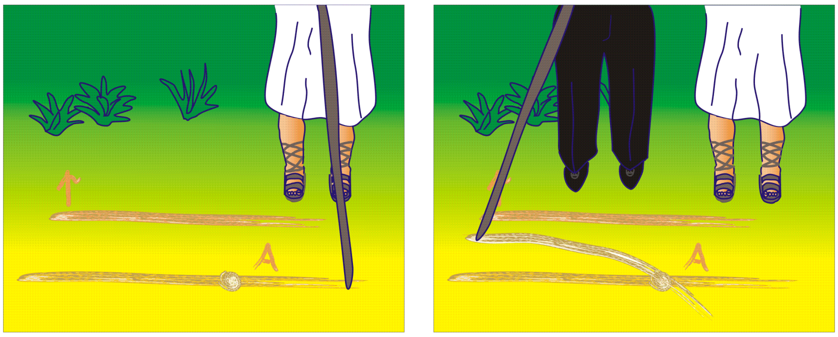
0.1.3 Základy matematiky, aneb axiomatická výstavba matematiky

Nebojte, jen letmo a převážně nevážně.[1] Pro počáteční vážněji pojaté studium této problematiky doporučuji skripta doc. Buriana [1].

Představte si, že jste zakladateli vědecké disciplíny *matematika*. Není tedy známo ještě vůbec nic. Jste však všemi mastmi mazaní vědátoři s ambiciózním plánem stvořit nejexaktnější a nejčistší vědu (v tom smyslu, že naprosto přesně formulujete pojmy, problémy i jejich řešení, které musí být provedeno na základě nezpochybnitelných důkazů) ze všech exaktních a čistých věd!

A první, co vás napadne, je načmárat klackem do písku čáru a vedle ní puntík. I zrodil se první problém vaší skvělé vědy! Řeknete si, no tak takovéhle rovné čáře budu říkat *přímka* a takovému puntíku *bod*. A otázka zní, kolik přímek můžu vést bodem (puntíkem v písku) tak, aby neprotínala zadanou přímku (tu co jsem před chvílí načmáral do písku)?

Kolemjdoucí Eukleides vám hned začne šeptat do ucha: „Ale pane kolego, to je přece triviální, jen jednu. Takhle, rovnoběžně s tou zadanou!“



Obr. 1 Eukleides versus Lobačevskij

V tom klepe milému Euklidovi na rameno pan Lobačevskij a shovívavě říká: „Ehm, pane kolego, zdá se, že tak trochu neuváženě plácáte!“ Chytne klacek a do písku přičmárne ještě jednu čáru, která prochází daným bodem a zadanou přímku neprotíná (viz obrázek 1)! Eukleides se zamračí a pohoršeně zahučí: „Dělat si blázny z člověka, kterému je o pár set let víc než vám! Chováte se jako dětina, pane Lobačevskij! Vždyť ta vaše přímka je nějaká křivá, to není žádná přímka!“

„No no, nic ve zlém, ale nějak si nevzpomínám, že by se řeklo, co to vlastně přímka je! Tak proč by nemohla být trošičku křivá?“

A v tuto chvíli se všichni přítomní hluboce zastydí. Takové plány jsme měli, jak tu matematiku budeme poctivě a nanejvýš přesně budovat a formulovat a hned

[1] Události popisované v této kapitole jsou smyšlené a podobnost s historickými událostmi a osobami je čistě záměrná.

na začátku jsme toto předsevzetí porušili! Vždyť nemáme definici přímky, ani bodu! Taková ostuda! No nic, hned to napravíme. Takže, ehmmm, řekněme, že *přímka je to, co má jen délku a ne šířku, nemá to konec a ani začátek* a *bod je to, co nemá žádný rozměr.* Spokojen, pane Lobačevskij?

„Éee, no ani ne.“

„Cože?! Co zas?!“

„Já jen, že nemáme definici pojmů jako *rozměr, délka, šířka, konec, začátek, to, ...*, takže tyto definice přímky a bodu tak nějak nic neříkají. A kdybychom se pokusili definovat rozměr, délku, šířku, konec, začátek a to, byli bychom nuceni v definicích použít slova, které zase nemáme definované! Takže tudy asi cesta nevede.“

Frustrace, zmar a beznaděj. Tak to můžeme celé zabalit, přesné vymezení daného pojmu pomocí definice není z principu možné! Končíme, matematika nebude, prostě to nejde.

„Snad to přece jen nebude tak zlé,“ prohodí opět shovívavě, ale už i trochu namyšleně Lobačevskij. „Co kdybychom to provedli takhle. Vybereme si pár, ne mnoho, pojmů, říkejme jim *základní pojmy*, které prostě definovat nebudeme, například *množina, bod, přímka ...* a každý ať si pod nimi představí co chce ...“

„Hrůza, anarchie, fůůj!!!“

„Pánové, nepřerušovat prosím! Takže, každý si pod nimi může představit co chce, ale tyto intuitivní představy je žádoucí zhmotnit ve výrocích, nazveme je *axiomy*, které popisují vztahy mezi těmito základními pojmy. Tím vlastně svým způsobem charakterizujeme, co si pod základními pojmy představujeme.“

„Eee???“

„No tak vezměte si třeba náš úvodní problém. Chceme studovat vlastnosti bodů, přímek a jejich vzájemnou polohu v rovině. Zde přítomný vážený kolega Eukleides si pod pojmem bod představil jakýsi mikroskopický puntík a pod přímkou jakousi absolutně rovnou nekonečně tenoučkou nitku, která přichází z nekonečných hlubin vesmíru a zase do nich odsviští. Tuto představu můžeme popsat několika axiomy, například:

A_1: Pro každé dva různé body A, B existuje jediná přímka p tak, že $A, B \in p$. (Tj. Každými dvěma různými body A a B můžeme vést právě jednu přímku.)

A_2: Pro každou přímku existují dva různé body, které na ní leží.

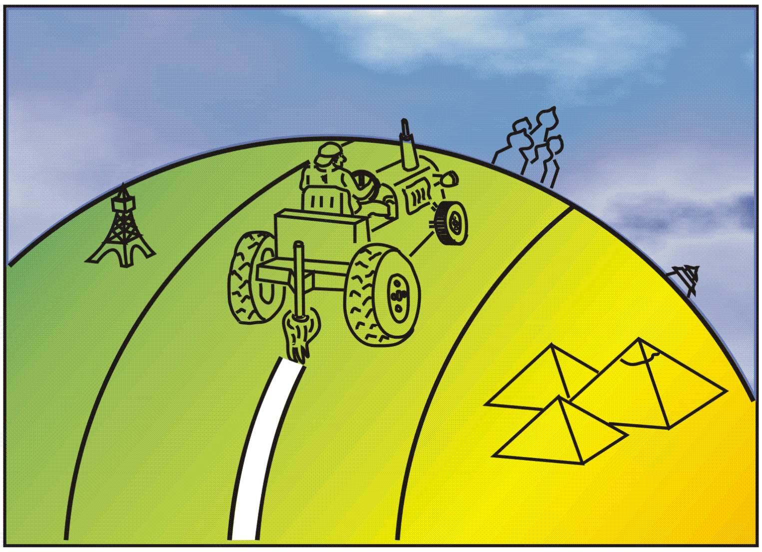
$\vdots$

A_n: Pro každé tři navzájem různé body A, B, C existuje jediná rovina ρ tak, že $A, B, C \in \rho$.

E: Pro každou přímku p a bod A, který na ní neleží, existuje jediná přímka r taková, že bod A leží na r a zároveň se přímky r a p neprotínají[1]. "

Tato představa přímek a bodů (zažilo se pro ni označení *eukleidovská geometrie* [2]) není nijak špatná, naopak, a proto je často využívaná ve fyzice (nerelativistické), v technice a jinde.

Ale nyní si představme svět přímek a bodů, jak jej vidí člověk, který maluje středové čáry na vozovku. Říkejme mu Jarda (viz obr. 2). Ten má každodenní představu trošku jinou, omezenější (bez urážky) – nezajímají jej vesmírné dálky (alespoň v pracovní době ne), přímka se musí pěkně držet země. Představí si ji jako rovnou čáru, kterou namaluje štětkou drženou kolmo k zemi od vidím do nevidím. Pokud přimhouříme oči, můžeme říci, že Země je kulatá, a tak Jardovy přímky nejsou nic jiného, než kružnice se středem ve středu Země a poloměrem rovným poloměru Země – říkejme jim *hlavní kružnice*. Tato představa není o nic horší, než ta Eukleidova. Pro Jardu je dokonce mnohem výhodnější. Popisuje totiž jeho problémy mnohem lépe, než Eukleidovská geometrie. Neříkáme jí však Jardova geometrie, ale je to jeden z modelů tzv. *eliptické geometrie*.



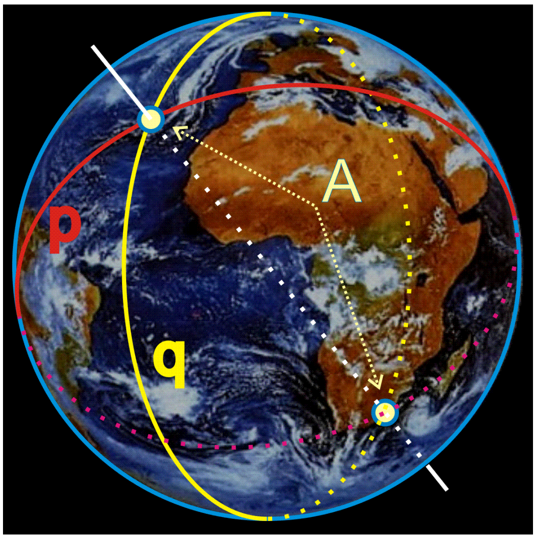
Obr. 2 Jarda v práci

Bodem v tomto modelu rozumíme dvojici bodů na povrchu koule, puntík namalovaný na zemi a puntík na opačné straně zeměkoule tvoří jediný bod. (To

[1] Říkáme, že přímky r a p se protínají právě když existuje bod A takový, že $A \in r$ a $A \in p$. Bod A pak nazveme průsečíkem přímek r a p.

[2] První korektní a ucelenou soustavu axiomů eukleidovské geometrie sestavil matematik David Hilbert ($\star$1862, †1943) ve své knize *Grundlagen der Geometrie*. Z ní jsme si také uvedené axiomy „vypůjčili." Hilbertova axiomatická soustava eukleidovské geometrie obsahuje 20 axiomů. Nedefinovanými pojmy jsou *bod*, *přímka* a *rovina*. Základními relacemi je *incidence* (leží na, $\in$), *uspořádání* (bod A leží mezi body B a C, $\mu(B, A, C)$) a *shodnost* (je shodný, $\cong$).

mimo jiné znamená, že dvě různé přímky modelu se protínají v jediném bodě modelu – dvojici „puntíků" na opačných stranách zeměkoule. Viz obrázek 3.)



Obr. 3 V Jardově modelu eliptické geometrie tvoří puntík namalovaný na zemi a puntík na opačné straně Zeměkoule společně jediný bod A. Takže přímky p a q se protínají v jediném bodu.

A v čem se tyto dvě geometrie liší? Pokud bychom tady měli seznam všech axiomů Eukleidovy geometrie (dejme tomu, že soustavu axiomů Eukleidovské geometrie tvoří axiomy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a E, my jsme uvedli pouze A_1, A_2, A_n a E), mohli bychom ověřit, že všechny, až na jediný, platí i v Jardově modelu eliptické geometrie. Jedinou výjimkou je axiom E. Jak to?

Představte si to třeba na glóbu – modelu zeměkoule. Zadanou přímkou p nechť je třeba Greenwichský (nultý) poledník (vzpomeňte si, Jardovou představou přímky je čára namalovaná kolem Země, takže jde o kružnici na jejím povrchu a se středem v jejím středu) a zadaný bod A je dvojice bodů na povrchu Země, z nichž jeden leží v Ostravě (ten druhý je na opačné straně zeměkoule). Dokážete najít nějakou hlavní kružnici zeměkoule, která prochází touto dvojicí bodů a přitom neprotíná nultý poledník?

Hledáte …? Nu hledejte, ale ne moc dlouho, je to zbytečné, žádná taková není. V eliptické geometrii platí axiomy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a axiom E^*: „Pro každé dvě různé přímky p a q existuje bod A tak, že $A \in p$ a $A \in q$ (říkáme, že přímky p a q se protínají v bodě A)."

Obdobně můžeme vytvořit takzvanou *hyperbolickou geometrii*. Ta je určena axiomy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a axiomem H: „Pro každou přímku p a bod A, který na ní neleží, existuje více než jedna přímka p^* taková, že bod A na ní leží a navíc p^* neprotíná přímku p (tj. p a p^* nemají žádný společný bod)."

Shrňme si tedy, jak je matematika jako věda budována. V matematice pracujeme s některými pojmy jako je bod, přímka, množina a podobně. Přesné vymezení těchto pojmů neexistuje, nejsou definovány. Můžeme si pod nimi představit v podstatě cokoli a proto se jim říká *základní*, nebo také *primitivní pojmy.* V začátcích matematiky jako vědy existovaly snahy vytvořit jejich definice, nicméně v nich se nutně vyskytují další pojmy, které by bylo třeba definovat a v těchto definicích by figurovaly další pojmy, a tak bychom museli pokračovat do nekonečna, což evidentně nemá smysl.

Ač o samotných nedefinovaných pojmech neříkáme nic (a vlastně právě díky tomu) můžeme si dovolit určovat požadavky na vztahy (*relace*) mezi nimi.

Vlastnosti těchto vztahů určujeme v takzvaných *axiomech* teorie. Příkladem může být teorie euklidovské roviny. Nedefinovanými pojmy jsou zde přímka a bod. Přímka a bod mohou být ve vzájemném vztahu (relaci) „leží na“. Vlastnosti této relace jsou popsány v *soustavě axiomů* (což je množina všech axiomů dané teorie). Například jeden z axiomů říká, že pro každé dva body A, B roviny existuje jediná přímka p roviny taková, že bod A leží na p a zároveň bod B leží na p. Pomocí dané matematické logiky potom na základě axiomů formulujeme matematické věty (např. z axiomů A_1 a A_2 plyne, že platí ...).

Na základě základních pojmů můžeme pomocí *definic* tvořit další pojmy (např. kolmice na přímku p v bodě A je přímka q, pro kterou platí ...).

Na soustavu axiomů matematické teorie klademe ovšem také jisté požadavky. Zřejmě by nemělo smysl, aby jeden axiom říkal : „je to bílé“ a druhý : „je to černé.“ Proto je naprosto přirozený požadavek, aby z dané soustavy axiomů nebylo možné odvodit dvě kontradiktorická tvrzení (tzn. tvrzení, která nemohou platit současně). Této vlastnosti soustavy axiomů se říká *vnitřní bezespornost.*

Pokud by z nějaké $(n-1)$ Û tice axiomů $A_1, \ldots, A_{n-1}$ plynulo tvrzení zbývajícího n-tého axiomu A_n (v tom případě říkáme, že axiom A_n je *logicky závislý* na $A_1, \ldots, A_{n-1}$), pak by jeho přítomnost v soustavě axiomů byla evidentně zbytečná. Proto od soustavy axiomů požadujeme *vzájemnou logickou nezávislost* jednotlivých axiomů. (Závislost soustavy axiomů je však možno tolerovat, pokud se tak děje z didaktických důvodů.) Matematickou teorií potom nazveme množinu všech vět, které byly na základě dané soustavy axiomů a základních pojmů odvozeny.