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi^{[3]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{aligned} (A - E) \cdot \xi^{[1]} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, (A - E)^2 \cdot \xi^{[1]} = (A - E) \left((A - E) \xi^{[1]} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ takže } \varphi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix} e^t \\ (A - E) \cdot \xi^{[2]} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (A - E)^2 \cdot \xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{takže } \varphi^{[2]}(t) = \frac{\begin{pmatrix} -t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix} e^t}{\quad}$$

$$(A-E) \cdot \xi^{[3]} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (A-E)^2 \cdot \xi^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{takže } \varphi^{[3]}(t) = \frac{\begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 1+t \end{pmatrix} e^t}{\quad} \quad \blacktriangle$$

Poznámka 11.31. Uvedme „pěknější“ fundamentální systém řešení systému rovnic z předchozího příkladu (ověřte lineární nezávislost funkcí $\tilde{\varphi}^{[1]}, \tilde{\varphi}^{[2]}, \tilde{\varphi}^{[3]}$).

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{[1]}(t) &= \varphi^{[1]}(t) + \varphi^{[2]}(t) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t}{\quad} \\ \tilde{\varphi}^{[2]}(t) &= \varphi^{[3]}(t) - \varphi^{[2]}(t) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t}{\quad} \\ \tilde{\varphi}^{[3]}(t) &= \varphi^{[3]}(t) = \frac{\begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 1+t \end{pmatrix} e^t}{\quad} \end{aligned}$$

Příklad 11.32. Určeme řešení Cauchyovy úlohy (11.22), (11.23), je-li

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (11.23)$$

Řešení. Pomocí fundamentálního systému řešení $\tilde{\varphi}^{[1]}, \tilde{\varphi}^{[2]}, \tilde{\varphi}^{[3]}$ z poznámky sestavíme obecné řešení (11.22):

$$\varphi_{Ob}(t, c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} c_1 & -c_3 t \\ c_1 - c_2 & -2c_3 t \\ c_2 + c_3 + c_3 t \end{pmatrix} e^t.$$

Nyní určíme $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ tak, aby platilo: $\varphi_{Ob}(0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Pro $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3$ tak získáváme systém lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \tilde{c}_1 &= 1, \\ \tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 &= 1, \\ \tilde{c}_2 + \tilde{c}_3 &= 2. \end{aligned}$$

Jeho řešení: $(\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) = (1, 0, 2)$. Odtud pak můžeme přímo psát řešení uvažované Cauchyovy úlohy:

$$\varphi(t) = \varphi_{\text{Ob}}(t, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 1+t \end{pmatrix} 2e^t = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1-2t \\ 1-4t \\ 2+2t \end{pmatrix} e^t}}.$$

▲

Příklad 11.33. Určete řešení Cauchyovy úlohy (11.22), (11.23) pomocí původního fundamentálního systému $\varphi^{[1]}, \varphi^{[2]}, \varphi^{[3]}$.

Příklad 11.34. Určeme řešení Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} \delta' &= 2\delta + \epsilon, & \delta(1) &= 1, \\ \epsilon' &= 3\delta + 4\epsilon, & \epsilon(1) &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. (A)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \det(a - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 5) \cdot (\lambda - 1) \Rightarrow \lambda_1 = 5, m_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1, m_2 = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{(B) } \underline{\lambda_1 = 5, m_1 = 1}: (A - 5E) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3\xi_1 - \xi_2 = 0 \Rightarrow \text{např. } \xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^{5t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\lambda_2 = 1, m_2 = 1}: (A - E) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \xi_1 + \\ + \xi_2 &= 0 \Rightarrow \text{např. } \xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot e^t. \end{aligned}$$

Obecné řešení: $\varphi(t) = (c_1 e^{5t} + c_2 e^t, 3c_1 e^{5t} - c_2 e^t)$, $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}$.

Řešení Cauchyovy úlohy:

$$\left. \begin{aligned} c_1 e^5 + c_2 e &= 1 \\ 3c_1 e^5 - c_2 e &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 4c_1 e^5 &= 1 \\ 3c_1 e^4 &= c_2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{4e^5} \\ c_2 &= \frac{3}{4e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left(\frac{e^{5t}}{4e^5} + \frac{3e^t}{4e}, \frac{3e^{5t}}{4e^5} - \frac{3e^t}{4e} \right), \\ \varphi(t) &= \underline{\underline{\left(\frac{1}{4}e^{5(t-1)} + \frac{3}{4}e^{t-1}, \frac{3}{4}e^{5(t-1)} - \frac{3}{4}e^{t-1} \right)}}. \end{aligned}$$

▲

Příklad 11.35. Určete fundamentální systém řešení systému

$$\begin{aligned} y' &= 3y - z, \\ z' &= y + z. \end{aligned}$$

Řešení. (A) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \Rightarrow \lambda_1 = 1, m_1 = 2$.

(B) A je typu $(2, 2)$, $m_1 = 2 \Rightarrow (A - 2E)^2 \xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (jinak by $N_2^{[2]}$ neměl dimenzi 2) $\Rightarrow$ např. $\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$(A - 2E)\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[1]}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \cdot e^{2t}}}$$

$$(A - 2E)\xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{[2]}(t) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \cdot e^{2t}}}$$

▲

Příklad 11.36. Určeme bázi prostoru $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$ všech komplexních řešení systému

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y, \\ y' &= 2y + 4z, \\ z' &= x - z. \end{aligned} \tag{11.24}$$

Řešení. Určeme fundamentální systém řešení SODR (11.24) a obecné řešení (11.24).

(A)

Sestavíme matici soustavy $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vypočteme

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 4 \\ 1 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda^2 \cdot (\lambda - 3)$$

Určíme vlastní čísla matice A a jejich násobnosti:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \cdot (\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 0, m_1 = 2}, \underline{\lambda_2 = 3, m_2 = 1}.$$

(B) Určíme báze prostorů $N_0^{[2]}, N_3^{[1]}$ a komplexní řešení $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}, \psi^{[3]}$ tvořící bázi v $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}$.

$$\begin{aligned}
N_0^{[2]} &= \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A - 0 \cdot E)^2 \cdot \xi = o\} : \\
A^2 \cdot \xi = o &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0.
\end{aligned}$$

Zvolme např.: $\xi_2^{[1]} = 1, \xi_3^{[1]} = 0, \Rightarrow \xi_1^{[1]} = -1$, tedy $\xi^{[1]} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Zbývá určit

druhý vektor báze v $N_0^{[2]}$,

zvolme např.: $\xi_2^{[2]} = 0, \xi_3^{[2]} = 1, \Rightarrow \xi_1^{[2]} = -1$, tedy $\xi^{[2]} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$m_1 = 2$, tedy pro dosazení do vzorce (11.20) je třeba vypočítat ještě

$$(A - 0 \cdot E)^1 \cdot \xi^{[1]} = A \cdot \xi^{[1]} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$(A - 0 \cdot E)^1 \cdot \xi^{[2]} = A \cdot \xi^{[2]} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nyní stačí aplikovat vzorec (11.20):

$$\psi^{[1]}(t) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t^1 \right) e^{0 \cdot t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t,$$

$$\psi^{[2]}(t) = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t^1 \right) e^{0 \cdot t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t.$$

$$N_3^{[1]} = \{\xi \in \mathbb{C}^n : (A - 3E)^1 \cdot \xi = o\} :$$

$$\begin{aligned}
(A - 3E)^1 \cdot \xi = o &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{matrix} \xi_1 - \xi_2 & = & 0, \\ -\xi_2 + 4\xi_3 & = & 0. \end{matrix}
\end{aligned}$$

Zvolme např. $\xi_3^{[3]} = 1 \Rightarrow \xi_2^{[3]} = 4 \Rightarrow \xi_1^{[3]} = 4$, tedy $\xi^{[3]} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Protože $m_1 = 1$, můžeme ihned psát

$$\psi^{[3]}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

(C) Protože imaginární části funkcí $\psi^{[1]}, \psi^{[2]}, \psi^{[3]}$ jsou nulové, můžeme psát rovnou fundamentální systém řešení, tj. bázi prostoru $\mathbb{H}$ takto:

$$\begin{aligned} \varphi^{[1]}(t) &= \operatorname{Re}(\psi^{[1]}(t)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot t \\ \varphi^{[2]}(t) &= \operatorname{Re}(\psi^{[2]}(t)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot t \\ \varphi^{[3]}(t) &= \operatorname{Re}(\psi^{[3]}(t)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3t} \end{aligned}$$

Obecné řešení: $\varphi_{\text{Ob}}(t) = c_1 \varphi^{[1]}(t) + c_2 \varphi^{[2]}(t) + c_3 \varphi^{[3]}(t)$, $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}, c_3 \in \mathbb{R}$:
 $\varphi_{\text{Ob}}(t) = \begin{pmatrix} -c_1 - c_2 - (c_1 + 2c_2)t + 4c_3e^{3t}, c_1 + (2c_1 + 4c_2)t + 4c_3e^{3t}, \\ c_2 - (c_1 + 2c_2)t + c_3e^{3t} \end{pmatrix}$, $c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}, c_3 \in \mathbb{R}$ ▲

Nehomogenní soustavy

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $b \stackrel{\text{ozn.}}{=} (b_1, b_2, \dots, b_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ a pro všechna $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, nechť jsou dány funkce $a_{ij} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Soustavu tvaru $(y \stackrel{\text{ozn.}}{=} (y_1, \dots, y_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n) :$

$$\begin{aligned} y'_1 &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t), \\ y'_2 &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \dots + a_{2n}(t)y_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ y'_n &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \dots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{11.25}$$

nazýváme systémem lineárních diferenciálních rovnic. Označíme-li $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$, lze (11.25) zapsat stručněji ve tvaru

$$y' = A(t) \cdot y + b(t). \tag{11.26}$$

Je-li $b \neq 0$ pak hovoříme o nehomogenním systému lineárních diferenciálních rovnic. Podobně jako u homogenních soustav platí následující tvrzení:

Věta 11.37. *Nechť J je otevřený interval, $t_0 \in J, y_0 \in \mathbb{R}^n$ a nechť $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ a $\forall i = 1, 2, \dots, n \ \forall j = 1, 2, \dots, n \ a_{ij} \in C(J, \mathbb{R})$. Pak na J existuje právě jedno řešení ω splňující Cauchyovu úlohu (11.26),*

$$y(t_0) = y_0. \quad (11.27)$$

Věta 11.38. *Nechť jsou splněny předpoklady a značení předchozí věty. Nechť ω_p je libovolné řešení (11.26) na J . Pak ke každému řešení ω systému (11.26) na J existuje právě jedno řešení φ příslušného homogenního systému (11.7) takové, že*

$$\omega = \varphi + \omega_p.$$

Důkaz. (A) Jednoznačnost: Nechť $\varphi, \tilde{\varphi}$ jsou taková řešení homogenní soustavy (11.7) na J , že platí

$$\omega = \varphi + \omega_p \quad , \quad \omega = \tilde{\varphi} + \omega_p.$$

Potom

$$\omega - \omega_p = \varphi \quad , \quad \omega - \omega_p = \tilde{\varphi},$$

tedy $\varphi = \tilde{\varphi}$.

(B) Existence: Nechť funkce ω, ω_p řeší (11.26). Pak $\forall t \in J$:

$$\omega'(t) = A(t)\omega(t) + b(t) \wedge \omega_p'(t) = A(t)\omega_p(t) + b(t) \Rightarrow \omega'(t) - \omega_p'(t) = A(t) \cdot (\omega(t) - \omega_p(t)) \Rightarrow$$

$$(\omega - \omega_p)'(t) = A(t)((\omega - \omega_p)(t)) \Rightarrow$$

$$(\omega - \omega_p) \text{ řeší (11.7) na } J,$$

stačí tedy položit $\varphi = \omega - \omega_p$. □

Definice 11.39. Nechť jsou splněny předpoklady předchozí věty. Buď ω_p je řešením (11.26) na J . Nechť $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$ je fundamentální systém řešení příslušné homogenní soustavy (11.7) na J .

Potom funkci $\omega_{\text{Ob}} : J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$\omega_{\text{Ob}}(t, c_1, c_2, \dots, c_n) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi^{[j]}(t) + \omega_p(t)$$

nazýváme obecným řešením (11.26) na J .

Poznámka 11.40. Podobně jako u HS plyne z předchozí věty, že vhodnou volbou $c_1, \dots, c_n$ lze z obecného řešení (11.26) získat kterékoliv řešení (11.26).

Metoda variace konstant

Věta 11.41 (O metodě variace konstant). *Nechť J je otevřený interval, $b \in C(J, \mathbb{R}^n)$ a $\forall i = 1, \dots, n \ \forall j = 1, \dots, n : a_{ij} \in C(J, \mathbb{R})$. Nechť funkce $\varphi^{[1]}, \dots, \varphi^{[n]}$ tvoří fundamentální systém všech řešení homogenní soustavy (11.7) na J . Pak existují funkce $c_1 \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}), c_2 \in C^{(1)}(J, \mathbb{R}), \dots, c_n \in C^{(1)}(J, \mathbb{R})$ takové, že funkce ω_p ,*

$$\omega_p(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t) \varphi^{[j]}(t),$$

je řešením (11.26) na J .

Poznámka 11.42. Vezměme ω_p z předchozí věty. Potom ω řeší (11.26), tedy pro každé $t \in J$ platí

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n c_j(t) \varphi^{[j]}(t) \right)' &= A(t) \sum_{j=1}^n c_j(t) \varphi^{[j]}(t) + b(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j'(t) \varphi^{[j]}(t) + \sum_{j=1}^n c_j(t) (\varphi^{[j]})'(t) &= \sum_{j=1}^n c_j(t) \cdot A(t) \varphi^{[j]}(t) + b(t) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n c_j'(t) \varphi^{[j]}(t) &= b(t), \end{aligned} \quad (11.28)$$

neboť $\forall j = 1, \dots, n: (\varphi^{[j]})'(t) = A(t) \varphi^{[j]}(t)$.

Vyřešením soustavy lineárních rovnic tedy získáme derivace hledaných funkcí $c_1, \dots, c_n$.

Příklad 11.43. Určeme obecné řešení SODR

$$\begin{aligned} y' &= 2y + z + e^{6t}, \\ z' &= 3y + 4z - e^{6t}. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Řešení. (A)

Nejprve určíme fundamentální systém řešení odpovídající homogenní soustavy

$$\begin{aligned} y' &= 2y + z, \\ z' &= 3y + 4z. \end{aligned}$$

Snadno zjistíme, že například dvojice funkcí

$$\varphi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t}, \quad \varphi^{[2]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t,$$

představuje hledaný systém.

(B)

Hledáme řešení ω_p původního systému ve tvaru

$$\omega_p(t) = c_1(t) \cdot e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2(t) \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Z (11.28) získáváme soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cdot e^{5t} + c_2'(t) \cdot e^t &= e^{6t}, \\ 3c_1'(t) \cdot e^{5t} - c_2'(t) \cdot e^t &= -e^{6t}. \end{aligned}$$

Zřejmě lze krátit funkcí e^t :

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cdot e^{4t} + c_2'(t) &= e^{5t}, \\ 3c_1'(t) \cdot e^{4t} - c_2'(t) &= -e^{5t}. \end{aligned}$$

Odtud:

$$\left. \begin{aligned} 4c_1'(t)e^{4t} &= 0 \\ 3c_1'(t)e^{4t} - c_2'(t) &= -e^{5t} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} c_1'(t) &= 0 \\ c_2'(t) &= -e^{5t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{např. } c_1(t) = 0, c_2(t) = -\frac{1}{5}e^{5t}.$$

Tedy

$$\omega_p(t) = \frac{1}{5}e^{5t} \cdot e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{e^{6t}}{5} \\ -\frac{e^{6t}}{5} \end{pmatrix}}}.$$

(C)

Obecné řešení:

$$\omega_{\text{Ob}}(t, c_1, c_2) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}, \text{ tj.}$$

$$\underline{\underline{\omega_{\text{Ob}}(t, c_1, c_2) = \left(c_1 e^{5t} + c_2 e^t + \frac{e^{6t}}{5}, 3c_1 e^{5t} - c_2 e^t - \frac{e^{6t}}{5} \right)}}.$$

▲

Příklad 11.44. Určeme řešení ω_p Cauchyovy úlohy (11.29),

$$(y(0), z(0)) = \left(\frac{1}{5}, 0\right). \quad (11.30)$$

Řešení. Určíme $\tilde{c}_1 \in \mathbb{R}, \tilde{c}_2 \in \mathbb{R}$ tak, aby $\omega_{\text{Ob}}(0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = (\frac{1}{5}, 0)$ (ω_{Ob} jsme určili v předešlém příkladě). Tedy

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + \frac{1}{5} &= \frac{1}{5} \\ 3c_1 - c_2 - \frac{1}{5} &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} c_1 + c_2 &= \frac{1}{5} \\ 3c_1 - c_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} 4c_1 &= \frac{1}{5} \\ 3c_1 - c_2 &= \frac{1}{5} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{20} \\ c_2 &= \frac{1}{20} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{20}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Tedy

$$\underline{\underline{\omega_p(t) = \left(\frac{1}{20}e^{5t} - \frac{1}{20}e^t + \frac{e^{6t}}{5}, \frac{3}{20}e^{5t} + \frac{1}{20}e^t - \frac{e^{6t}}{5} \right)}}.$$

▲

Příklad 11.45. Určeme řešení ω_p Cauchyovy úlohy

$$\begin{aligned} y' &= z + \operatorname{tg}^2 t - 1, \\ z' &= -y + \operatorname{tg} 2t, \end{aligned}$$

$$(y(0), z(0)) = (0, 2) \text{ na intervalu } J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Řešení. (A)

$$\begin{aligned} y' &= z, \\ z' &= -y, \end{aligned} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, m_1 = 1, \quad \lambda_2 = -i = \bar{\lambda}_1 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\xi_1 - i\xi_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \text{např. } \xi_2 = i \Rightarrow \xi_1 = 1 \Rightarrow \xi^{[1]} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^{[1]}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \cdot e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + \\ + i \sin t) &= \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ -\sin t + i \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\underline{\varphi^{[1]}(t) = (\cos t, -\sin t)}, \quad \underline{\varphi^{[2]}(t) = (\sin t, \cos t)}$$

$$(B) \quad \omega_p(t) = c_1(t)\varphi^{[1]}(t) + c_2(t)\varphi^{[2]}(t) = c_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2(t) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in J.$$

$\forall t \in J :$

$$\begin{aligned} c_1' \cos t + c_2' \sin t &= \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -c_1' \sin t + c_2' \cos t &= \operatorname{tg} t \end{aligned}$$

$$D(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1, \quad D_1(t) = \begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 t - 1 & \sin t \\ \operatorname{tg} t & \cos t \end{vmatrix} = -\cos t,$$

$$D_2(t) = \begin{vmatrix} \cos t & \operatorname{tg}^2 t - 1 \\ -\sin t & \operatorname{tg} t \end{vmatrix} = \sin t + \frac{\sin^3 t}{\cos^2 t} - \sin t = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \sin t.$$

$$\text{Odtud } c_1(t) = \int \frac{D_1(t)}{D(t)} dt = - \int \cos t dt = -\sin t, t \in J,$$

$$c_2(t) = \int \frac{D_2(t)}{D(t)} dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t} \sin t dt = \cos t + \frac{1}{|\cos t|} = \cos t + \frac{1}{\cos t},$$

neboť $t \in J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\text{Tedy } \omega_p(t) = -\sin t \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + \left(\cos t + \frac{1}{\cos t}\right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in J \Rightarrow$$

$$\omega_{\text{ob}}(t) = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{\sin t}{\cos t} \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 2 \end{pmatrix}, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), c_1 \in \mathbb{R}, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(C)

$$\omega_{\text{Ob}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 + 2 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{\omega_p(t) = (\operatorname{tg} t, 2), t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}}.$$

▲

Příklady k procvičení

1. Určete všechna maximální řešení zadaných soustav lineárních diferenciálních rovnic:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 + e^t, \\ y_2' = 3y_1 - 2y_2 + t, \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 - \cos t, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + \sin t, \end{cases} \\ \text{c)} \quad \begin{cases} y_1' = -2y_1 + 2y_2 + t, \\ y_2' = 3y_1 - y_2 - t. \end{cases} & \end{array}$$

2. Nalezněte maximální řešení zadaných Cauchyových úloh:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} y_1' = 4y_1 + 5y_2, \\ y_2' = -4y_1 - 4y_2, \\ y_1(0) = 5, y_2(0) = -6, \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2, \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2, \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = -1, \end{cases} \\ \text{c)} \quad \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 - \cos t, \\ y_2' = -2y_1 - y_2 + \sin t + \cos t, \\ y_1(0) = 1, y_2(0) = -2. \end{cases} & \end{array}$$

3. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} q_1'(t) + q_2'(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 10, \\ -2q_1'(t) - q_1(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0, q_2(0) = 0. \end{cases}$$

z Příkladu 1.9 popisující hodnotu elektrického náboje q v obvodu popsaném v tomto příkladě v závislosti na čase.

4. Vyřešte úlohu

$$\begin{cases} q_1'(t) + q_2'(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ -2q_1'(t) - q_1(t) + \frac{1}{5}q_2(t) &= 0, \\ q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 10. \end{cases}$$

z Příkladu 1.9 popisující hodnotu elektrického náboje q v obvodu popsaném v tomto příkladě v závislosti na čase.

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{3}{2}te^t + t,$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$
 $y_2(t) = C_1 e^t + 3C_2 e^{-t} + \frac{3}{2}te^t - \frac{1}{2}e^t + 2t + 1,$
- b) $y_1(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + 2t \cos t - t \sin t,$
 $y_2(t) = \left(\frac{1}{5}C_1 + \frac{2}{5}C_2\right) \sin t + \left(\frac{2}{5}C_1 - \frac{1}{5}C_2\right) \cos t + t \cos t + \frac{1}{5} \sin t - \frac{3}{5} \cos t,$
 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R},$
- c) $y_1(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{1}{16},$ $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}.$
 $y_2(t) = \frac{3}{2}C_1 e^t - C_2 e^{-4t} - \frac{1}{4}t + \frac{1}{16},$
2. a) $y_1(t) = 5 \cos(2t) - 5 \sin(2t),$ $t \in \mathbb{R},$
 $y_2(t) = -6 \cos(2t) + 2 \sin(2t),$
- b) $y_1(t) = -e^{3t} + e^{2t},$ $t \in \mathbb{R},$
 $y_2(t) = -2e^{3t} + e^{2t},$
- c) $y_1(t) = \cos t - \sin t - t \cos t,$ $t \in \mathbb{R}.$
 $y_2(t) = -2 \cos t + t \sin t + t \cos t,$
3. $\bar{q}_1(t) = \left(-5 - \frac{10\sqrt{6}}{3}\right) \cdot e^{\frac{(-4+\sqrt{6}) \cdot t}{10}} + \left(-5 + \frac{10\sqrt{6}}{3}\right) \cdot e^{\frac{(-4-\sqrt{6}) \cdot t}{10}} + 10,$
 $\bar{q}_2(t) = \left(-25 - \frac{25\sqrt{24}}{6}\right) \cdot e^{\frac{(-8+\sqrt{24}) \cdot t}{20}} + \left(-25 + \frac{25\sqrt{24}}{6}\right) \cdot e^{\frac{(-8-\sqrt{24}) \cdot t}{20}} + 50,$ $t \in \mathbb{R}.$
4. $\bar{q}_1(t) = \frac{5\sqrt{6}}{6} \cdot e^{\frac{(-4+\sqrt{6}) \cdot t}{10}} - e^{\frac{(-4-\sqrt{6}) \cdot t}{10}},$
 $\bar{q}_2(t) = \left(5 + \frac{5\sqrt{6}}{6}\right) \cdot e^{\frac{(-4+\sqrt{6}) \cdot t}{10}} + \left(5 - \frac{5\sqrt{6}}{6}\right) \cdot e^{\frac{(-4-\sqrt{6}) \cdot t}{10}},$ $t \in \mathbb{R}.$

Literatura

- [1] J. Brabec, B. Hrůza: *Matematická analýza II*. SNTL (1986).
- [2] J. Brabec, F. Martan, Z. Rozenský: *Matematická analýza I*. SVTL (1965).
- [3] M. Braun: *Differential Equations and Their Applications*. Springer Verlag (1993).
- [4] R. Bronson, G. B. Costa: *Schaum's Outline of Differential Equations*. McGraw-Hill (2006).
- [5] B. Budinský, J. Charvát: *Matematika II*. SNTL (1990).
- [6] B.G. Katzung: *Základní a klinická farmakologie*. H & H (1994).
- [7] A. Kufner: *Obyčejné diferenciální rovnice*. ZČU v Plzni (1993).
- [8] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec: *Matematika II. díl*. SVTL (1965).
- [9] M. Tennenbaum, H. Pollard: *Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences*. Dover Publications (1985).

Rejstřík

B

Bernoulliova diferenciální rovnice, 62

C

Cauchyova úloha, 25, 29, 89, 92, 131
 maximální řešení, 26, 131
 řešení, 25, 89, 131

D

diference, 61
 diferenciální rovnice, 1

E

exaktní diferenciální rovnice, 67, 69, 70, 76, 78
 nutná podmínka, 76
 postačující podmínka, 77

I

integrační faktor, 82–84
 integrální křivka, 26

J

jednoduše souvislá oblast, 77

K

kmenová funkce, 67, 70

L

lineární diferenciální rovnice
 n -tého řádu, 92
 fundamentální systém řešení, 96, 103
 homogenní, 92
 obecné řešení, 96
 partikulární řešení, 96
 prvního řádu, 40
 homogenní, 40, 44, 46

obecné řešení, 41, 49

partikulární řešení, 44, 49

lineární element, 59

Lipschitzova podmínka, 54

M

metoda přenásobení, 40, 84, 94
 metoda speciální pravé strany, 120
 metoda variace konstant, 111, 151
 metoda variace konstanty, 47

N

Newtonův zákon ochlazování, 8
 numerická metoda pro řešení ODR 1.
 řádu s počáteční podmínkou
 Eulerova metoda, 61

O

oblast, 76
 obyčejná diferenciální rovnice, 24, 29
 n -tého řádu, 87
 explicitní tvar, 87
 implicitní tvar, 87
 řešení, 87
 maximální řešení, 26
 prvního řádu, 24
 explicitní tvar, 24
 implicitní tvar, 24
 řešení, 24

P

počáteční podmínka, 25, 40
 počáteční podmínky, 89, 92, 130
 populační rovnice, 10
 posloupnost Picardových aproximací, 55
 potenciál, 67, 76, 77

princip superpozice, 100

R

rovnice se separovanými proměnnými, 29

S

směrové pole, 59

soustavy lineárních diferenciálních rovnic

homogenní, 132

fundamentální systém řešení, 137

komplexní řešení, 133

obecné řešení, 137

s konstantními koeficienty, 137

nehomogenní, 149

obecné řešení, 150

soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, 128

maximální řešení, 131

řešení, 129

souvislá množina, 76

T

technika slepování, 37, 65, 78, 81

V

věta

o existenci a jednoznačnosti řešení, 53, 90, 131

o existenci a jednoznačnosti řešení pro homogenní soustavy, 132

o nutné podmínce exaktnosti, 76

o postačující podmínce existence potenciálu, 77

o řešení exaktní rovnice, 70

o transformaci Bernoulliovy diferenciální rovnice, 63

o zpětné transformaci, 64

o existenci řešení, 90

o existenci řešení a jednoznačnosti pro LDR řádu n , 93

o lineární nezávislosti funkcí, 106

o metodě variace konstant, 151

o metodě variace konstant pro LDR řádu n , 114

o rovnicích se speciální pravou stranou, 120

o tvaru řešení homogenních soustav, 138

o vlastnostech řešení LDR vyšších řádů, 95

o Wronskiánu, 107

Peanova (o existenci řešení), 52, 131

Picardova-Lindelöffova, 53

W

Wronského matice, 105

Wronskián, 105