

Matematické modelování elektromagnetických polí

Dalibor Lukáš

August 24, 2010

Předmluva

Budiž elektromagnetismus. A bylo světlo. (Richard P. Feynman)

Cílem tohoto textu je uvést čtenáře do problematiky modelování elektromagnetických polí a jejich následného řešení moderními numerickými metodami. Čtenář měl získat představu o základních fyzikálních zákonech v elektromagnetismu, o jejich kompaktní podobě ve formě Maxwellových rovnic, o matematické klasifikaci případů těchto rovnic, o nutnosti správné volby Sobolevových prostorů, o výhodách a nevýhodách metody konečných a hraničních prvků a o jejich efektivní implementaci na počítači. Je zřejmé, že není možné proniknout do hloubky všech vyjmenovaných oblastí. Věřím však, že je dobré zabývat se jimi současně, byť jen zprvu velmi povrchně, neboť moderní metody řešení, které maximálně využívají dostupné výpočetní techniky, jsou založeny právě na souladu fyziky, variačních metod, numerických metod, lineární algebry i programovacích technik.

1 Úvod

se sice píše až nakonec, přesto v tomto ranném stadiu naznačím strukturu skript. Budou sestávat ze 3 kapitol: elektrostatika, magnetostatika, elektromagnetické záření. V každé kapitole začnu fyzikou, pak formulují modelovou úlohu, kterou ve zbytku kapitoly budeme řešit metodou konečných prvků a metodou hraničních prvků, případně jejich párováním.

2 Elektrostatika

2.1 Fyzikální podstata

Elektrostatika popisuje časově neměnná silová pole nabitéch těles. Základní veličinou je zde (elektrický) náboj, jehož fyzikální jednotkou je Coulomb [C].

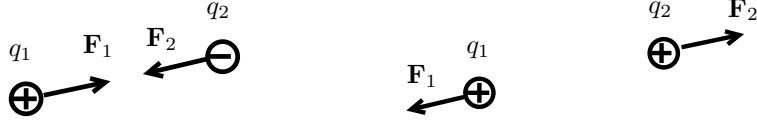


Figure 1: Vzájemná interakce dvou opačných (vlevo) a stejných (vpravo) nábojů

Silová interakce mezi dvěma náboji ve vakuu je popsána Coulombovým zákonem, viz Obr. 1,

$$\mathbf{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \cdot \mathbf{e}_{12} = -\mathbf{F}_2,$$

kde $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ jsou náboje, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, jsou jejich polohy, $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} [\text{F m}^{-1}]$ je permitivita vakua a kde $\mathbf{e}_{12} := (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)/|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ je jednotkový směrový vektor.

Uvažujme n nábojů rozmištěných v \mathbb{R}^3 a vložme na pozici $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ jednotkový náboj. Pak intenzita elektrického pole, jež se značí \mathbf{E} a má fyzikální jednotku Volt [V] na metr, je celková síla, kterou působí našich n nábojů na tento jednotkový náboj, přičemž platí princip superpozice sil. Uvažujme dále, že rozložení nábojů lze popsat funkcí hustoty rozložení náboje $\rho(\mathbf{y})$, která je nulová mimo omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, pak intenzita elektrického pole je, viz též Obr. 2,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{y}) (\mathbf{x} - \mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} d\mathbf{y}. \quad (1)$$

Poznamenejme, že integrál (1) je singulární pro $\mathbf{x} \in \Omega$, je však většinou konečný, např. pro $|\rho(\mathbf{y})| \leq C < \infty$ substituujeme $\mathbf{y} := \mathbf{x} + r(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ a zvolme $\tau > 0$ tak, že $B_\tau(\mathbf{x}) := \{\mathbf{y} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \tau\} \subset \Omega$, pak

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}(\mathbf{x})| &\leq \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \left(\int_{\Omega \setminus B_\tau(\mathbf{x})} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} d\mathbf{y} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\tau \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \frac{|(-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)|}{r^3} r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \right) \\ &\leq \frac{C}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{|\Omega|}{\tau^2} + 2\pi^2 \tau \right) < \infty, \end{aligned}$$

přičemž nejlepší odhad dává $\tau := \sqrt[3]{|\Omega|/\pi^2}$.

Pro (1) platí Gaussův zákon

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2)$$

který říká, že tok elektrického pole přes povrch libovolné oblasti je určen náboji v této oblasti. Použijeme-li z matematiky Gaussovu větu

$$\oint_{\partial\omega} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\omega} \operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) d\mathbf{x},$$

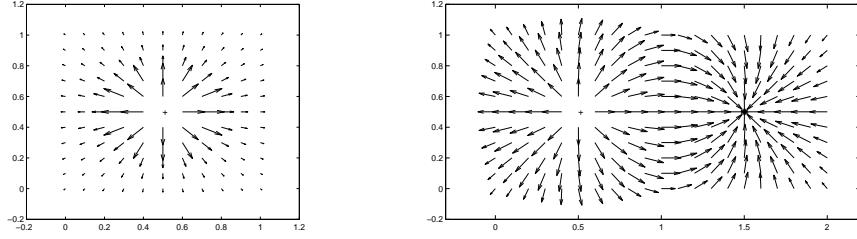


Figure 2: Pole jednoho náboje (vlevo) a dvou nesouhlasných nábojů (vpravo)

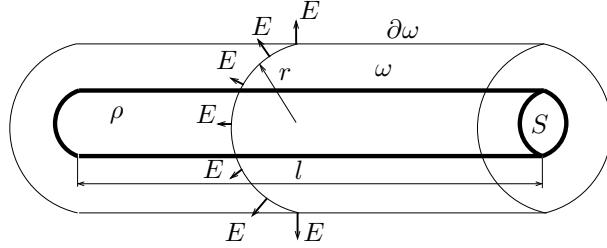


Figure 3: Pole nabité nekonečně dlouhé tyče

pak např. pro $\omega := B_\tau(\mathbf{x})$ a spojitě diferencovatelnou funkci $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ dostáváme pro $\tau \rightarrow 0$ diferenciální tvar Gaussova zákona v elektrostatice pro vakuum:

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (3)$$

Příklad 1. Uvažujme nekonečně dlouhou tyč nabitou konstantní hustotou náboje $\rho > 0$ o průřezu S , viz Obr. 3, a předpokládejme, že intenzita el. pole pak má pouze radiální složku, která je konstantní na povrchu souosých válců ω , tj. $E(r)$. Pak rovnice (2) má tvar

$$E(r)2\pi rl = \rho Sl/\epsilon_0$$

a dostáváme elektrické pole ve tvaru $E(r) = \rho S/(2\pi r \epsilon_0)$.

Příklad 2. Uvažujme rovinou elektrodu nabitou konstantní povrchovou hustotou náboje $\sigma > 0$, viz Obr. 4 (vlevo, pouze levá deska), a předpokládejme, že intenzita el. pole pak má pouze horizontální složku, která je konstantní, označme E_+ . Pak rovnice (2) má tvar

$$2E_+S = \sigma S/\epsilon_0$$

a dostáváme elektrické pole ve tvaru $E_+ = \sigma/(2\epsilon_0)$.

Umístěme poblíž rovinou elektrodu nabitou povrchovou hustotou náboje $-\sigma$, viz Obr. 4 (vlevo, obě desky). Pak z principu superpozice dostáváme pro celkové pole vzorec $E = 2E_+ = \sigma/\epsilon_0$.

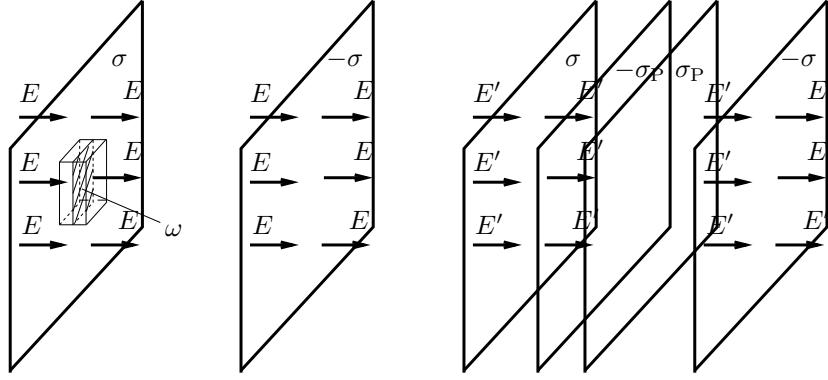


Figure 4: Pole deskového kondenzátoru (vlevo), pole dvou vnořených deskových kondenzátorů (vpravo)

Nakonec vložme do tohoto deskového kondenzátoru jiný opačně orientovaný deskový kondenzátor s povrchovou hustotou σ_P , viz Obr. 4 (vpravo), pak z principu superpozice má výsledné pole velikost

$$E' = E - E_P = (\sigma - \sigma_P)/\epsilon_0.$$

Výše zmíněný příklad dobře modeluje dielektrické materiály, v nichž se po vložení do elektrostatického pole natočí molekuly v souladu s vnějším polem podle Coulombova zákona. Označme $\rho_P(\mathbf{x}) = \text{div}(-\mathbf{P}(\mathbf{x}))$ hustotu polarizovaného náboje v dielektriku, kde \mathbf{P} je elektrostatická polarizace. Pak z (3)

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) &= \frac{\rho(\mathbf{x}) + \rho_P(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \\ \text{div}(\epsilon_r(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})) &:= \text{div} \left(\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

kde $\epsilon_r(\mathbf{x}) := 1 + |\mathbf{P}(\mathbf{x})|/(\epsilon_0|\mathbf{E}(\mathbf{x})|) \geq 1$ je relativní permitivita, předpokládáme lineární závislost $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. Zavedme $\mathbf{D}(\mathbf{x}) := \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x})$ elektrickou indukci, pak diferenciální, resp. integrální tvar Gaussova zákona v dielektriku je

$$\text{div}(\mathbf{D}(\mathbf{x})) = \rho(\mathbf{x}), \oint_{\partial\omega} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\omega} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4)$$

Elektrostatické pole je potenciální, tj.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}),$$

kde např.

$$u(\mathbf{x}) := 1/(4\pi\epsilon_0) \int_{\Omega} \rho(\mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}| d\mathbf{x}$$

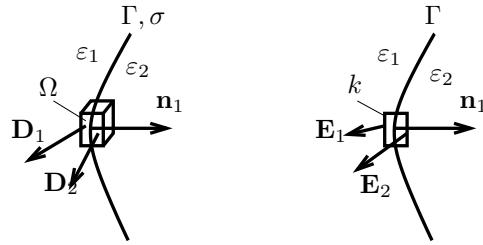


Figure 5: Podmínky přechodu na rozhraní dvou dielektrik

v případě (1). Všimněme si, že

$$u(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \text{ pro } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (5)$$

V potenciálním poli práce, kterou pole vykoná při přemístění jednotkového náboje z polohy $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ do polohy $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, nezávisí na dráze

$$W_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} = - \int_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{b}) - u(\mathbf{a})$$

a tedy pro libovolnou uzavřenou křivku k

$$\oint_k \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = 0. \quad (6)$$

Použijeme-li z matematiky Stokesovu větu

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}),$$

pak pro $|\Sigma| \rightarrow 0$ dostáváme

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}. \quad (7)$$

Rovnice (4–7) vyžadují diferencovatelné, resp. spojité funkce $\varepsilon_r(\mathbf{x})$ a $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. V případě rozhraní dvou různých materiálů, viz Obr. 5, dostáváme z integrálních tvarů rovnic (4) a (6) pro $|\omega| \rightarrow 0$, resp. $|\Sigma| \rightarrow 0$, kde $k := \partial\Sigma$, podmínky na rozhraní

$$(\mathbf{D}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{D}_2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}), \quad (8)$$

$$(\mathbf{E}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{E}_2(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (9)$$

kde σ je případný povrchový náboj na rozhraní.

2.2 Modelová úloha, redukce do \mathbb{R}^2

Modelová úloha pro elektrostatiku je načrtnuta na Obr. 6 (vlevo). Budeme uvažovat dva materiály: vzduch (vakuum), v němž je vloženo v oblasti Ω_r

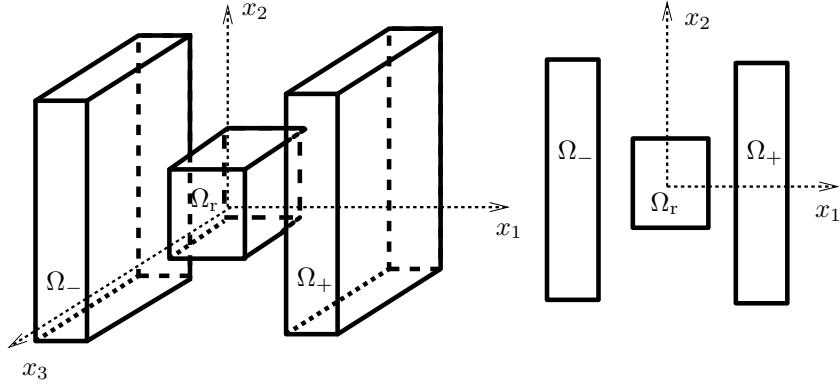


Figure 6: Modelová úloha elektrostatiky: deskový kondenzátor (vlevo), redukce do \mathbb{R}^2 (vpravo)

dielektrikum o relativní permitivitě $\varepsilon_r > 1$. Oblastí zde rozumíme omezenou a otevřenou podmnožinu R^d , kde $d \in \{2, 3\}$. Dále mějme ve vzduchu v oblastech Ω_+ a Ω_- vloženy dvě nabité desky, o nichž víme, že je na jejich povrchu konstantní potenciál $U > 0$, resp. $-U$. Pole elektrostatického potenciálu pak popisuje následující systém

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -\Delta u_r(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ -\Delta u_0(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_r \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}, \\ \partial u_0(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n} - \varepsilon_r \partial u_r(\mathbf{x})/\partial \mathbf{n} & = & 0 & \mathbf{x} \in \partial \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) - u_r(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \partial \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) & = & U & \mathbf{x} \in \partial \Omega_+, \\ u_0(\mathbf{x}) & = & -U & \mathbf{x} \in \partial \Omega_-, \\ u_0(\mathbf{x}) & \rightarrow & 0 & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (10)$$

kde $d := 3$ je dimenze, první dvě rovnice plynou z (4), třetí z (8), čtvrtá z (9), další dvě z definice problému a poslední rovnice je vlastnost (5). Hledané potenciály u_0 a u_r jsou dvakrát spojité diferencovatelné funkce na $\Omega_0 := \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_r \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}$, resp. na Ω_r , které navíc mají spojité derivace až do hranice, což značíme $u_0 \in C^2(\Omega_0) \cap C^1(\overline{\Omega_0})$, $u_r \in C^2(\Omega_r) \cap C^1(\overline{\Omega_r})$.

V případě, že rozměry elektrod a dielektrika ve směru x_3 jsou dostatečné, lze úlohu (10) redukovat do \mathbb{R}^2 , a to tak, že budeme uvažovat typický řez $x_3 := 0$ a předpokládat, že závislost veličin na souřadnici x_3 lze zanedbat. Formulace úlohy pak zůstává formálně shodná s (10) s rozdílem, že dimenze je $d := 2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a oblasti Ω_r , Ω_+ a Ω_- jsou znázorněny na Obr. 6 (vpravo).

2.3 Variační formulace

Uvažujme úlohu (10) v libovolné dimenzi $d \in \{2, 3\}$. Data úlohy, tj. geometrii a konstanty ε_r zahrňme do následující materiálové funkce

$$\varepsilon(\mathbf{x}) := \begin{cases} \varepsilon_0 \varepsilon_r, & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ \varepsilon_0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega_r}, \end{cases}$$

Dále uvažujme dostatečně velkou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tak, že $\Omega \supset \overline{\Omega_r}$, $\Omega \cap \Omega_+ = \Omega \cap \Omega_- = \emptyset$ a předpokládejme, že u_0 je vně oblasti $\Omega \cup \Omega_+ \cup \Omega_-$ zanedbatelně malá. Předpokládáme proto, že $u(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus (\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-)$, čímž vnášíme do řešení chybu. Ta bude sice klesat se zvětšujícím se poloměrem (vepsané koule v) oblasti Ω , bohužel ji však neumíme předem dobře odhadnout. Příbližné řešení úlohy (10) hledáme jako funkci $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, která nahrazuje neznámé v (10) takto

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} u_r(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_0 := \Omega \setminus \overline{\Omega_r \cup \Omega_+ \cup \Omega_-}, \\ U, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_+, \\ -U, & \mathbf{x} \in \partial\Omega_-, \\ 0, & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (11)$$

Vezměme diferencovatelnou funkci $v : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Přenásobme první rovnici v (10) funkcí v a konstantou $-\varepsilon_0 \varepsilon_r$ a zintegrujme přes Ω_r . Dostáváme

$$\int_{\Omega_r} -\varepsilon_0 \varepsilon_r \Delta u_r(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Nyní použijeme z matematiky Greenovu větu

$$\int_{\omega} \frac{\partial q(\mathbf{x})}{\partial x_i} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\omega} q(\mathbf{x}) \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\mathbf{x} + \int_{\partial\omega} q(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) n_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (12)$$

kde $n_i(\mathbf{x})$ značí i -tou složku vnějšího normálového vektoru k ω v bodě $\mathbf{x} \in \partial\omega$, a dostáváme

$$\int_{\Omega_r} \varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla u_r(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_r} \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial u_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Podobně přenásobíme druhou rovnici v (10) funkcí v a konstantou $-\varepsilon_0$, zintegrujeme přes Ω , aplikujeme Greenovu formuli (12) a dostáváme

$$\int_{\Omega} \varepsilon_0 \nabla u_0(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_0 \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Sečtení posledních dvou rovnic s využitím třetí rovnice v (10), definic ε a v dává

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_0 \frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} v(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \\ & \int_{\partial\Omega_r} \varepsilon_0 \left(\frac{\partial u_0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} - \varepsilon_r \frac{\partial u_r(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})} \right) v(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

kde poslední rovnost je variační rovnice pro úlohu (10).

Nyní si řekneme v jaké množině funkcí budeme hledat řešení u a co mají splňovat testovací funkce v . Aby měla variační rovnice smysl, musí pro řešení u i testovací funkce v platit, že integrály $\int_{\Omega} |\nabla w(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ mají smysl a jsou konečné, že v jistém smyslu $v(\mathbf{x}) = 0$ pro $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ a že hraniční hodnoty u jsou jako v (11). Z teorie variačních metod prvnímu požadavku vyhovuje Sobolevův prostor

$$V := H^1(\Omega) := \{v(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega) : \nabla v(\mathbf{x}) \in [L^2(\Omega)]^3\},$$

kde $L^2(\Omega)$ je prostor všech reálných funkcí, které jsou Lebesgueovsky integrovatelné s kvadrátem na Ω a ∇ je zobecněný gradient. Tento vektorový prostor lze také definovat následujícím zúplněním prostoru nekonečně diferencovatelných funkcí v $\overline{\Omega}$

$$H^1(\Omega) := \overline{C^\infty(\overline{\Omega})}^{\|\cdot\|_1}, \quad \|v\|_1 := \int_{\Omega} v(\mathbf{x})^2 + |\nabla v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x},$$

čímž rozumějme, že v $H^1(\Omega)$ jsou nejen všechny funkce z $C^\infty(\overline{\Omega})$, ale i všechny jejich posloupnosti, které jsou Cauchyovské v normě $\|\cdot\|_1$. Analogii této definice již dobře známe v případě reálných čísel, které obsahují nejen všechny racionální čísla, tj. celočíselné zlomky, ale i jejich Cauchyovské posloupnosti, jejichž neracionální limity, např. $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \rightarrow e$, nazýváme iracionální čísla. Testovací funkce v budeme vybírat ze Sobolevova prostoru

$$V_0 := H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1},$$

kde $v \in C_0^\infty(\Omega)$, právě když $v \in C^\infty(\Omega)$ a $\text{supp } v := \overline{\{\mathbf{x} \in \Omega : v(\mathbf{x}) \neq 0\}} \subset \Omega$. Konečně řešení u hledáme v prostoru $V_U := \overline{C_U^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_1}$, kde

$$\begin{aligned} C_U^\infty(\Omega) &:= \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } v \subset \Omega \cup \overline{\Omega_+} \cup \overline{\Omega_-}, \\ &\quad v(\mathbf{x}) = U \text{ na } \partial\Omega_+ \text{ a } v(\mathbf{x}) = -U \text{ na } \partial\Omega_-\}. \end{aligned}$$

Variační formulace úlohy (10) je tedy následující:

$$\text{Najdi } u \in V_U : \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \forall v \in V_0. \quad (13)$$

Pro tuto úlohu lze dokázat existenci jednoznačného řešení a jeho spojitou závislost na změnách geometrie Ω i materiálové funkce ε .

K variační formulaci (10) lze dojít i fyzikálně srozumitelnějším způsobem, a to z principu minima funkcionálu elektrostatické potenciální energie úlohy (10)

$$\varphi(v) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) |\nabla v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Totiž minimum φ může nastat pouze v bodě $u \in V_U$, který je stacionární, tj. splňuje právě variační rovnici

$$\varphi'(u, v) = 0 \quad \forall v \in V_0,$$

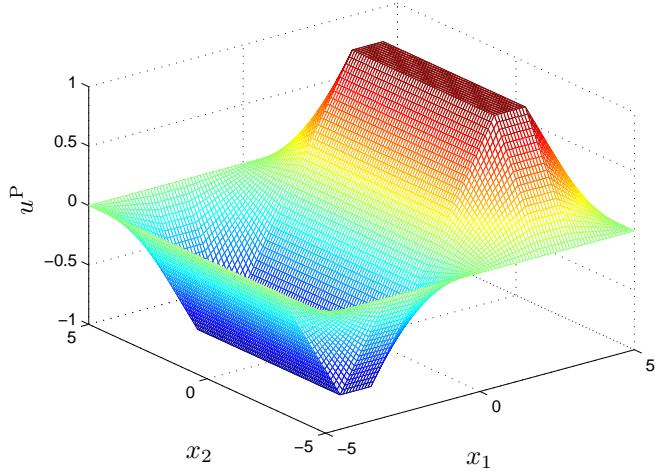


Figure 7: Příklad partikulárního řešení $u^P(\mathbf{x})$ okrajových hodnot variační formulace (13) pro $d := 2$

kde $\varphi'(u, v)$ je Fréchetova derivace φ v bodě u a ve směru v

$$\varphi'(u, v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(u + tv) - \varphi(u)}{t} = \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}).$$

Ve variační formulaci (13) je nepraktické to, že řešení je z jiného prostoru než testovací funkce. Ukážeme si tři způsoby, jak to napravit. Za prvé můžeme řešení rozložit na homogenní a partikulární $u := u^H + u^P$, kde $u^H \in V_0$ a $u^P \in V_U$, viz Obr. 7. Pak řešíme úlohu: Najdi $u^H \in V_0$ tak, že

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u^H(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u^P(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall v \in V_0. \quad (14)$$

Partikulární řešení u^P však úzce souvisí s geometrií Ω a už pro náš příklad jeho nalezení není triviální. Druhým a nejpoužívanějším způsobem je penalizovaná variační formulace: Hledáme $u_\rho \in V$ tak, že $\forall v \in V$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) \nabla u_\rho(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \rho \int_{\partial\Omega_+} u_\rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \rho \int_{\partial\Omega_-} u_\rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) + \\ & \rho \int_{\Gamma} u_\rho(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \rho \int_{\partial\Omega_+} U v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) - \rho \int_{\partial\Omega_-} U v(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (15)$$

kde $\Gamma := \partial\Omega \setminus \overline{\partial\Omega_+ \cup \partial\Omega_-}$, $\rho \gg 0$ je penalizační parametr, přičemž $\|u_\rho - u\|_1 \rightarrow 0$ pro $\rho \rightarrow \infty$.

Třetí způsob je založen na minimalizaci energetického funkcionálu φ na prostoru V s lineárními rovnostními omezeními $u(\mathbf{x}) = U$ na $\partial\Omega_+$, $u(\mathbf{x}) = -U$ na $\partial\Omega_-$ a $u(\mathbf{x}) = 0$ na Γ . Hledáme tedy vázaný extrém. Ten nastane ve stacionárním bodě Lagrangeovského funkcionálu

$$L(u; \lambda_+, \lambda_-) := \varphi(u) + \int_{\partial\Omega_+} \lambda_+(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}) - U) dl(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega_-} \lambda_-(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}) + U) dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \lambda(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x})$$

a je řešením následující sedlo–bodové formulace: Hledáme $(u; \lambda_+, \lambda_-, \lambda) \in V \times L^2(\partial\Omega_+) \times L^2(\partial\Omega_-) \times L^2(\Gamma)$ tak, že

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon \nabla u \nabla v d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_+} \lambda_+ v dl(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega_-} \lambda_- v dl(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} \lambda v dl(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall v \in V, \\ & \int_{\partial\Omega_+} u q_+ dl(\mathbf{x}) = U \int_{\partial\Omega_+} q_+ dl(\mathbf{x}) \quad \forall q_+ \in L^2(\partial\Omega_+), \\ & \int_{\partial\Omega_-} u q_- dl(\mathbf{x}) = -U \int_{\partial\Omega_-} q_- dl(\mathbf{x}) \quad \forall q_- \in L^2(\partial\Omega_-), \\ & \int_{\Gamma} u q dl(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall q \in L^2(\Gamma). \end{aligned} \tag{16}$$

Pozamenejme, že formulace (16) dává jednoznačné řešení u , které spojitě závisí na datech, tj. $\partial\Omega$, $\partial\Omega_+$, $\partial\Omega_-$ a U , ale Lagrangeovské multiplikátory λ_+ , λ_- a λ jsou nejednoznačné.

2.4 Uzlová metoda konečných prvků

Je zřejmé, že žádnou z variačních formulací (13)–(16) neumíme řešit analyticky, ale můžeme je diskretizovat a nahradit soustavami lineárních rovnic. To uděláme tak, že prostory V , V_0 , či V_U nahradíme vhodnými konečně–dimenzionálními podprostory, což vede na Galerkinovu formulaci. Metoda konečných prvků je speciálním případem, kdy bázi konečně–dimenzionálních podprostorů volíme tak, že výsledná soustava má řídkou matici, tj. většina prvků je v matici nulová.

Uvažujme nyní redukovanou dimenzi $d := 2$. Prvním krokem v metodě konečných prvků je diskretizace Ω , v našem případě do m trojúhelníků, jejichž vnitřky (otevřené oblasti) značíme T^k , viz Obr. 8,

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{k=1}^m \overline{T^k}, \quad T^i \cap T^j = \emptyset \text{ pro } i \neq j,$$

tak, že dva sousední trojúhelníky mají společnou pouze hranu nebo bod. Zároveň chceme, aby hranice trojúhelníků zahrnuly všechny hranice a rozhraní v geometrii, tj.

$$\bigcup_{k=1}^m \partial T^k \supset \partial\Omega \cup \partial\Omega_r.$$

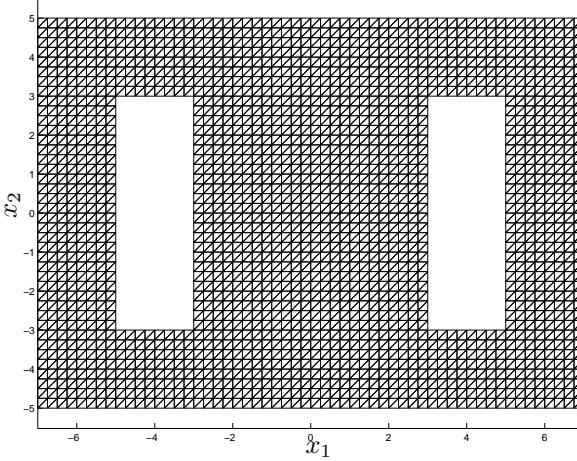


Figure 8: Triangulace oblasti Ω

Konečně chceme, aby nejostřejší úhel, který trojúhelníky svírají, byl zdola omezený konstantou. Definujeme diskretizační parametr $h > 0$ jako délku nejkratší hrany v diskretizaci.

Nad každým uzlem diskretizace \mathbf{x}^i , $i = 1, 2, \dots, n$ definujeme konečnoprvkovou bázovou funkcií $e^i(\mathbf{x}) : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall i \forall k : e^i(\mathbf{x})|_{T^k} = a_k^i + b_k^i x_1 + c_k^i x_2 \quad \text{a} \quad e^i(\mathbf{x}^j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & , i = j, \\ 0 & , i \neq j, \end{cases}$$

kde $a_k^i, b_k^i, c_k^i \in \mathbb{R}$. Takto získáváme approximaci $V^h := \langle e^1(\mathbf{x}), \dots, e^n(\mathbf{x}) \rangle$ prostoru V . Galerkinova approximace variační formulace (15) je následující:

$$\text{Hledáme } u_\rho^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n u_i e^i(\mathbf{x}) \in V^h : a_\rho(u_\rho^h, e^i) = b_\rho(e^i) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

kde $a_\rho(u_\rho, v)$ je bilineární forma na levé straně variační rovnice (15) a $b_\rho(v)$ je lineární forma na pravé straně. Galerkinova approximace je ekvivaletní se soustavou n lineárních rovnic o n neznámých

$$\mathbf{A}_\rho \cdot \mathbf{u}_\rho = \mathbf{b}_\rho, \tag{17}$$

kde $\mathbf{u}_\rho := (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $(\mathbf{A}_\rho)_{ij} := a_\rho(e^j, e^i)$, $(\mathbf{b}_\rho)_j = b_\rho(e^j)$.

Pro Galerkinovu approximaci variační formulace (16) je třeba ještě approximovat Sobolevovy prostory $L^2(\partial\Omega_+)$, $L^2(\partial\Omega_-)$ a $L^2(\Gamma)$. Nechť naše diskretizace pokrývá hranici $\partial\Omega_+$ úsečkami (segmenty) S_+^k , tj. $\bigcup_{k=1}^{m_+} \overline{S_+^k} = \partial\Omega_+$, podobně

pro hranici $\partial\Omega_-$: $\bigcup_{k=1}^{m_-} \overline{S_-^k} = \partial\Omega_-$ a pro hranici Γ : $\bigcup_{k=1}^m \overline{S^k} = \Gamma$ Definujme nad nimi po částech konstantní bázové funkce f_+^i , f_-^i , resp. f^i tak, že

$$\begin{aligned} f_+^i(\mathbf{x})|_{S_+^j} &= \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_+, f_-^i(\mathbf{x})|_{S_-^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_- \text{ a} \\ f^i(\mathbf{x})|_{S^j} &= \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Takto získáváme approximaci $Q_+^h := \langle f_+^1, \dots, f_+^{m_+} \rangle$ prostoru $L^2(\partial\Omega_+)$, approximaci $Q_-^h := \langle f_-^1, \dots, f_-^{m_-} \rangle$ prostoru $L^2(\partial\Omega_-)$ a approximaci $Q^h := \langle f^1, \dots, f^m \rangle$ prostoru $L^2(\Gamma)$. Galerkinova approximace (16) je pak ekvivalentní se soustavou $n + m_+ + m_- + m$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_+^T & \mathbf{B}_-^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}_+ & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_- & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda}_+ \\ \boldsymbol{\lambda}_- \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_+ \\ \mathbf{c}_- \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

kde $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_n)$, $u^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^n u_i e^i(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\lambda}_+ := (\lambda_{+1}, \dots, \lambda_{+m_+})$, $\lambda_+^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{m_+} \lambda_{+i} f_+^i(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\lambda}_- := (\lambda_{-1}, \dots, \lambda_{-m_-})$, $\lambda_-^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{m_-} \lambda_{-i} f_-^i(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda^h(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^m \lambda_i f^i(\mathbf{x})$, $(\mathbf{A})_{ij} := \int_{\Omega} \varepsilon \nabla e^j \nabla e^i d\mathbf{x}$, $(\mathbf{B}_+)_i := \int_{S_+^i} e^j dl(\mathbf{x})$, $(\mathbf{B}_-)_i := \int_{S_-^i} e^j dl(\mathbf{x})$, $(\mathbf{B})_{ij} := \int_{S^i} e^j dl(\mathbf{x})$, $(\mathbf{c}_+)_i := U|S_+^i|$ a $(\mathbf{c}_-)_i := -U|S_-^i|$, kde $|.|$ značí délku úsečky.

Pro efektivní sestavení matic \mathbf{A}_ρ , \mathbf{A} a pravých stran \mathbf{b}_ρ není výhodné postupovat přes jednotlivé prvky matic a vektorů, neboť bychom pro každou bázovou funkci e^i museli iterovat přes všechny trojúhelníky obsažené v jejím nosiči. Raději využijeme toho, že integraci přes Ω lze rozdělit na součet integrací přes jednotlivé trojúhelníky, přičemž každý trojúhelník T^k je vázán k právě třem bázovým funkcím s indexy k_1 , k_2 , k_3 , kde \mathbf{x}^{k_1} , \mathbf{x}^{k_2} a \mathbf{x}^{k_3} jsou rohy trojúhelníka T^k seřazeny proti směru hodinových ručiček. Budeme tedy iterovat přes trojúhelníky a sčítat lokální matice a vektory pravých stran, tj. např.

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^m G^k(\mathbf{A}^k), \quad \mathbf{B}_+ = \sum_{k=1}^{m_+} G_+^k(\mathbf{B}_+^k), \quad \mathbf{c}_+ = \sum_{k=1}^{m_+} H_+^k(c_+^k),$$

kde $\mathbf{A}^k \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{B}_+^k \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$, $c_+^k \in \mathbb{R}$, $G^k : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_+^k : \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{m_+ \times n}$, zobrazují lokální matice na globální, $H_+^k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m_+}$ zobrazuje lokální vektory na globální.

Zbývá si odvodit lokální matice a vektory. Zvolme affiní substituci

$$\mathbf{x} := R^k(\hat{\mathbf{x}}) := \mathbf{R}^k \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^{k_1}, \quad \text{kde } \mathbf{R}^k := (\mathbf{x}^{k_2} - \mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_3} - \mathbf{x}^{k_1}),$$

která zobrazuje referenční trojúhelník \widehat{T} s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$ na T^k . Zavedme referenční bázové funkce, viz Obr. 9,

$$\widehat{e}^1(\hat{\mathbf{x}}) := 1 - \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \quad \widehat{e}^2(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{x}_1, \quad \widehat{e}^3(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{x}_2,$$

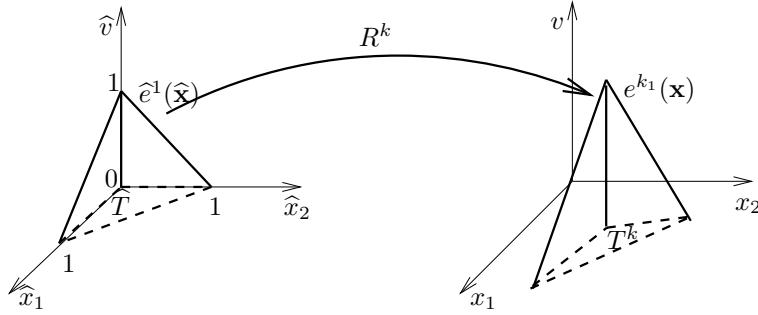


Figure 9: Transformace referenčních tvarových funkcí

přičemž $\hat{e}^i(\hat{\mathbf{x}}) = e^{k_i}(R^k(\hat{\mathbf{x}}))$ pro $i = 1, 2, 3$ a $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{T}$. Pak lze ukázat, že např.

$$\mathbf{A}^k := \varepsilon^k (\mathbf{R}^k)^{-T} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{|\det(\mathbf{R}^k)|}{2},$$

kde $\varepsilon^k := \varepsilon(\mathbf{x})|_{T^k}$. Zbývající lokální matice a vektory pro úlohu (18) jsou např.

$$\mathbf{B}_+^k := (1/2, 1/2) |S_+^k|, \quad c_+^k := U |S_+^k|.$$

Na Obr. 10 je vykresleno řešení úlohy (18) pro volbu $\varepsilon_r := 2$, $U := 1$, $\Omega := (-7, 7) \times (-5, 5)$, $\Omega_- := (-5, -3) \times (-3, 3)$, $\Omega_+ := (3, 5) \times (-3, 3)$, $\Omega_r := (-1, 1)^2$, s diskretizačním parametrem $h := 0.25$ vedoucím na $n := 2015$, $m_+ := m_- := 64$, $m := 192$.

2.5 Hraniční integrální formulace úlohy na rozhraní

Uvažujme opět modelovou úlohu elektrostatiky (10) redukovanou do $d := 2$ dimenzí. Řešení budeme nyní hledat pomocí potenciálů jednoduché vrstvy

$$\begin{aligned} u_r(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_r, \\ u_0(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) + \\ &\quad \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_0, \end{aligned} \quad (19)$$

kde $\Gamma_r := \partial\Omega_r$, $\Gamma_+ := \partial\Omega_+$, $\Gamma_- := \partial\Omega_-$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ je Greenova funkce nebo též fundamentální řešení Laplaceovy rovnice a kde funkce $w_r, w_0 : \Gamma_r \rightarrow \mathbb{R}$, $w_+ : \Gamma_+ \rightarrow \mathbb{R}$ a $w_- : \Gamma_- \rightarrow \mathbb{R}$ jsou hustoty potenciálů. Takto zvolené řešení již splňuje první, druhý a poslední řádek z formulace (10). Našim cílem bude najít w_r , w_0 , w_+ a w_- tak, aby byly splněny i ostatní rovnice v (10). Poznamenejme, že hledané funkce mají fyzikální smysl — jsou to povrchové hustoty náboje, které by vytvořily stejné pole jako v (10).

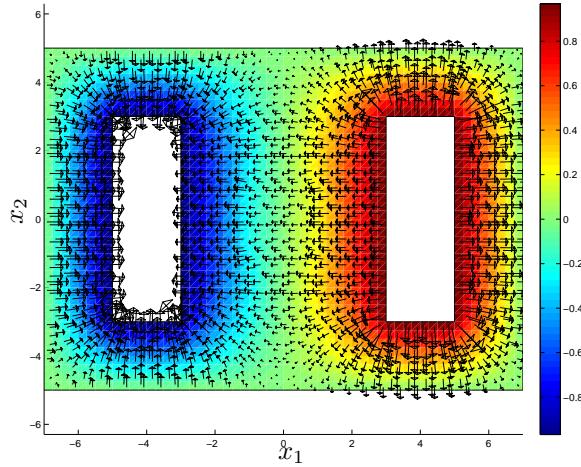


Figure 10: Řešení u , $\mathbf{E} := -\nabla u$ úlohy (18)

Jsou-li hustoty potenciálů spojité funkce, pak např. pro každý bod $\mathbf{x} \in \Gamma_r$, v jehož okolí je Γ hladká, tj. kromě rohů, platí, že pro $\Omega_r \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_r$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \\ \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \frac{1}{2} w_r(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_r} w_r(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (20)$$

přičemž $\partial/\partial n(\mathbf{x})$ je derivace podle vnější jednotkové normály k Ω_r . Podobně platí pro $\Omega_0 \ni \tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x} \in \Gamma_r$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \\ \mathbf{n}_r(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\tilde{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) g(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}) &\rightarrow -\frac{1}{2} w_0(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_r} w_0(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Stejně vlastnosti, tj. spojitost a skok normálové derivace platí i pro zbývající dva potenciály jednoduché vrstvy, tj. členy s w_+ a w_- , přičemž $\partial/\partial n(\mathbf{x})$ má pak význam derivace podle vnější jednotkové normály k Ω_+ , resp. Ω_- a skok $\frac{1}{2}w(\mathbf{x})$ v normálové derivaci je s kladným znaménkem, jdeme-li k \mathbf{x} z vnitřku a se záporným znaménkem, jdeme-li k \mathbf{x} z vnějšku. Je zřejmé, že pokud bod \mathbf{x} leží na jiné křivce než na té, přes níž se integruje, pak jsou v \mathbf{x} příslušný potenciál i jeho normálová derivace spojité.

Zavedme následující operátory tak, že pro $\mathbf{x} \in \Gamma_r \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_-$ (až na příslušné

rohy):

$$\begin{aligned}[V_r w](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_r} w(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad [L_r w](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_r} w(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}), \\ [V_+ w_+](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad [L_+ w_+](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_+} w_+(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}), \\ [V_- w_-](\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y}), \quad [L_- w_-](\mathbf{x}) := \int_{\Gamma_-} w_-(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})} dl(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Pak třetí až šestá rovnice v (10) dávají následující hraničně–integrální formulaci

$$\begin{array}{lll} -\varepsilon_r (\frac{1}{2}I + L_r) w_r + (-\frac{1}{2}I + L_r) w_0 + L_+ w_+ + L_- w_- = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_r, \\ -V_r w_r + V_r w_0 + V_+ w_+ + V_- w_- = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma_r, \\ V_r w_0 + V_+ w_+ + V_- w_- = U, & \mathbf{x} \in \Gamma_+, \\ V_r w_0 + V_+ w_+ + V_- w_- = -U, & \mathbf{x} \in \Gamma_-, \end{array} \quad (21)$$

kde I značí identické zobrazení. Otázkou zůstává, jaké prostory funkcí volit, aby (21) dalo jednoznačné řešení, které spojite závisí na vstupních datech. Volba vhodných (Sobolevových zlomkových) prostorů a matematicky korektní Galerkinova formulace úlohy (21) však vyžaduje použití složitého matematického aparátu a je nad rámec záměru těchto skript. Přesto intuitivní pochopení formulace (21) a následná diskretizace metodou hraničních prvků má dobré využití.

2.6 Metoda hraničních prvků

Podobně jako v (18) uvažujme diskretizaci hranic oblastí Γ_r , Γ_+ a Γ_- do disjunktních otevřených úseček, tj.

$$\bigcup_{k=1}^{m_r} \overline{S_r^k} = \Gamma_r, \quad \bigcup_{k=1}^{m_+} \overline{S_+^k} = \Gamma_+, \quad \bigcup_{k=1}^{m_-} \overline{S_-^k} = \Gamma_-$$

a uvažujme po úsečkách konstantní bázové funkce f_r^i , f_+^i a f_-^i tak, že

$$\begin{aligned} f_r^i(\mathbf{x})|_{S_r^j} &= \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_r, \quad f_+^i(\mathbf{x})|_{S_+^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_+, \\ &\text{a } f_-^i(\mathbf{x})|_{S_-^j} = \delta_{ij} \text{ pro } i, j = 1, \dots, m_-. \end{aligned}$$

V lineárních obalech těchto bází hledejme neznámé hustoty potenciálů

$$\begin{aligned} w_r(\mathbf{x}) &:= \sum_{k=1}^{m_r} w_{rk} f_r^i(\mathbf{x}), \quad w_0(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_r} w_{0k} f_r^i(\mathbf{x}), \\ w_+(\mathbf{x}) &:= \sum_{k=1}^{m_+} w_{+k} f_+^i(\mathbf{x}), \quad w_-(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{m_-} w_{-k} f_-^i(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

přičemž hledané souřadnicové vektory označíme $\mathbf{w}_r := (w_{r1}, \dots, w_{rm})$, $\mathbf{w}_0 := (w_{01}, \dots, w_{0m})$, $\mathbf{w}_+ := (w_{+1}, \dots, w_{+m_+})$ a $\mathbf{w}_- := (w_{-1}, \dots, w_{-m_-})$. Poznamenejme, že jsme porušili předpoklad na spojitost. Vyhne-li se však s body \mathbf{x} krajním bodům úseček, pak vlastnosti (20) stále platí.

Metoda hraničních prvků, resp. její kolokační verze, nyní spočívá v approximaci formulace (21), a to tak, že vyžadujeme splnění rovnic (21) pouze ve středech úseček, které označíme $\mathbf{x}_r^k \in S_r^k$, $\mathbf{x}_+^k \in S_+^k$, resp. $\mathbf{x}_-^k \in S_-^k$. To vede na soustavu $2m + m_+ + m_-$ lineárních rovnic o stejném počtu neznámých

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_r (\frac{1}{2}\mathbf{I}_r + \mathbf{L}_{r,r}) & -\frac{1}{2}\mathbf{I}_r + \mathbf{L}_{r,r} & \mathbf{L}_{r,+} & \mathbf{L}_{r,-} \\ -\mathbf{V}_{r,r} & \mathbf{V}_{r,r} & \mathbf{V}_{r,+} & \mathbf{V}_{r,-} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{+,r} & \mathbf{V}_{+,+} & \mathbf{V}_{+,-} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{-,r} & \mathbf{V}_{-,+} & \mathbf{V}_{-,-} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w}_r \\ \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_+ \\ \mathbf{w}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{U}_+ \\ -\mathbf{U}_- \end{pmatrix}, \quad (22)$$

kde $\mathbf{I}_r \in \mathbb{R}^{m_r \times m_r}$ je jednotková matice a kde pro $p, q \in \{r, +, -\}$ definujeme vektory pravé strany $\mathbf{U}_p := (U, \dots, U) \in \mathbb{R}^{m_p}$ a prvky matic $\mathbf{V}_{p,q}, \mathbf{L}_{p,q} \in \mathbb{R}^{m_p \times m_q}$ následovně: $(\mathbf{V}_{p,q})_{ij} := \int_{S_q^j} g(\mathbf{x}_p^i, \mathbf{y}) dl(\mathbf{y})$, $(\mathbf{L}_{p,q})_{ij} := \int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}_p^i, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_p^i dl(\mathbf{y})$, přičemž \mathbf{n}_r^i , \mathbf{n}_+^i a \mathbf{n}_-^i značí jednotkové normály k S_r^i , S_+^i a S_-^i směřující ven z Ω_r , Ω_+ , resp. Ω_- .

Zatímco velkou výhodou metody hraničních prvků proti metodě konečných prvků je to, že diskretizujeme pouze hranici a že se nedopouštíme chyby ořezáním výpočetní oblasti, jednou z jejích nevýhod je pracnost odvození integrálů. Sesťavování matic $\mathbf{V}_{p,q}$ zahrnuje následující integrály:

$$\begin{aligned} \int_{S_q^j} \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}| dl(\mathbf{y}) &= |\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j| (\ln |\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j| - \ln 2 - 1) \text{ pro } S_p^i = S_q^j, \\ \int_{S_q^j} \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}| dl(\mathbf{y}) &= \frac{1}{|\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j|} ([\mathbf{x}_p^i \times (\mathbf{a}_q^j - \mathbf{b}_q^j) + \mathbf{a}_q^j \times \mathbf{b}_q^j] A_{pq}^{ij} + \\ &\quad (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) \cdot [(\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j) \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j| - (\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j) \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j|]) \\ &\text{pro } S_p^i \neq S_q^j, \end{aligned}$$

kde uvažujeme parametrizaci $S_q^j : \mathbf{y}(t) := \mathbf{a}_q^j + t(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j)$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$, kde

$$A_{pq}^{ij} := \arctg \frac{(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) \cdot (\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j)}{\mathbf{a}_q^j \times (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{x}_p^i) + \mathbf{b}_q^j \times \mathbf{x}_p^i} - \arctg \frac{(\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) \cdot (\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j)}{\mathbf{a}_q^j \times (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{x}_p^i) + \mathbf{b}_q^j \times \mathbf{x}_p^i}$$

a kde pro $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ definujeme součiny $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2$ a $\mathbf{u} \times \mathbf{v} :=$

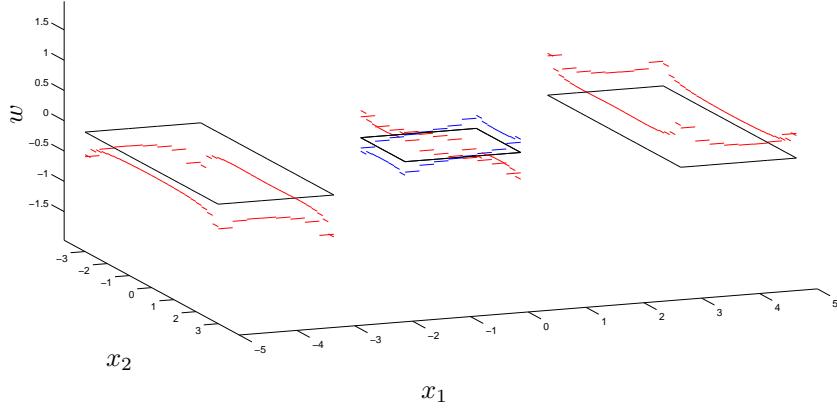


Figure 11: Geometrie (černé) a řešení w_r (modré), w_0 , w_+ , w_- (červeně) úlohy (22)

$u_1 v_2 - u_2 v_1$. Sestavování matic $\mathbf{L}_{p,q}$ zahrnuje tyto integrály:

$$\int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}| \cdot \mathbf{n}_p^i dl(\mathbf{y}) = 0 \text{ pro } S_p^i = S_q^j,$$

$$\int_{S_q^j} \nabla_{\mathbf{x}} \ln |\mathbf{x}_p^i - \mathbf{y}| \cdot \mathbf{n}_p^i dl(\mathbf{y}) = -\frac{1}{|\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j|} \left(\mathbf{n}_p^i \times (\mathbf{b}_q^j - \mathbf{a}_q^j) A_{pq}^{ij} + \mathbf{n}_p^i \cdot (\mathbf{a}_q^j - \mathbf{b}_q^j) \ln \frac{|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{a}_q^j|}{|\mathbf{x}_p^i - \mathbf{b}_q^j|} \right) \text{ pro } S_p^i \neq S_q^j.$$

Na Obr. 11 a 12 je vykresleno řešení úlohy (22) pro volbu $\varepsilon_r := 2$, $U := 1$, $\Omega_- := (-5, -3) \times (-3, 3)$, $\Omega_+ := (3, 5) \times (-3, 3)$, $\Omega_r := (-1, 1)^2$, s diskretizačním parametrem $h := 0.25$ vedoucím na $m_r := 32$, $m_+ := m_- := 64$. Porovnáním Obr. 10 a 12, můžeme vidět, že chyba která vznikla ořezáním výpočetní oblasti v metodě konečných prvků není malá.

3 Magnetostatika

3.1 Fyzikální podstata

Magnetostatika popisuje silová pole vznikající mezi elektrickými náboji pohybující se v čase neměnnou rychlostí. Pak jsou magnetické síly také časově

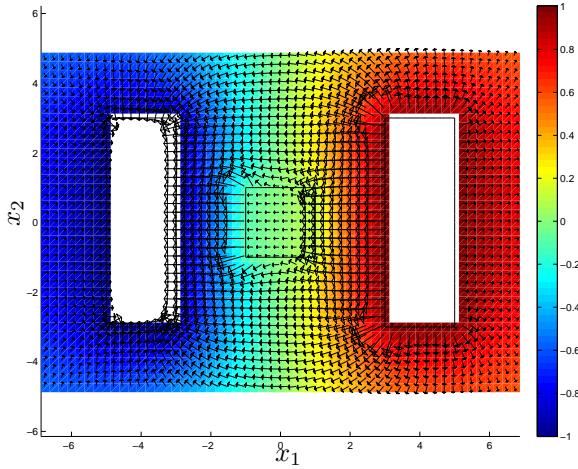


Figure 12: Řešení u , $\mathbf{E} := -\nabla u$ úlohy (22) pomocí (19)

neměnné. Základní budící veličinou je tok nábojů zvaný elektrický proud, jehož jednotkou je Ampér [A]. Magnetostatika tedy popisuje silové účinky ustálených proudů.

Prostorovou hustotu elektrického proudu definujeme jako $\mathbf{j}(\mathbf{x}) := \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x})$, kde \mathbf{v} značí rychlostní pole nábojů o hustotě ρ . Platí zákon zachování elektrického náboje, tj. pro každou omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je tok nábojů z povrchu roven jeho úbytku uvnitř:

$$\int_{\partial\Omega} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = - \int_{\Omega} \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t} d\mathbf{x}.$$

Pomocí Gaussovy věty získáme diferenciální tvar tohoto zákona:

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}(\mathbf{x})) = - \frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial t}.$$

Elektrický proud I v bodě $\mathbf{x} \in \Sigma$ je pak definován jako tok elektrického náboje trubicí o průřezu Σ takto: $I(\mathbf{x}) := \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$.

Magnetická pole se popisují magnetickou indukcí \mathbf{B} , jejíž jednotka je Tesla [T]. Magnetické pole \mathbf{B} působí na náboj q pohybující se rychlostí \mathbf{v} , Lorentzovou silou, viz Obr. 13 (vlevo),

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

což je další složka k případné Coulombovské síle $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$. Podobně působí magnetické pole na vodič protékaný proudem I o proudové hustotě \mathbf{j} silou

$$\mathbf{F} = \int_l \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{x}) dl(\mathbf{y}) = \int_l I(\mathbf{y}) \mathbf{n}(\mathbf{y}) \times \mathbf{B}(\mathbf{y}) dl(\mathbf{y}). \quad (23)$$

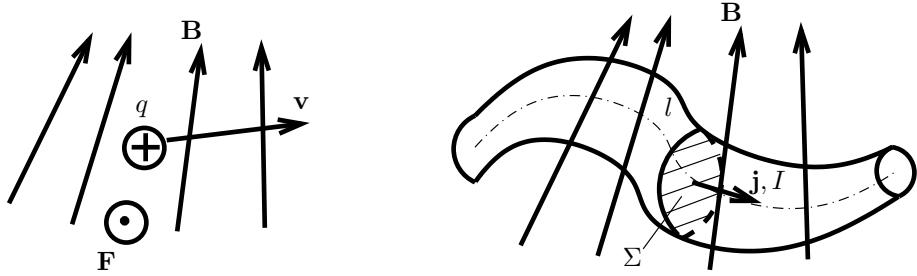


Figure 13: Lorentzova síla působící na pohybující se náboj (vlevo) a na proudovodič (vpravo)

Pohybující se náboje vytváří také magnetické silové pole, které zpětně ovlivňuje vnější pole \mathbf{B} , což však často zanedbáváme.

Zbývá popsat zákony rozložení magnetického pole $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ budících proudů $\mathbf{j}(\mathbf{x})$. První zákon říká, že neexistují zdroje ani nory magnetického pole, tj. neexistuje magnetický analog k elektrickému náboji. To lze pro omezenou oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vyjádřit jako

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0, \quad (24)$$

což s použitím Gaussovy věty dává diferenciální rovnici

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = 0. \quad (25)$$

Druhý, Ampérův zákon, říká, že magnetické pole vzniká jako vír kolem proudovodičů a jeho velikost je úměrná elektrickému proudu procházejícímu tímto vřírem

$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{x}) dl(\mathbf{x}) = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}), \quad (26)$$

kde $\mu_0 := 4\pi 10^{-7} [\text{H m}^{-1}]$ je permeabilita vakua a platí, že $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, kde c je rychlosť světla ve vakuu. Aplikace Stokesovy věty na poslední rovnici dává diferenciální tvar Ampérova zákona

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}). \quad (27)$$

Příklad 3. Uvažujme tenký nekonečně dlouhý vodič protékající proudem I , viz Obr. 14, a předpokládejme, že intenzita mag. pole má pouze angulární složku, která je funkcí poloměru, tj. $B(r)$. Pak rovnice (26) má tvar

$$B(r)2\pi r = \mu_0 I$$

a dostáváme magnetické pole ve tvaru $B(r) = \mu_0 I/(2\pi r)$.

Příklad 4. Uvažujme dále, že rovnoběžně s vodičem z předchozího příkladu položíme do vzdálenosti r vodič tentokrát konečné délky l protékající opět proudem I . Pak z předchozího příkladu a ze vzorce (23) plyne, že vodiče na sebe

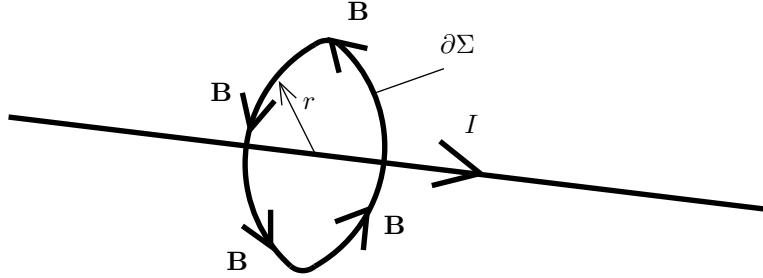


Figure 14: Pole tenkého nekonečně dlouhého vodiče

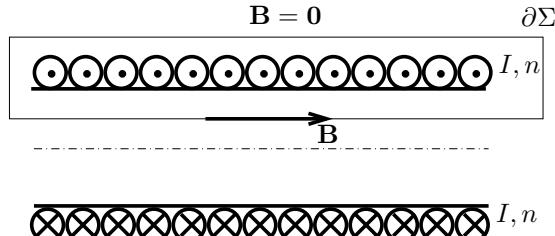


Figure 15: Pole nekonečně dlouhé cívky

navzájem působí magnetickou silou $F = \mu_0 I^2 l / (2\pi r)$. Tato síla je přitažlivá v případě stejného směru obou proudů a odpudivá při opačných směrech. To také vysvětluje, proč se závity v cívce k sobě přitahují.

Příklad 5. Uvažujme nekonečně dlouhou válcovou cívku, na níž je s hustotou závitů n navinut vodič protékající proudem I , viz Obr. 15. Předpokládejme, že intenzita mag. pole je nenulová pouze uvnitř cívky a má pouze konstantní axiální složku B . Pak rovnice (26) má tvar

$$Bl = \mu_0 n l I$$

a dostáváme velikost magnetického pole $B = \mu_0 n I$.

Zatím jsme uvažovali pouze proudovodiče ve vakuu. V feromagnetických materiálech se nacházejí domény náhodně orientovaných proudových smyček, dipólů. Po vložení do vnějšího magnetického pole je Lorentzova síla natáčí tak, aby magnetické pole zesílili, viz Obr. 16. Označme hustotu zmagnetizovaných dipólů $\mathbf{j}_{\text{mag}}(\mathbf{x}) = \text{rot}(\mathbf{M}(\mathbf{x}))$, kde $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ je magnetizace. Pak z (27)

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{B}(\mathbf{x})) &= \mu_0 (\mathbf{j}(\mathbf{x}) + \mathbf{j}_{\text{mag}}(\mathbf{x})) \\ \text{rot} \left(\frac{1}{\mu_r(\mathbf{x})} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right) &:= \text{rot} \left(\mathbf{B}(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{M}(\mathbf{x})}{\mu_0} \right) = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

kde $\mu_r(\mathbf{x}) := \{1 - |\mathbf{M}(\mathbf{x})| / (\mu_0 |\mathbf{B}(\mathbf{x})|)\}^{-1} \geq 1$ je relativní permeabilita, předpokládáme-li lineární závislost $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. Zavedme $\mathbf{H}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\mu_0 \mu_r(\mathbf{x})} \mathbf{B}(\mathbf{x})$ magnetickou

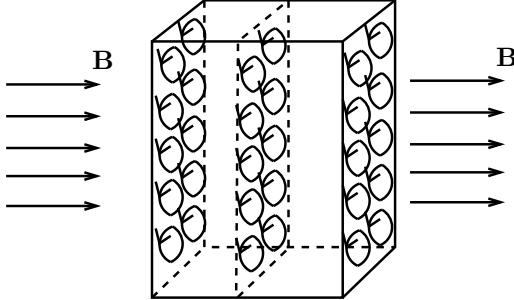


Figure 16: Vnitřní struktura feromagnetika

intenzitu, pak diferenciální, resp. integrální tvar Ampérova zákona ve feromagnetiku je

$$\text{rot}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = \mathbf{j}(\mathbf{x}), \oint_{\partial\Sigma} \mathbf{H}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}). \quad (28)$$

Poznamenejme, že z hlediska teorie relativity je Lorentzova síla a magnetické pole pouze důsledkem Coulombovy síly a elektrického pole pohybujících se nábojů.

Jelikož je magnetické pole solenoidální, viz (25), můžeme jej vyjádřit pomocí magnetického vektorového potenciálu $\mathbf{u}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})). \quad (29)$$

Vektorový potenciál popisující pole $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ je bohužel nejednoznačný, neboť $\text{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) + \nabla\varphi(\mathbf{x}) = \text{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$. Jednoznačnost můžeme vynutit např. Coulombovou kalkulační podmínkou

$$\text{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0 \quad (30)$$

a podmínkou

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ pro } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Rovnice (24), (25), (28) vyžadují diferencovatelné, resp. spojité funkce $\mu_r(\mathbf{x})$ a $\mathbf{B}(\mathbf{x})$. V případě rozhraní dvou různých materiálů, viz Obr. 17, dostáváme z integrálních tvarů rovnic (24) a (28) pro $|\Sigma| \rightarrow 0$ podmínky na rozhraní

$$(\mathbf{B}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = 0, \quad (32)$$

$$(\mathbf{H}_1(\mathbf{x}) - \mathbf{H}_2(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_\Gamma(\mathbf{x}), \quad (33)$$

kde \mathbf{j}_Γ je případný povrchová hustota proudu na rozhraní.

3.2 Modelová úloha

Modelová úloha pro magnetostatiku je načrtnuta na Obr. 18. Budeme uvažovat dva materiály: vzduch (vakuum), v němž je vloženo v oblasti Ω_r feromagnetické

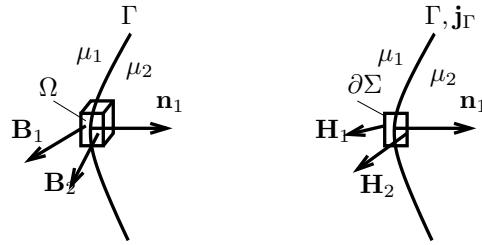


Figure 17: Podmínky přechodu na rozhraní dvou feromagnetik

Figure 18: Modelová úloha magnetostatiky

jádro cívky o relativní permeabilitě $\mu_r > 1$. Oblastí zde rozumíme omezenou a otevřenou podmnožinu R^3 . Dále mějme ve vzduchu oblast Ω_j která reprezentuje závity cívky tak, že v ní je po částech konstantní hustota elektrického proudu j . Pole magnetického vektorového potenciálu pak popisuje následující systém

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x}))) & = & \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Omega_k, k \in \{0, r\}, \\ \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{u}_j(\mathbf{x}))) & = & \mathbf{j}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \Omega_j, \\ \text{div}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x})) & = & \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \Omega_k, k \in \{0, j, r\}, \\ (\mathbf{u}_k(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_l(\mathbf{x})) \times \mathbf{n}_k & = & \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_l, k, l \in \{0, j, r\} : k \neq l, \\ (\text{rot}(\mathbf{u}_k(\mathbf{x})) - \frac{1}{\mu_r} \text{rot}(\mathbf{u}_r(\mathbf{x}))) \times \mathbf{n}_r & = & \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_r, k \in \{0, j\}, \\ (\text{rot}(\mathbf{u}_0(\mathbf{x})) - \text{rot}(\mathbf{u}_j(\mathbf{x}))) \times \mathbf{n}_j & = & \mathbf{0} & \mathbf{x} \in \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_j, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) & \rightarrow & \mathbf{0} & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (34)$$

kde první dva řádky plynou z (28) a (29), třetí z (30), čtvrtý souvisí s (32), pátý a šestý s (33) a poslední je vlastnost (31), přičemž \mathbf{n}_k značí jednotkovou vnější normálu k Ω_k a $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ je definována, viz Obr. ??, následovně:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) := \begin{cases} (0, j, 0), & \mathbf{x} \in \Omega_j^{\text{left}}, \\ (0, 0, -j), & \mathbf{x} \in \Omega_j^{\text{top}}, \\ (0, -j, 0), & \mathbf{x} \in \Omega_j^{\text{right}}, \\ (0, 0, j), & \mathbf{x} \in \Omega_j^{\text{bottom}}. \end{cases}$$

Hledané potenciály \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_j a \mathbf{u}_r jsou dvakrát spojitě diferencovatelné vektorové funkce na $\Omega_0 := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_r \cup \Omega_j}$, resp. Ω_j a Ω_r , které navíc mají spojité derivace až do hranice, což značíme $\mathbf{u}_k \in \mathbf{C}^2(\Omega_k) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega_k})$ pro $k \in \{0, j, r\}$. Poznamenejme, že pro dvakrát spojitě diferencovatelnou funkci \mathbf{u} takovou, že $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$ platí, že $\text{rot}(\text{rot}(\mathbf{u})) = -\Delta \mathbf{u}$, což je Laplaceův operátor aplikovaný po složkách.

V případě, že rozměry elektrod a dielektrika ve směru x_3 jsou dostatečné, lze úlohu (10) redukovat do \mathbb{R}^2 , a to tak, že budeme uvažovat typický řez $x_3 := 0$ a předpokládat, že závislost veličin na souřadnici x_3 lze zanedbat. Formulace

úlohy pak zůstává formálně shodná s (10) s rozdílem, že dimenze je $d := 2$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a oblasti Ω_r , Ω_+ a Ω_- jsou znázorněny na Obr. 6 (vpravo).

3.3 Variační formulace

3.4 Hranová metoda konečných prvků

3.5 Hraniční integrální formulace vnější úlohy

3.6 Párování metody konečných a hraničních prvků

4 Elektromagnetické záření

4.1 Fyzikální podstata

4.2 Modelová úloha

4.3 Metoda konečných prvků s absorpční vrstvou

4.4 Hraniční integrální formulace

4.5 Metoda hraničních prvků