



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



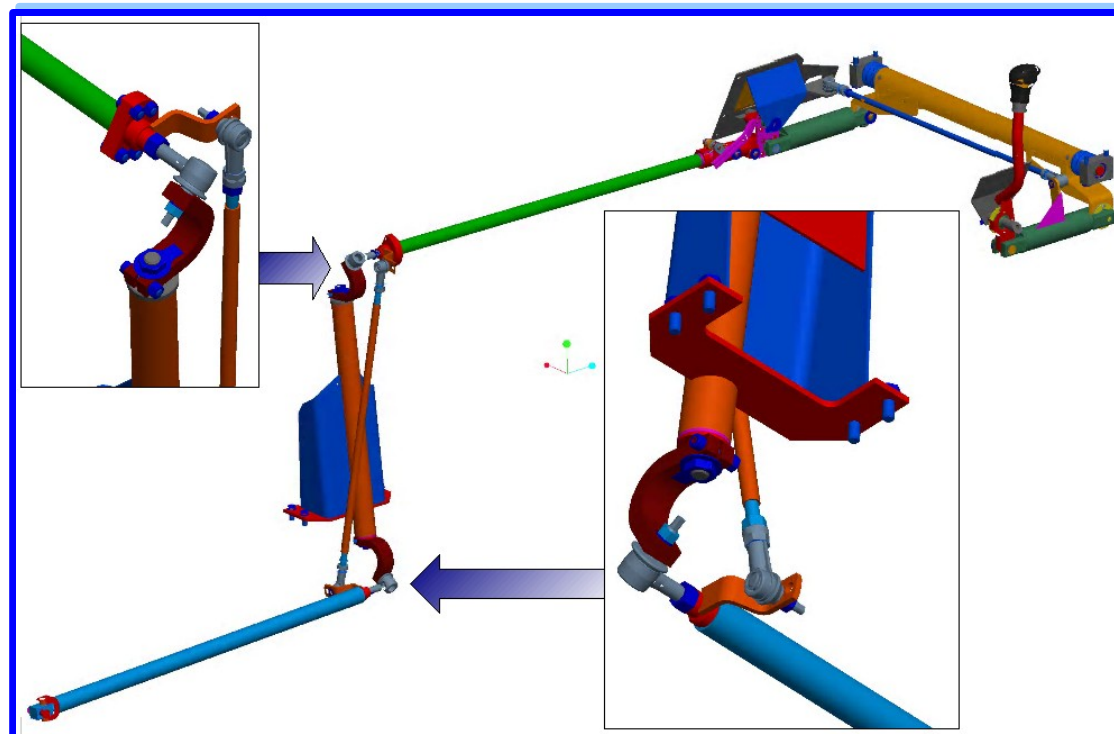
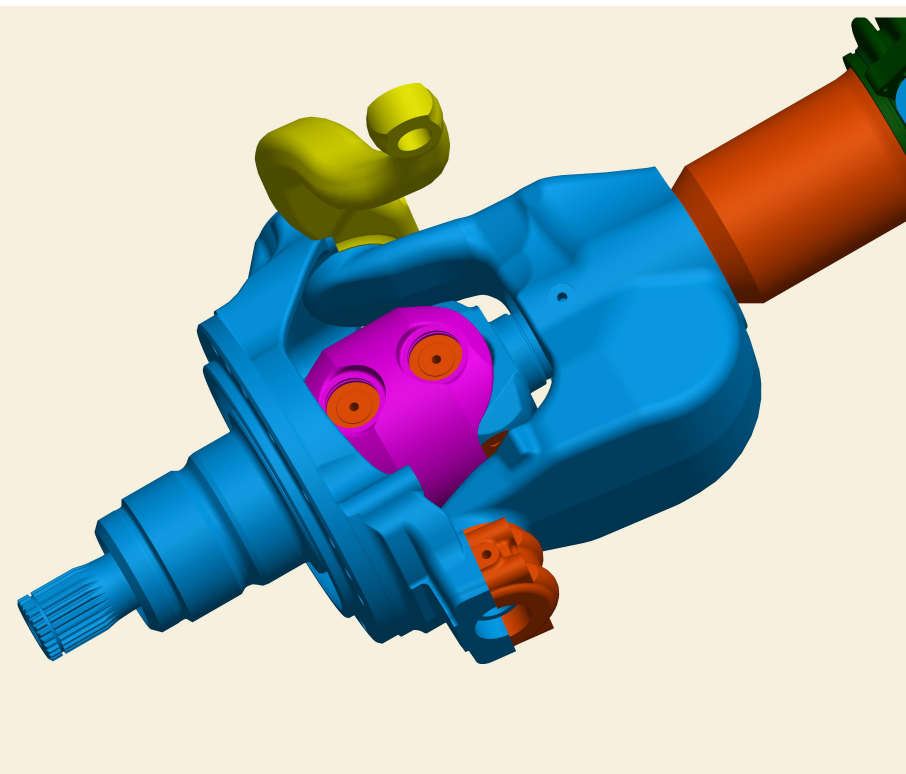
OP Vzdelávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Použití matematického aparátu při řešení prostorových mechanismů

Ondřej FRANTIŠEK

Katedra mechaniky 337, Fakulta strojní,
VŠB-TUO



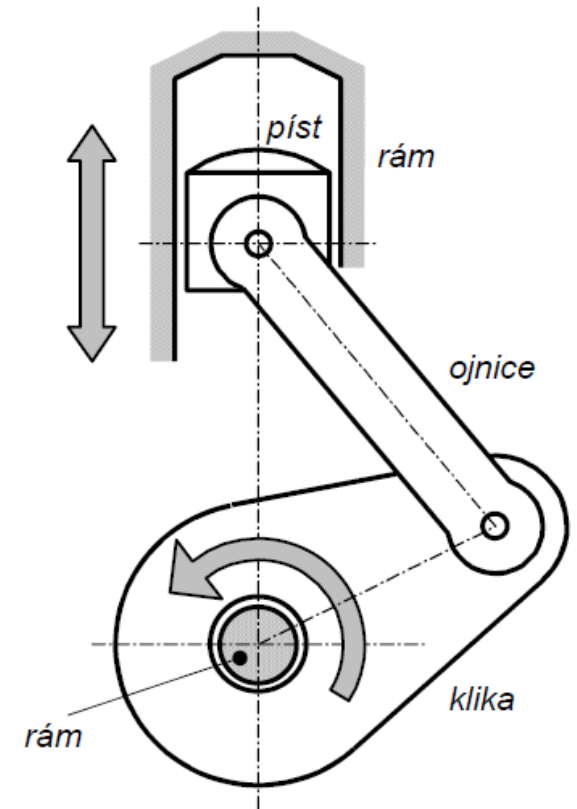
Téma přednášky - Mechanismy

Co je to mechanismus?

- Soustava těles spojených vazban sloužící k transformaci pohybů

Cíle přednášky:

- Přiblížit přístupy k analýze kinematiky, statiky a dynamiky mechanismů
- Popsat postup sestavení matematického modelu mechanismu
- Optimalizovat mechanismus



Dva přístupy k analýze kinematiky, statiky a dynamiky mechanismů

Multibody systémy

- ProEngineer, Ansys atd.
- Lepší vizualizace pohybu mechanismu (kolize hmot)
- Vytvoření simulace vyžaduje méně času, pokud je k dispozici prostorový model

Sestavení vlastního matematického modelu

- Matlab, Scilab, Mathematica
- Problematická vizualizace pohybu mechanismu
- Matematický model je efektivnější a lze jej snadno parametrizovat \Rightarrow implementace optimalizačních algoritmů apod.

Multibody systémy – Mechanismus řazení nákladního automobilu Tatra

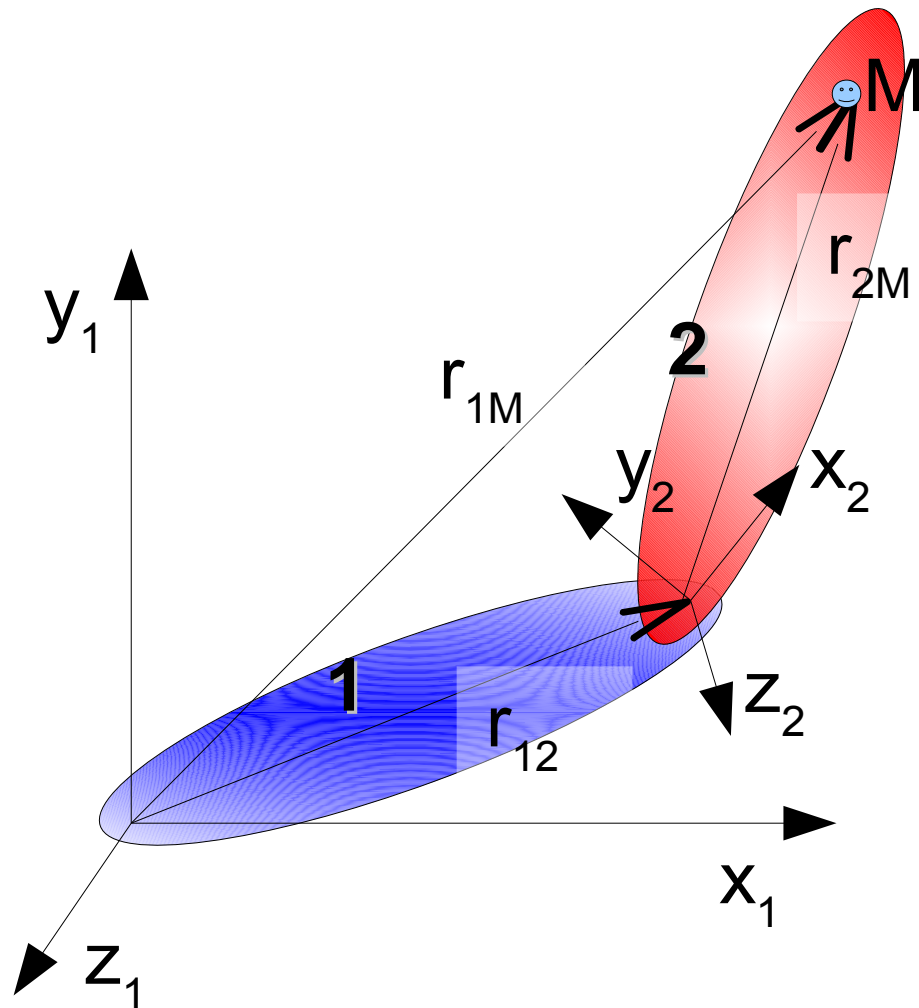
Video pravostranný

Vlastní matematický model – Mechanismus řízení (ovládání náprav) nákladního automobilu Tatra

Video matematicky_model

Maticová transformační rovnice

Hledáme vztah mezi r_{2M} a r_{1M}



x_1, y_1, z_1 – souřadný systém (CS)

tělesa 1

x_2, y_2, z_2 – CS tělesa 2

r_{12} – poloha počátku CS 2 v CS 1
(poloha vazby mezi tělesy)

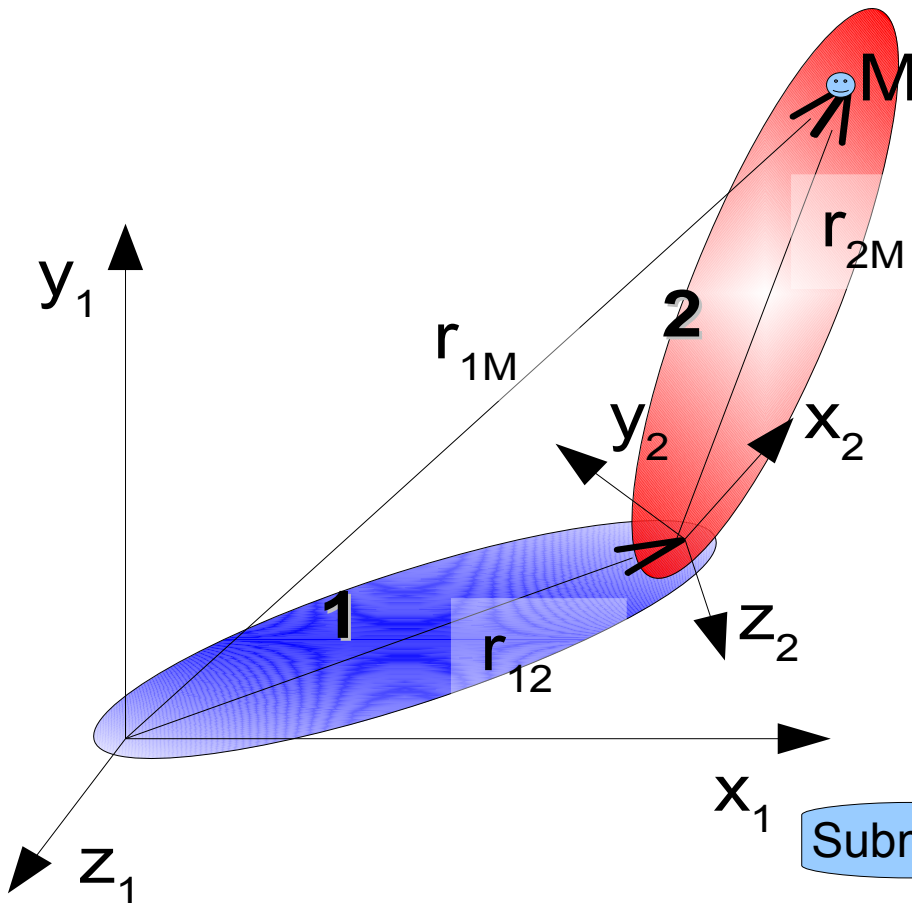
r_{1M} – poloha bodu M v CS 1

r_{2M} – poloha bodu M v CS 2

Maticová transformační rovnice

$$\mathbf{r}_{1M} = \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{r}_{2M}$$

Rozšířený průvodič bodu M v CS 1 a 2: $\mathbf{r}_{1M} = \begin{bmatrix} x_{1M} \\ y_{1M} \\ z_{1M} \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{r}_{2M} = \begin{bmatrix} x_{2M} \\ y_{2M} \\ z_{2M} \\ 1 \end{bmatrix}$



Transformační matice definující vzájemné spojení tělesa 1 a 2:

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{11} & \cos \varphi_{12} & \cos \varphi_{13} & x_{O2} \\ \cos \varphi_{21} & \cos \varphi_{22} & \cos \varphi_{23} & y_{O2} \\ \cos \varphi_{31} & \cos \varphi_{32} & \cos \varphi_{33} & z_{O2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Submatice směrových cosinů

r_{12} poloha počátku CS 2 v CS 1
(poloha vazby mezi tělesy)

Transformační matice základních pohybů - praxe

$$\mathbf{T}_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_y(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_z(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_B \\ 0 & 1 & 0 & y_B \\ 0 & 0 & 1 & z_B \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_x(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\xi) & -\sin(\xi) & 0 \\ 0 & \sin(\xi) & \cos(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_y(\eta) = \begin{bmatrix} \cos(\eta) & 0 & \sin(\eta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\eta) & 0 & \cos(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{R}_z(\zeta) = \begin{bmatrix} \cos(\zeta) & -\sin(\zeta) & 0 & 0 \\ \sin(\zeta) & \cos(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definice transformačních matic základních pohybů v MATLABu

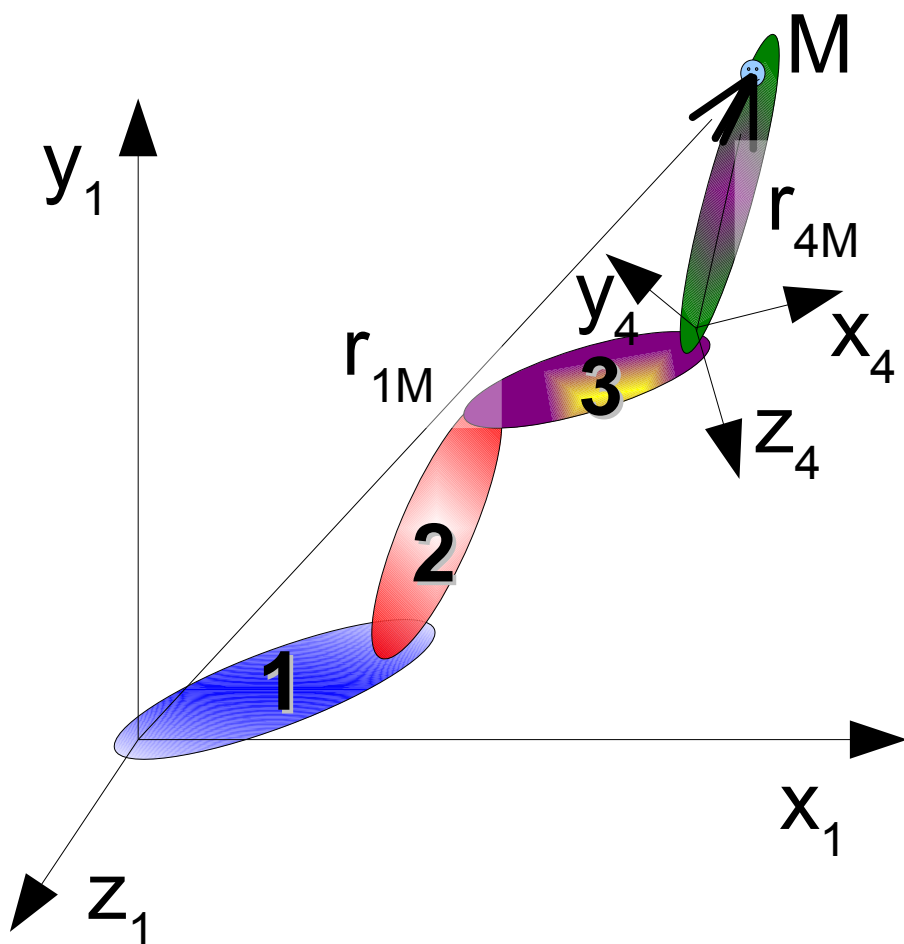
```
function T=Rx (fix)
```

```
%%Vytvoří transformační matici základního  
pohybu, rotace kolem x o úhel fix.
```

```
T= [ 1 0 0 0  
    0 cos (fix) -sin (fix) 0  
    0 sin (fix) cos (fix) 0  
    0 0 0 1];
```

Současné pohyby více těles spojených do řetězce

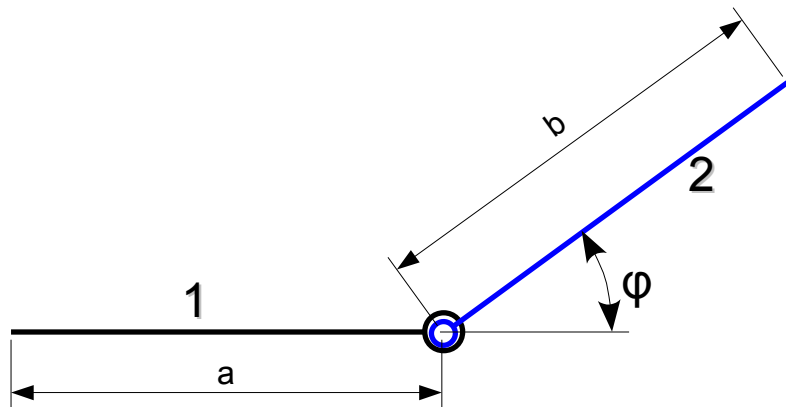
$$\left. \begin{aligned} r_{1M} &= T_{12} \cdot r_{2M}, \\ r_{2M} &= T_{23} \cdot r_{3M}, \\ r_{3M} &= T_{34} \cdot r_{4M}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_{1M} = T_{12} \cdot T_{23} \cdot T_{34} = T_{14} \cdot r_{4,M}$$



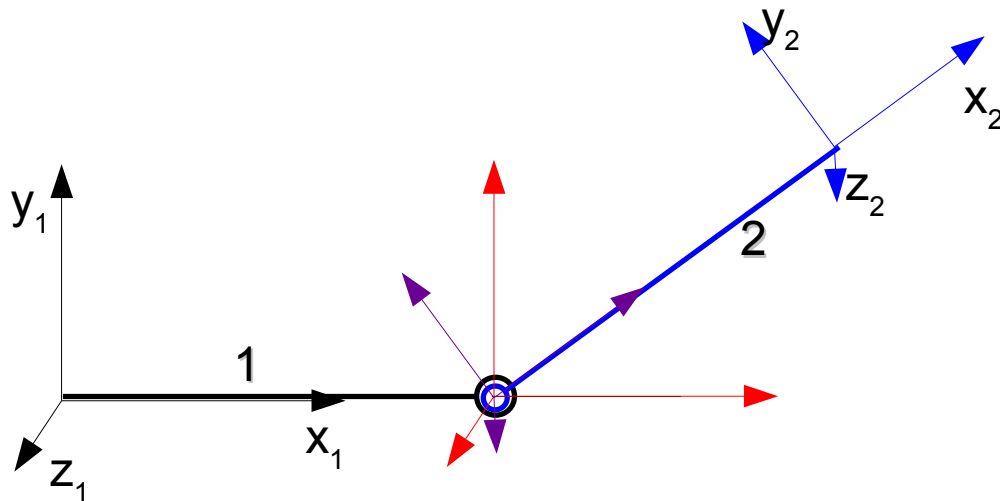
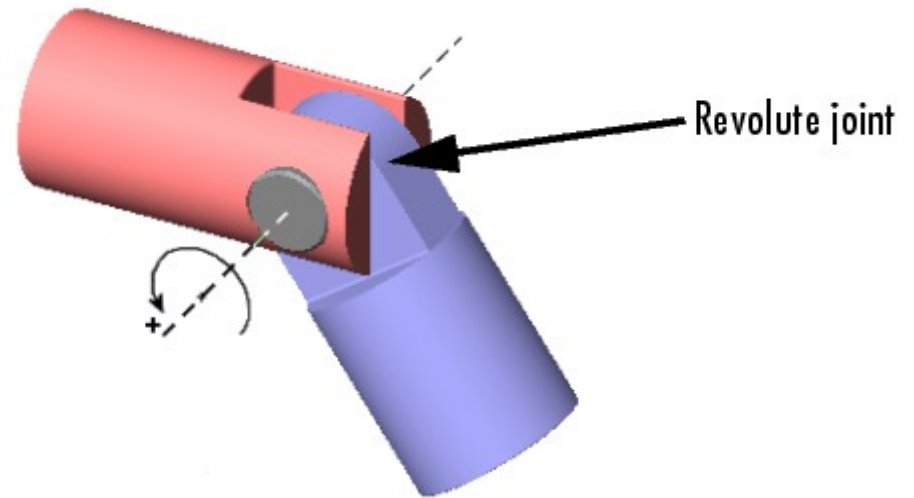
Transformační matice definující vzájemné spojení tělesa 1 a 4:

$$\mathbf{T}_{14} = \mathbf{T}_{12} \cdot \mathbf{T}_{23} \cdot \mathbf{T}_{34}$$

Práce s transformačními maticemi – rotační vazba

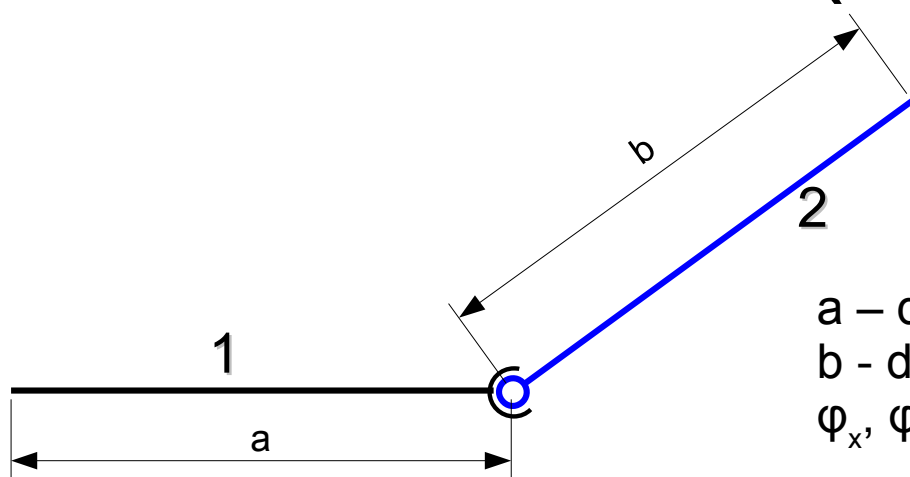


a – délka tělesa 1
b - délka tělesa 2
 φ – úhel pootočení rotační vazby



$$T_{12} = T_x(a) \cdot R_z(\varphi) \cdot T_x(b)$$

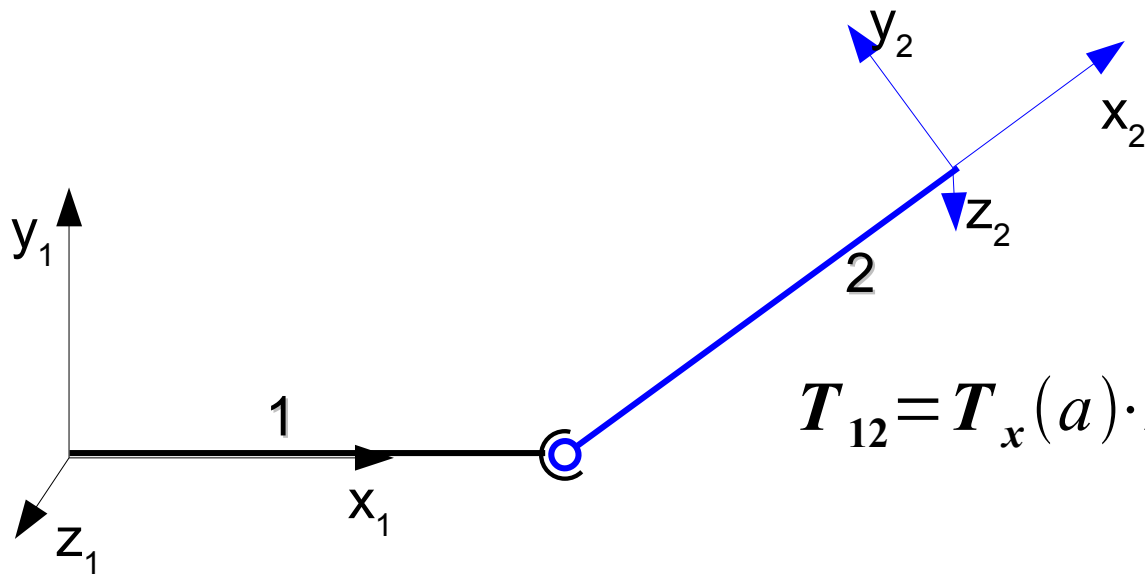
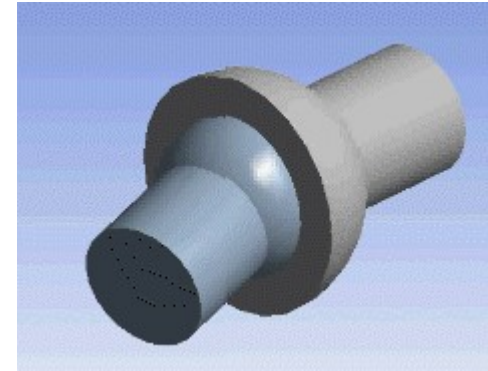
Práce s transformačními maticemi – sférická (kloubová) vazba



a – délka tělesa 1

b - délka tělesa 2

$\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ – úhly natočení kloubové vazby



$$T_{12} = T_x(a) \cdot R_x(\varphi_x) \cdot R_y(\varphi_y) \cdot R_z(\varphi_z) \cdot T_x(b)$$

Stanovení úlohy polohy mechanismů

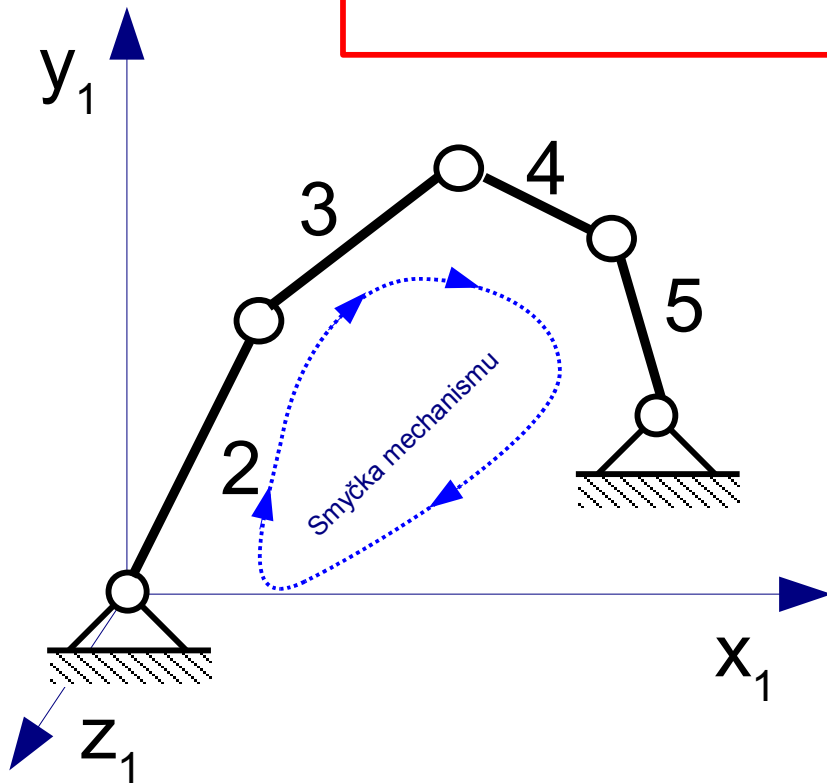
Úloha polohy = stanovení všech souřadnic vazeb (úhlů natočení nebo posunutí)

Maticová rovnice úlohy polohy pro jednu smyčku mechanismu

$$E = T_{12} \cdot T_{23} \cdot T_{34} \cdot T_{45} \cdot T_{51}$$

Jednotková matice

Transformační matice spojení rámu s tělesem 2



○ značka pro libovolnou vazbu

Šrafování označuje pevný prostor (rám), který je označován indexem 1

Stanovení úlohy polohy mechanismů

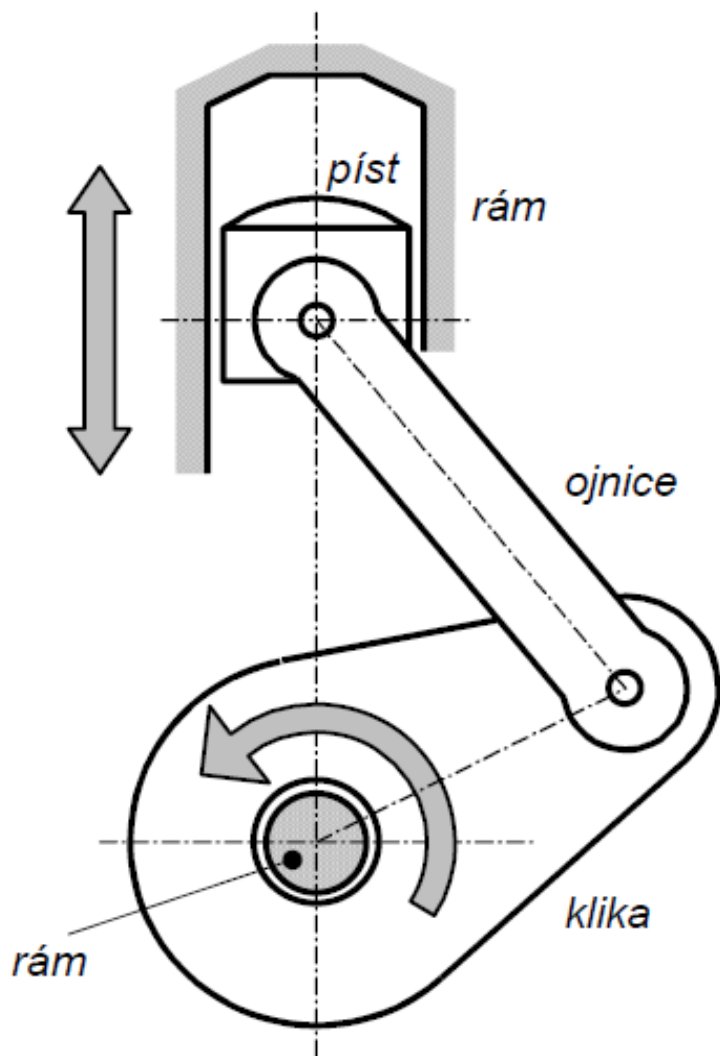
Maticová rovnice úlohy polohy:

$$E = T_{12} \cdot T_{23} \cdot T_{34} \cdot T_{45} \cdot T_{51}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & x & x & x \\ a_{21} & a_{22} & x & x \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

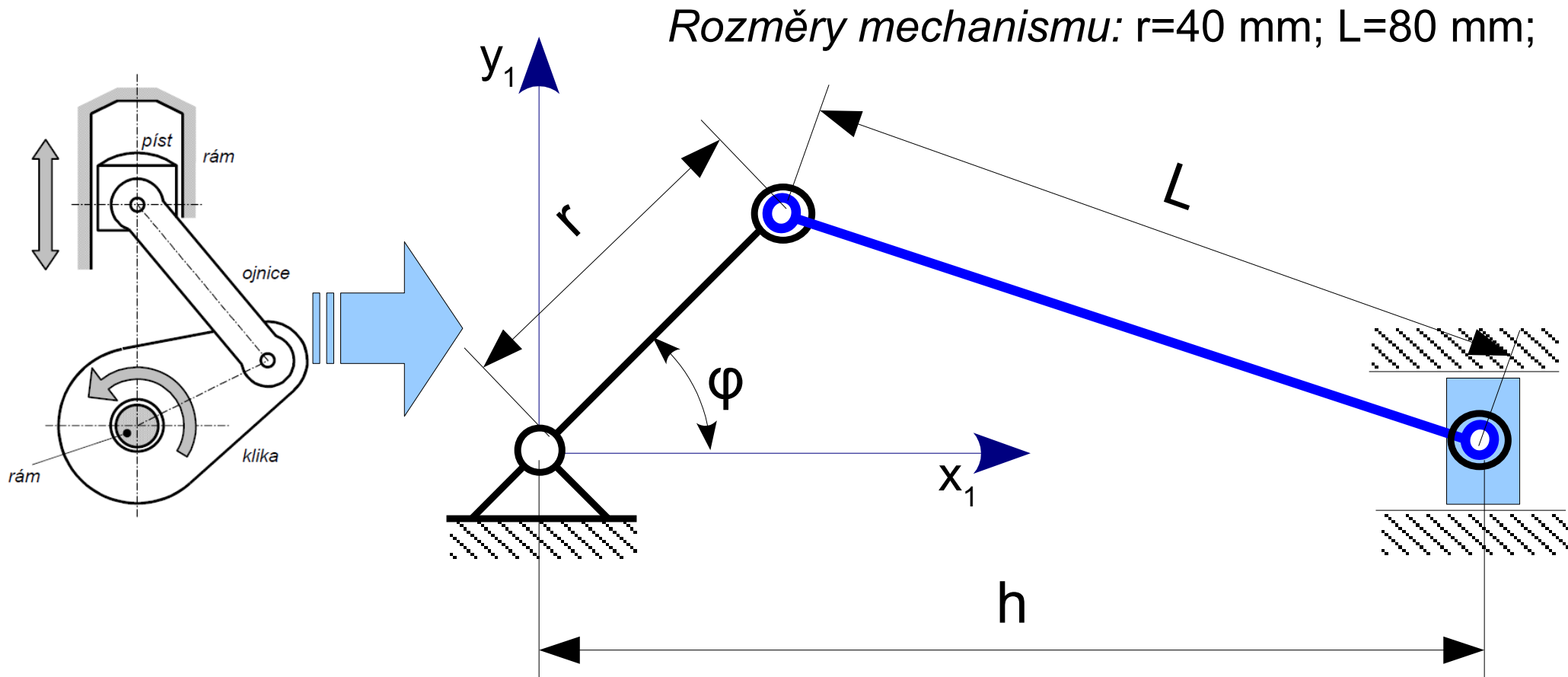
Získáváme soustavu 6 skalárních nelineárních rovnic, kde neznámými jsou souřadnice vazeb => neznámé jsou většinou argumenty goniometrických funkcí sinus a cosinus.

Stanovení úlohy polohy klikového mechanismu



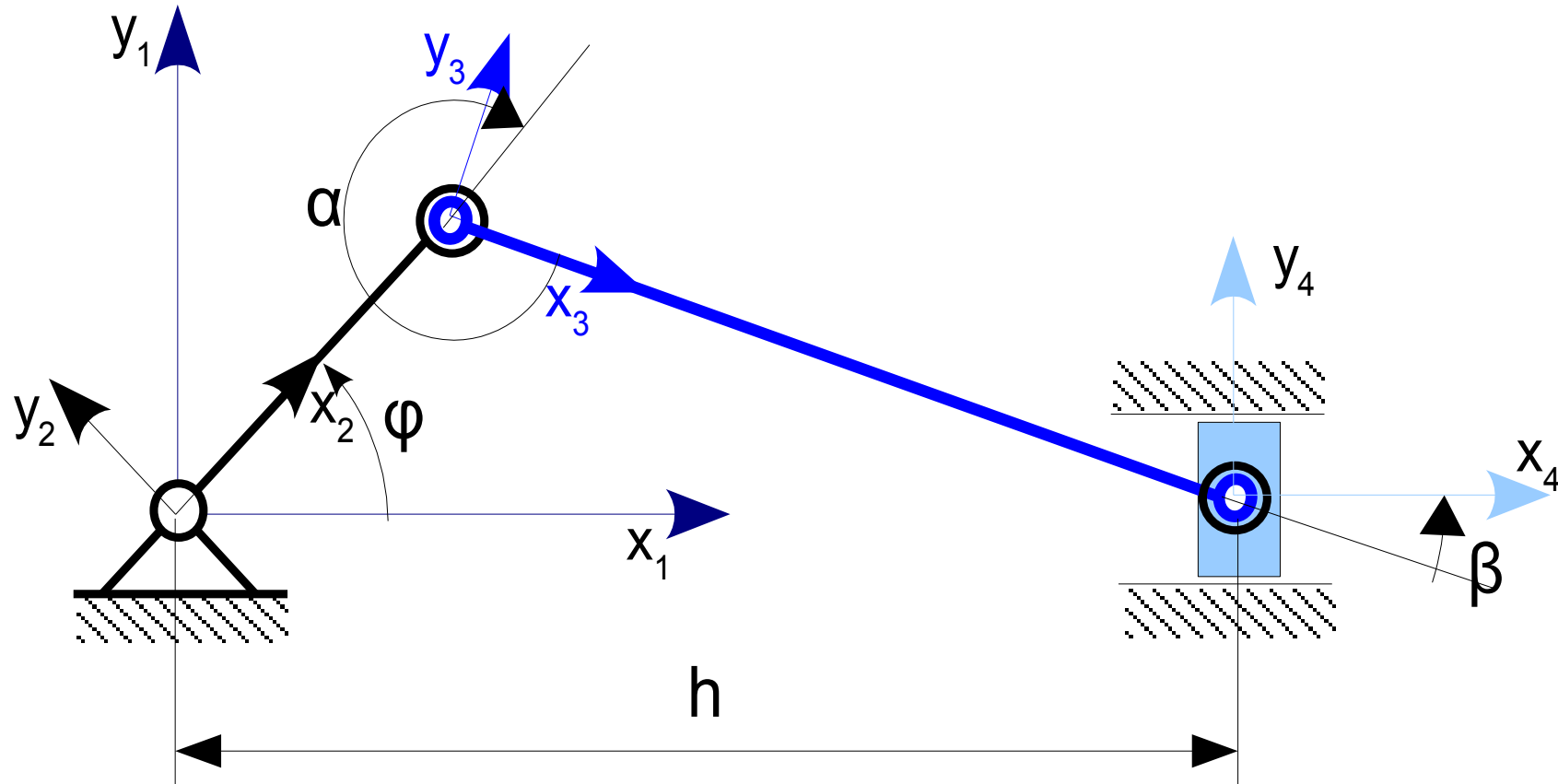
Úloha polohy stanovuje závislost úhlu natočení kliky na posunutí pístu

Úloha polohy klikového mechanismu - kinematické schéma a rozměry



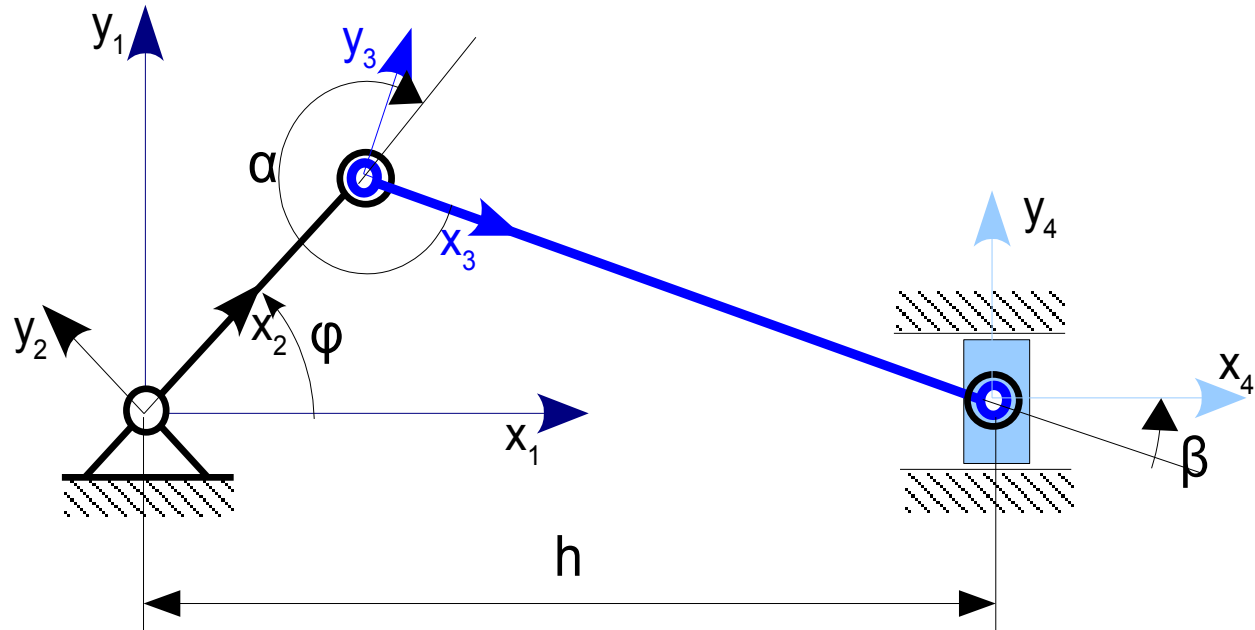
Úloha polohy stanovuje závislost úhlu natočení kliky φ na posunutí pístu h

Úloha polohy klikového mechanismu - zavedení tělesových souřadných systémů a souřadnic vazeb



- 1 - Rám (pevný prostor)
- 2 - Klika
- 3 - Ojnice
- 4 - Píst

Úloha polohy klikového mechanismu - sestavení maticové rovnice



$$T_{12} = R_z(\varphi)$$

$$T_{23} = T_x(r) \cdot R_z(\alpha)$$

$$T_{34} = T_x(L) \cdot R_z(\beta)$$

$$T_{41} = T_x(-h)$$

$$E = T_{12} \cdot T_{23} \cdot T_{34} \cdot T_{41}$$

Úloha polohy klikového mechanismu - realizace v prostředí MATLAB

Pro jednu hodnotu natočení kliky $\varphi = 0.5$ rad

```
function rezidua=maticova_rce(nez)
    r=40;L=80;global phi
    T12=Rz(phi);
    T23=Tx(r)*Rz(nez(1));
    T34=Tx(L)*Rz(nez(2));
    T41=Tx(-nez(3));
    A=T12*T23*T34*T41-eye(3);
    rezidua=[A(1,2); A(1,3); A(2,3)];
```

Definice soustavy nelineárních rovnic popisujících pohyb mechanismu

```
global phi
phi=0.5;
poc_poloha=[0.1 0.1 40];
sour_vazeb=fsolve(@maticova_rce,poc_poloha);
```

Výpočet soustavy nelineárních rovnic pomocí funkce *fsolve*

```
sour_vazeb =
    2.8837    -0.2421    42.5642
```

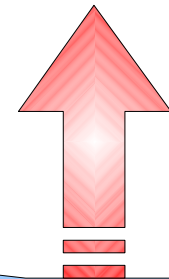
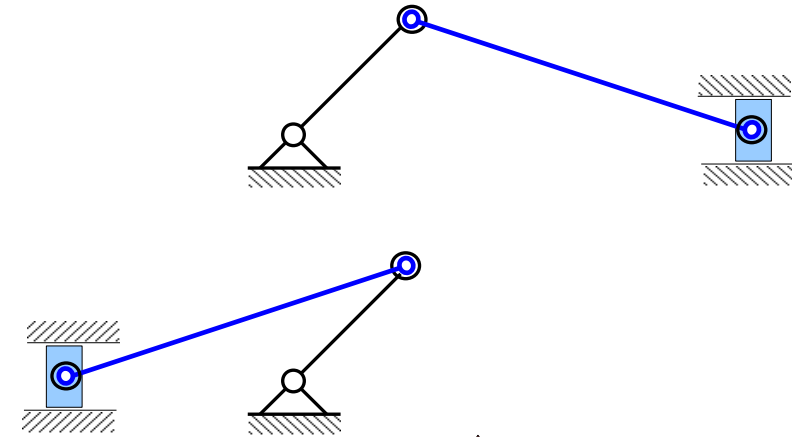
Výsledné souřadnice vazeb

Úloha polohy klikového mechanismu - realizace v prostředí MATLAB

Pro celý cyklus mechanismu $\varphi \in (0, 360^\circ)$

```
global phi
sour_vazeb=[];
poc_poloha=[0 0 20];

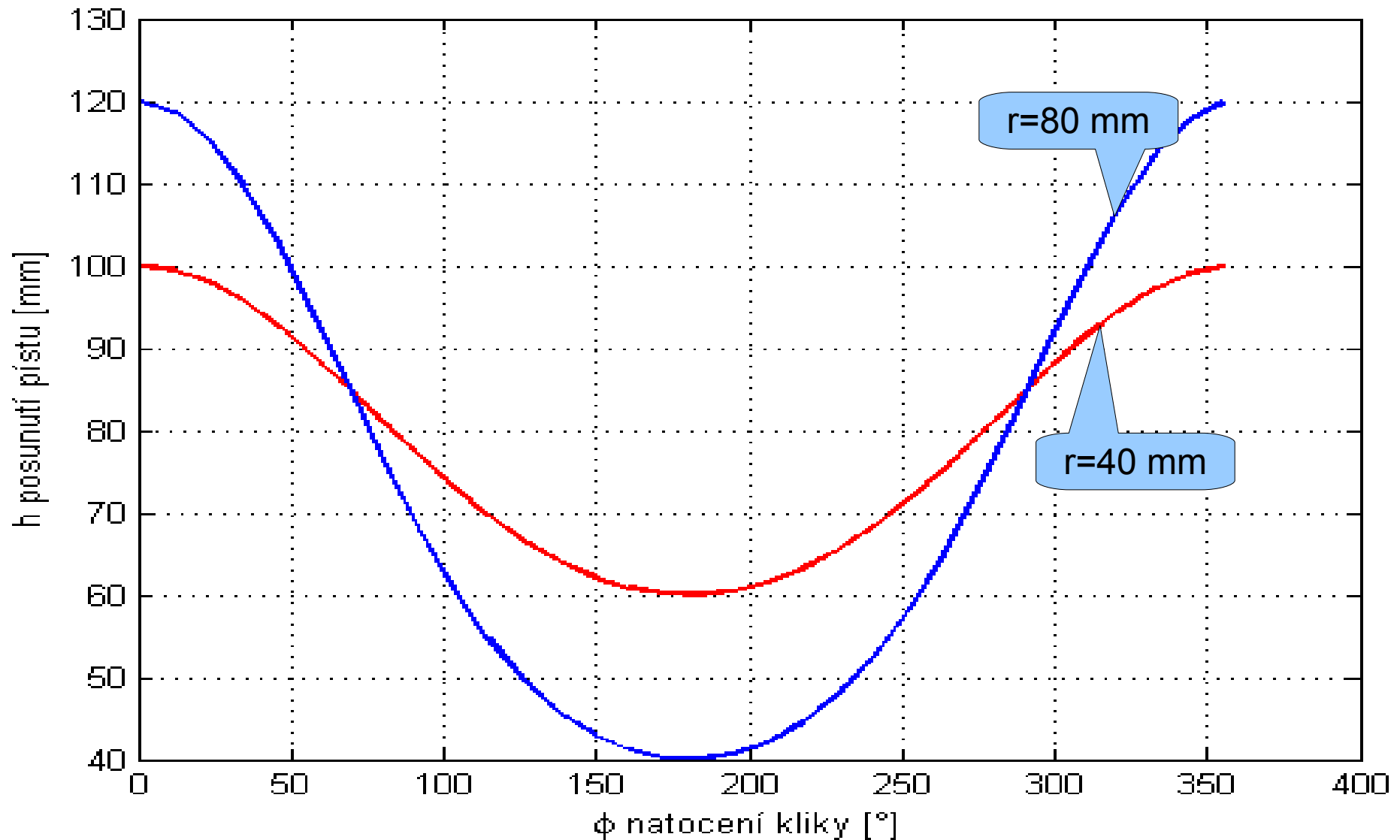
for phi = 0:0.2:2*pi;
sour_vazeb=[sour_vazeb;
fsolve(@maticova_rce,poc_poloha)];
poc_poloha=sour_vazeb(end,:);
end
```



Oldhad řešení je roven předchozímu výsledku!!!

```
plot([0:0.2:2*pi]*180/pi,sour_vazeb(:,3));
hold on;grid on
xlabel('\phi natočení kliky [°]')
ylabel('h posunutí pístu [mm]')
```

Úloha polohy klikového mechanismu - realizace v prostředí MATLAB



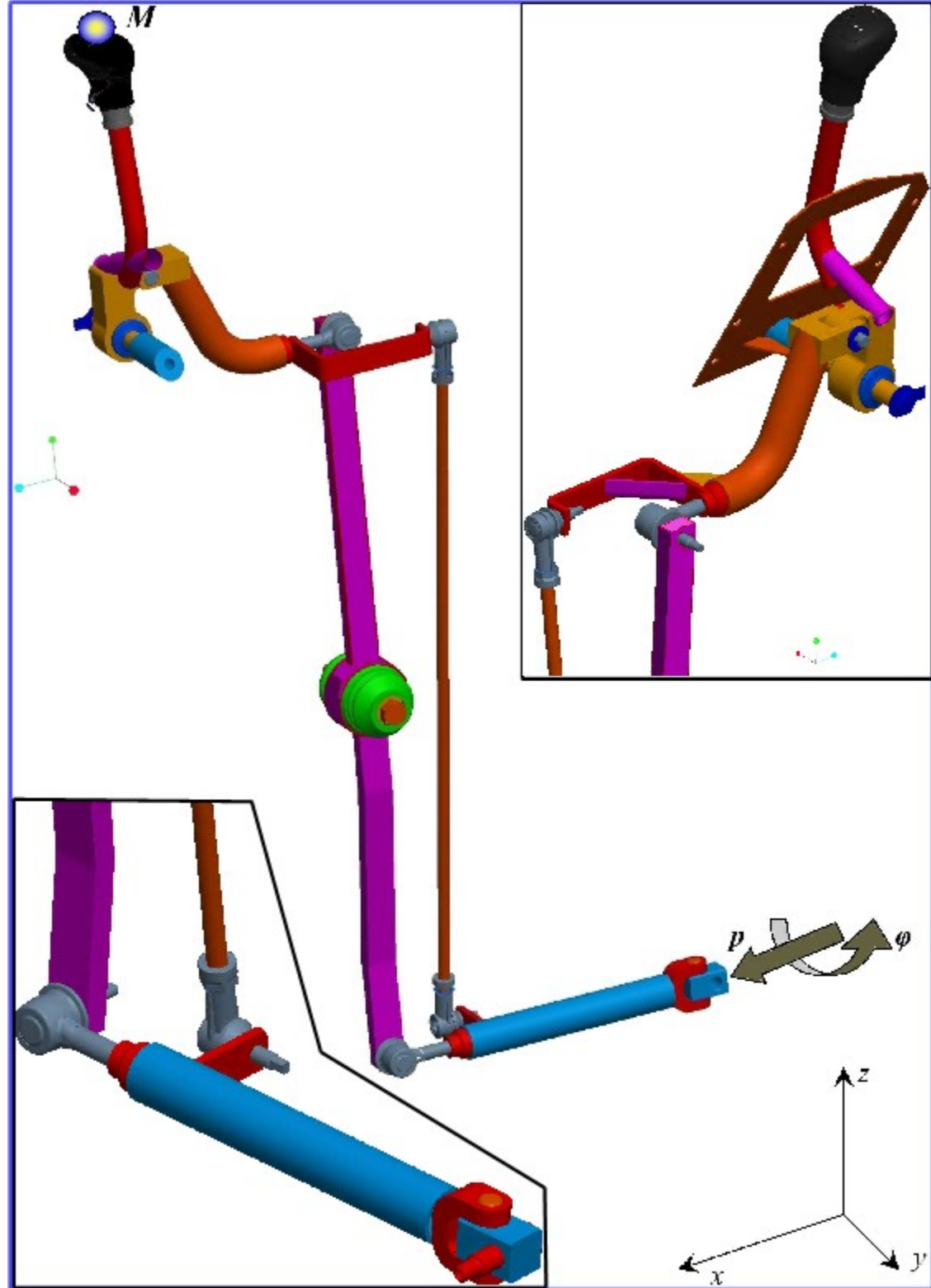
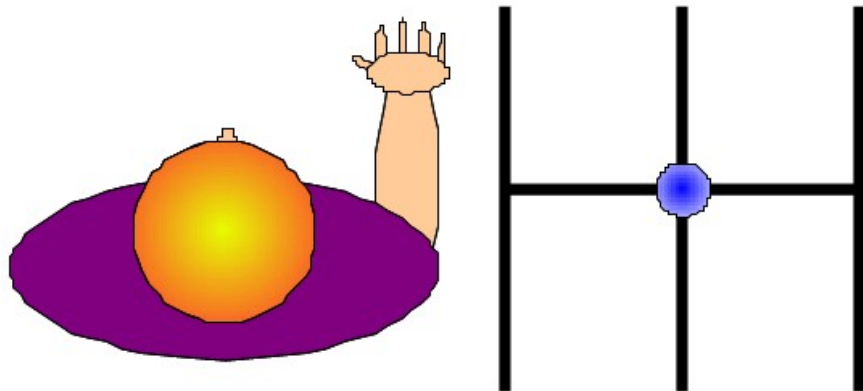
Prostorové mechanismy

Postup řešení úlohy polohy bude vysvětlen na konkrétním příkladu mechanismu.

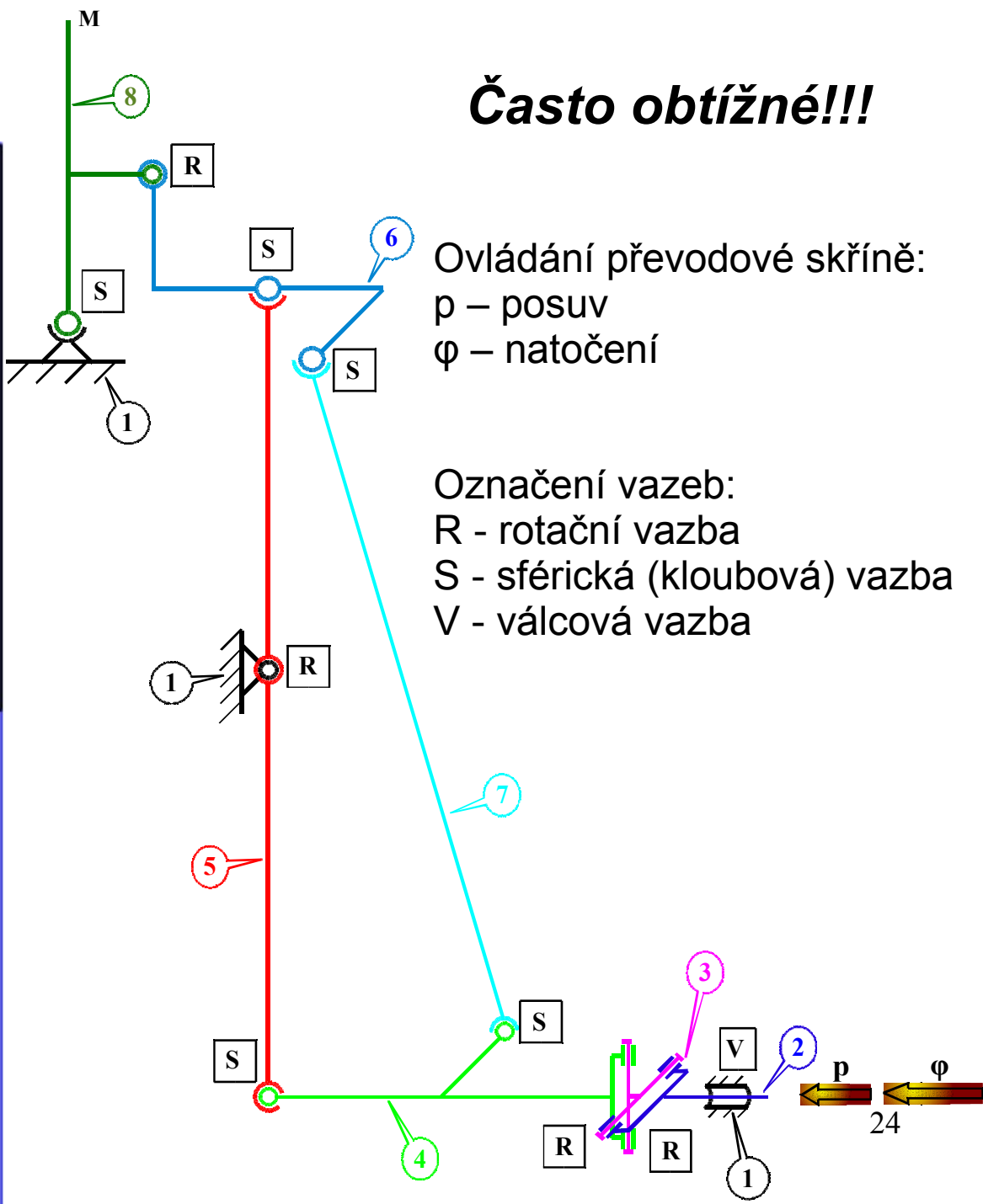
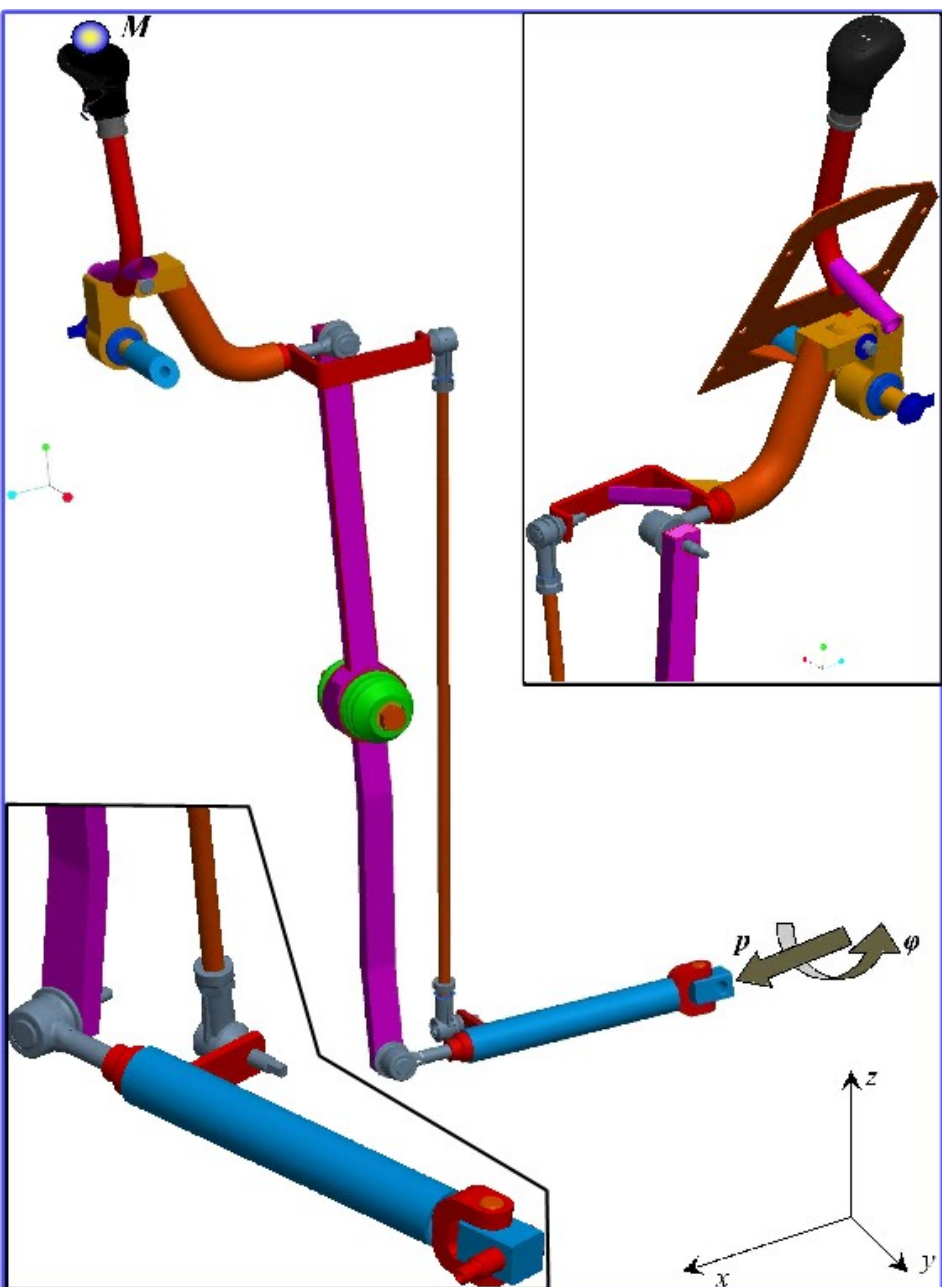
Jedná se reálný problém technické praxe řešený pro Tatra a.s..

Mechanismus řazení nákladního automobilu Tatra

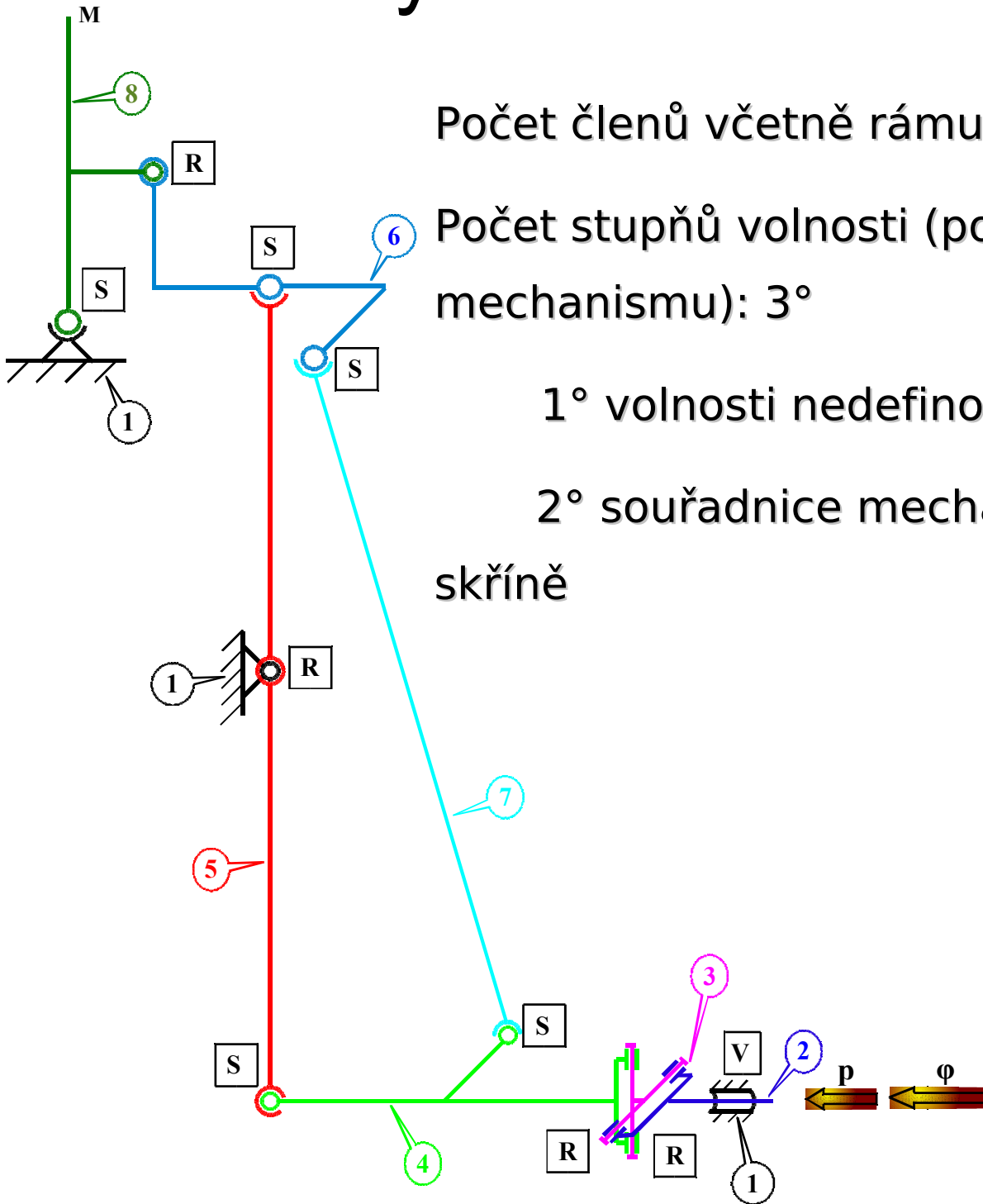
1. Sestavit úlohu polohy =>
trajektorie trajektorie rukojeti řadicí
páky
2. Citlivostní analýza =>
předepsání výrobních a montážních
tolerancí
3. Optimalizace mechanismu



Mechanismus řazení – kinematické schéma



Analýza kinematického schématu



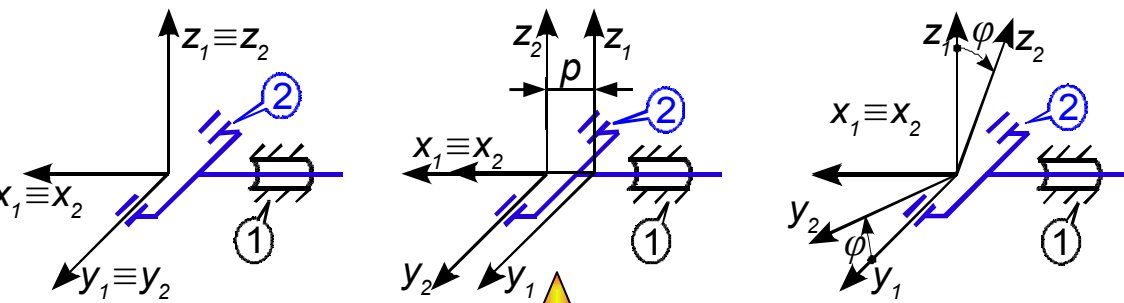
Počet členů včetně rámu: 8

Počet stupňů volnosti (počet možných pohybů mechanismu): 3°

1° volnosti nedefinovaný

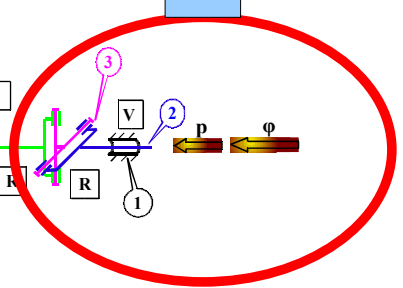
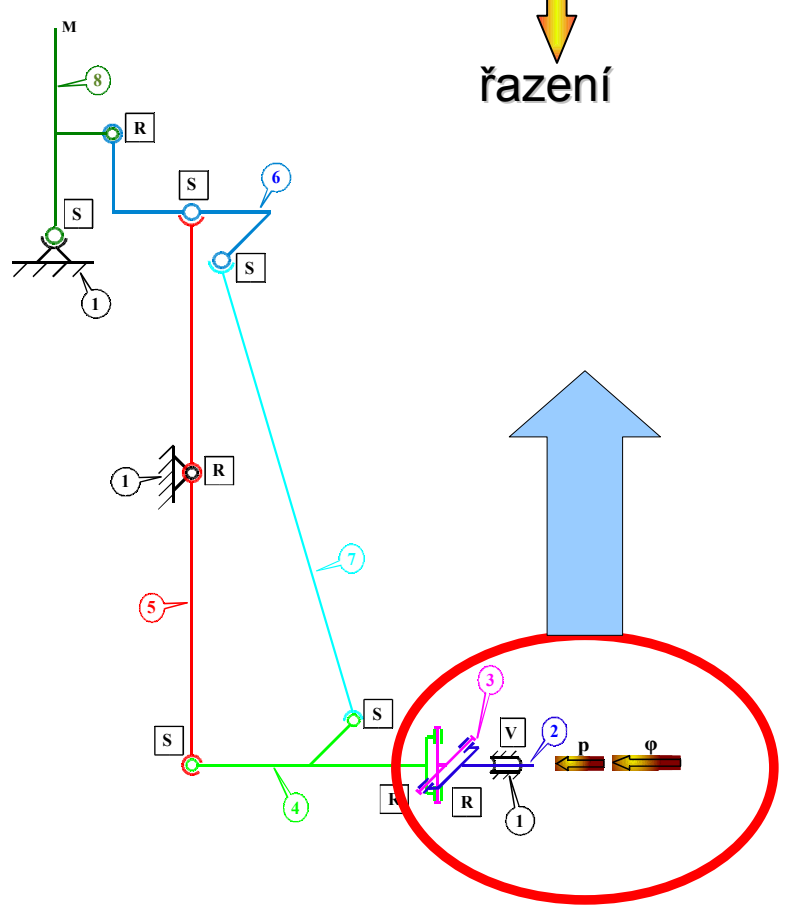
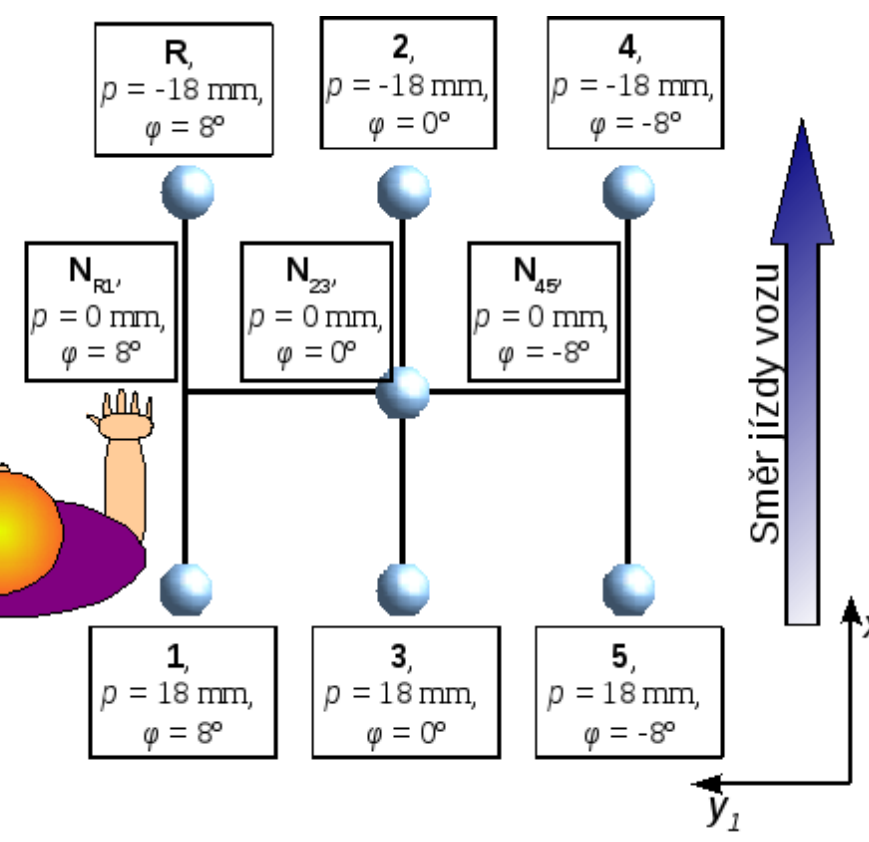
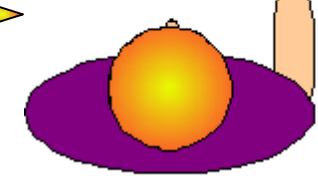
2° souřadnice mechanismu → ovládání převodové skříně

Souřadnice mechanismu → ovládání převodové skříně



řazení

volba



Stanovení úlohy polohy mechanismů

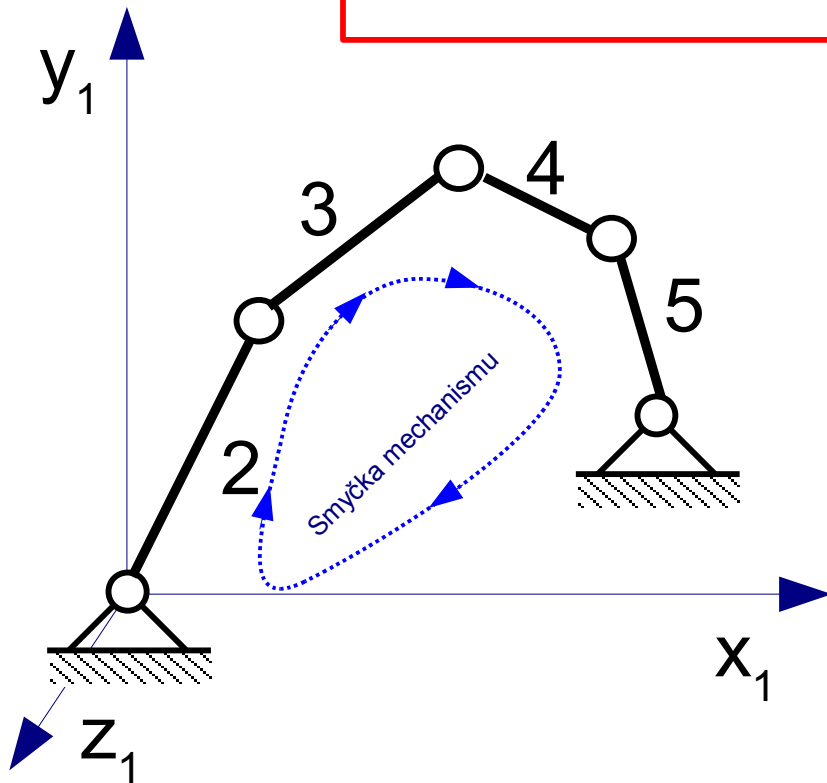
Úloha polohy = stanovení všech souřadnic vazeb (úhlů natočení nebo posunutí)

Maticová rovnice úlohy polohy pro jednu smyčku mechanismu

$$E = T_{12} \cdot T_{23} \cdot T_{34} \cdot T_{45} \cdot T_{51}$$

Jednotková matice

Transformační matice spojení rámu s tělesem 2

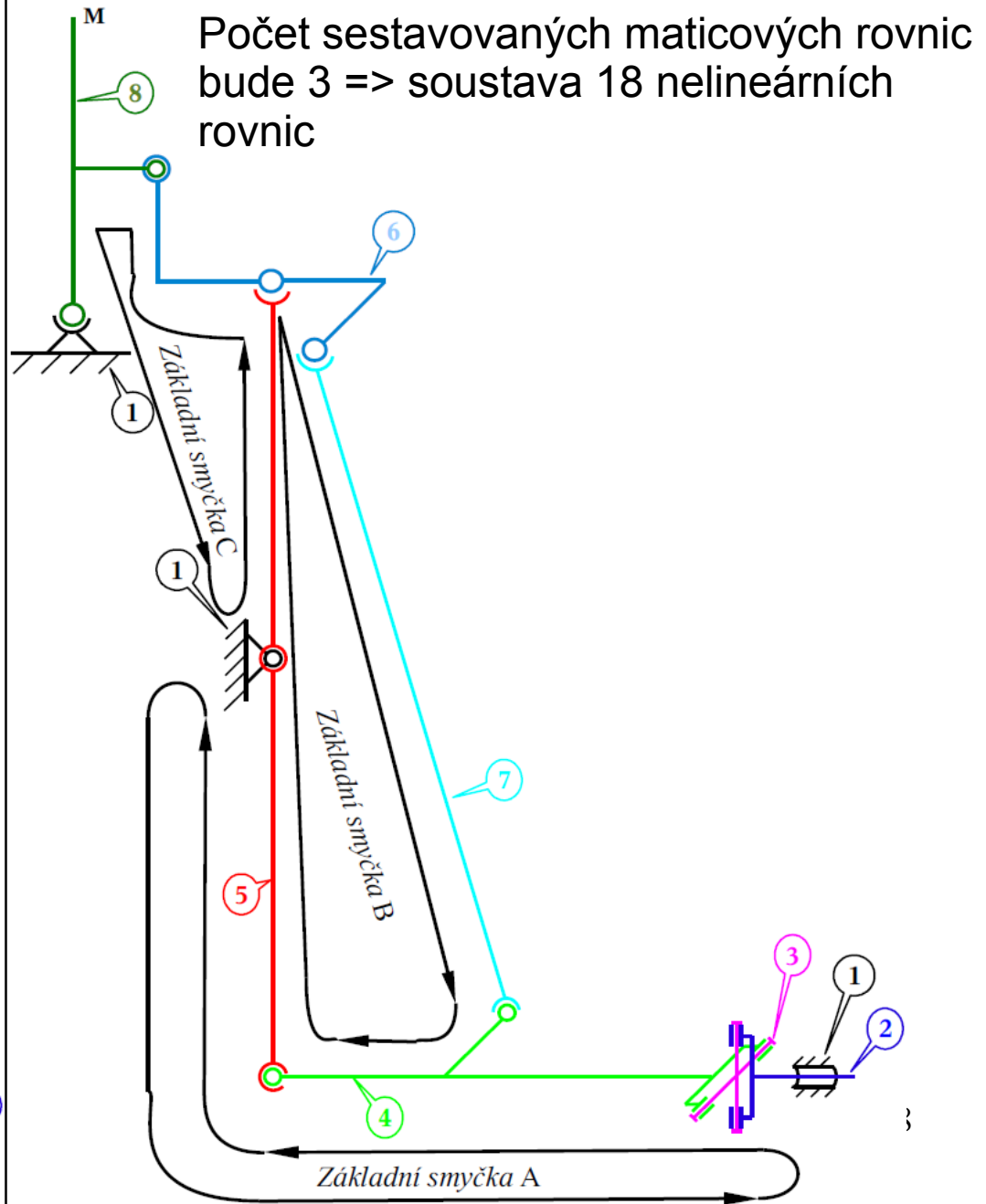
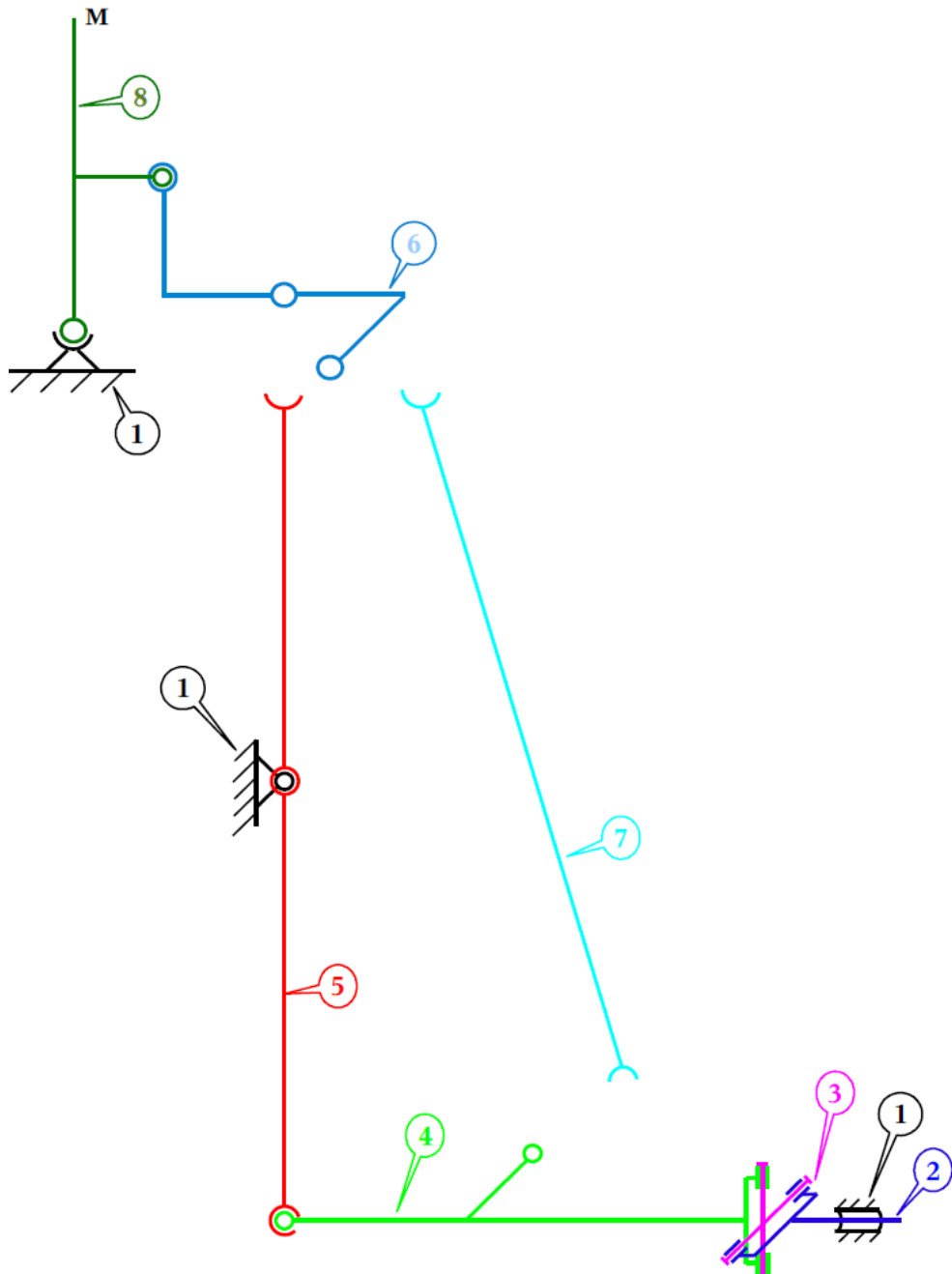


U složitých mechanismů je zapotřebí definovat několik smyček!!!

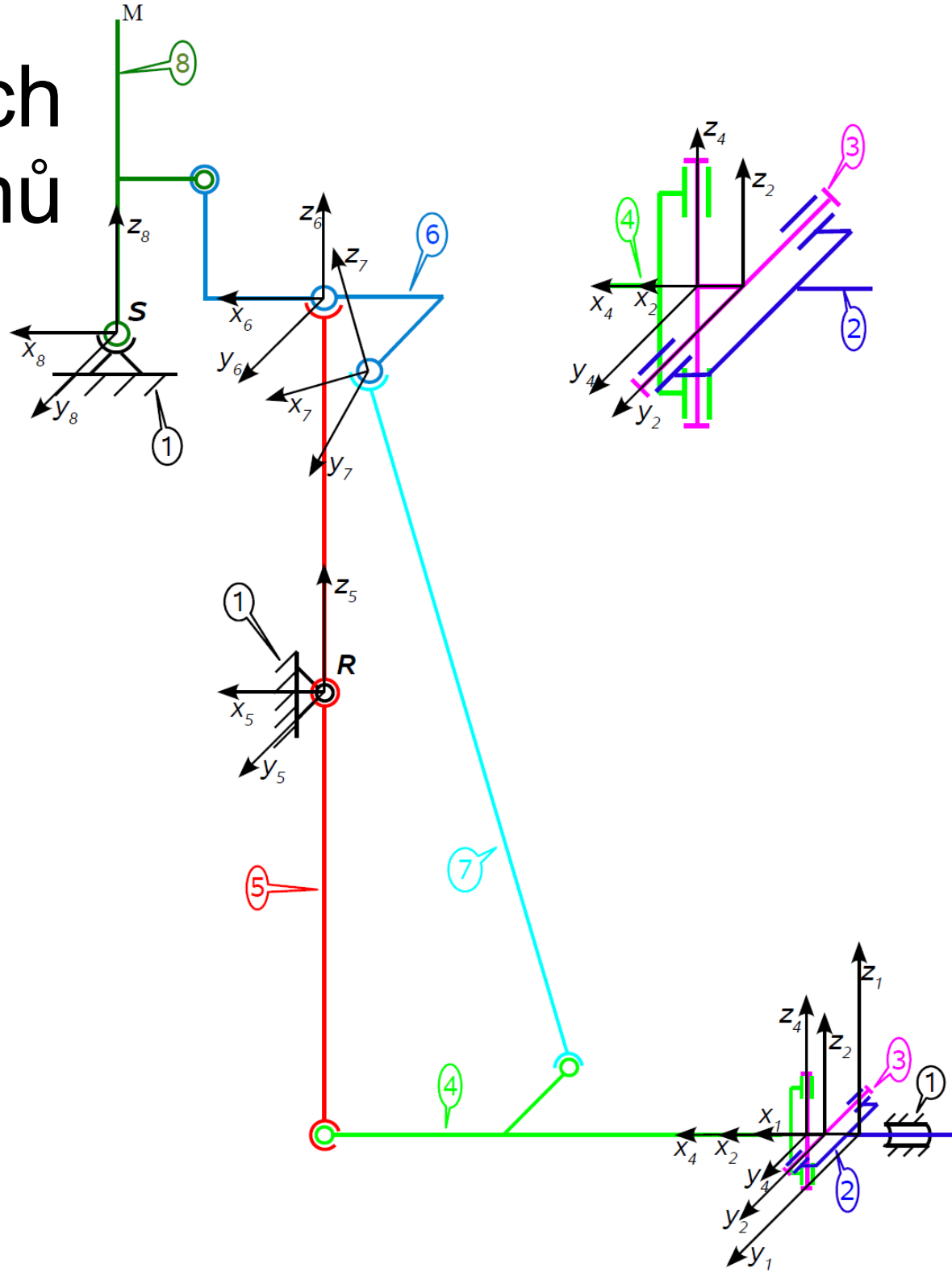
○ značka pro libovolnou vazbu

Šrafování označuje pevný prostor (rám), který je označován indexem 1

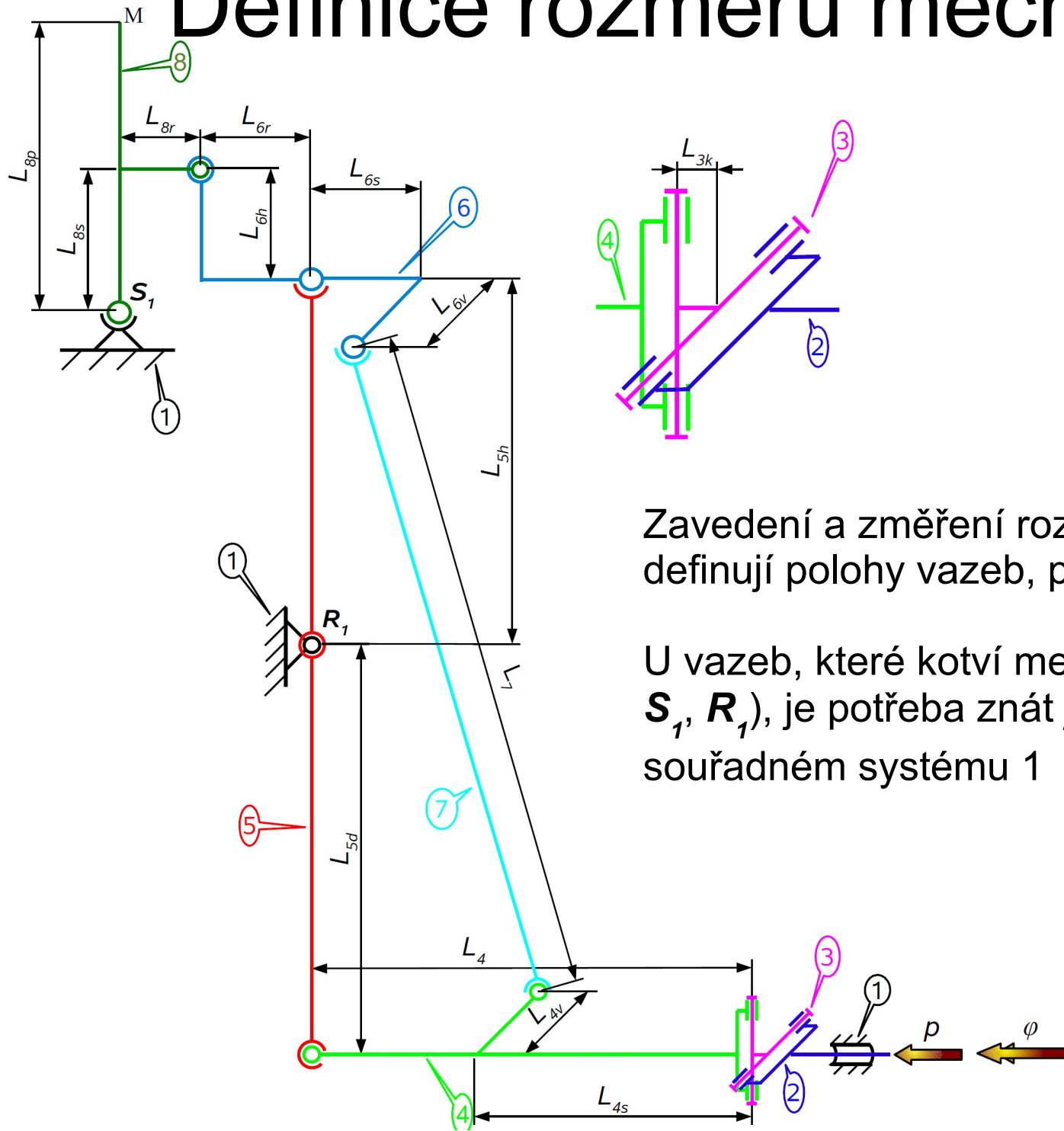
Stanovení počtu smyček mechanismu => počtu maticových rovnic



Zavedení tělesových souřadných systémů



Definice rozměrů mechanismu



Zavedení a změření rozměrových kót, které definují polohy vazeb, popř. orientaci os vazeb.

U vazeb, které kotví mechanismus na rám (body S_1 , R_1), je potřeba znát jejich polohu v pevném souřadném systému 1

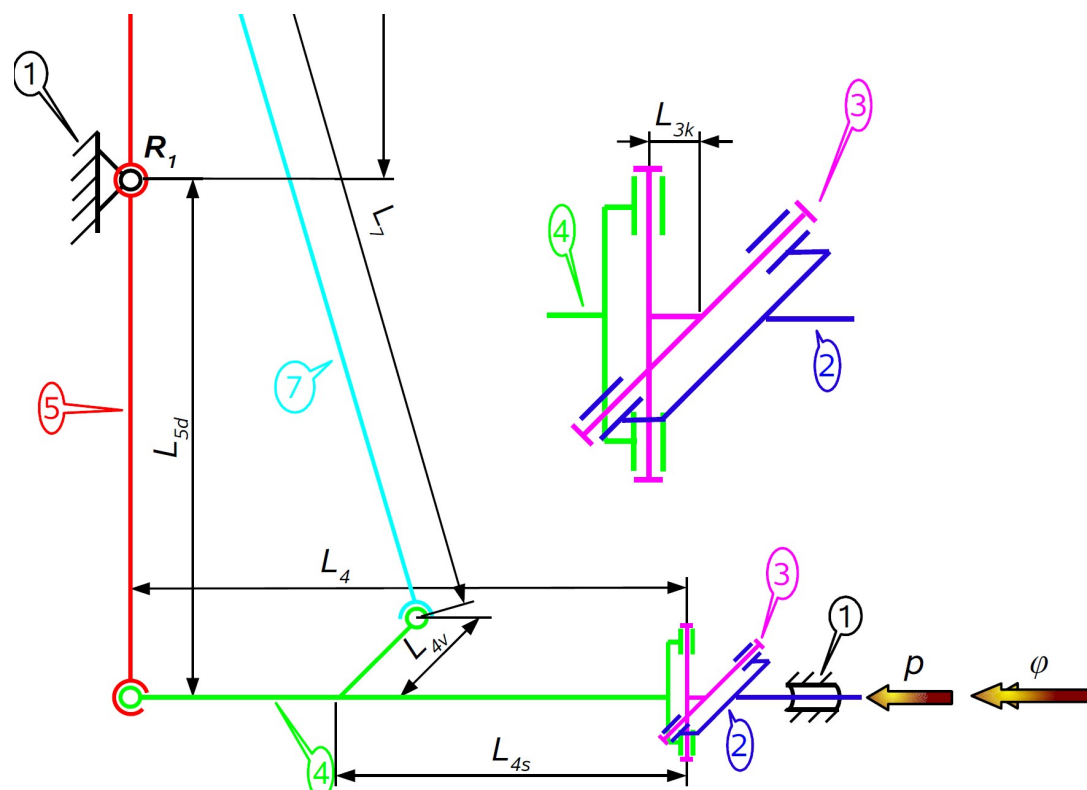
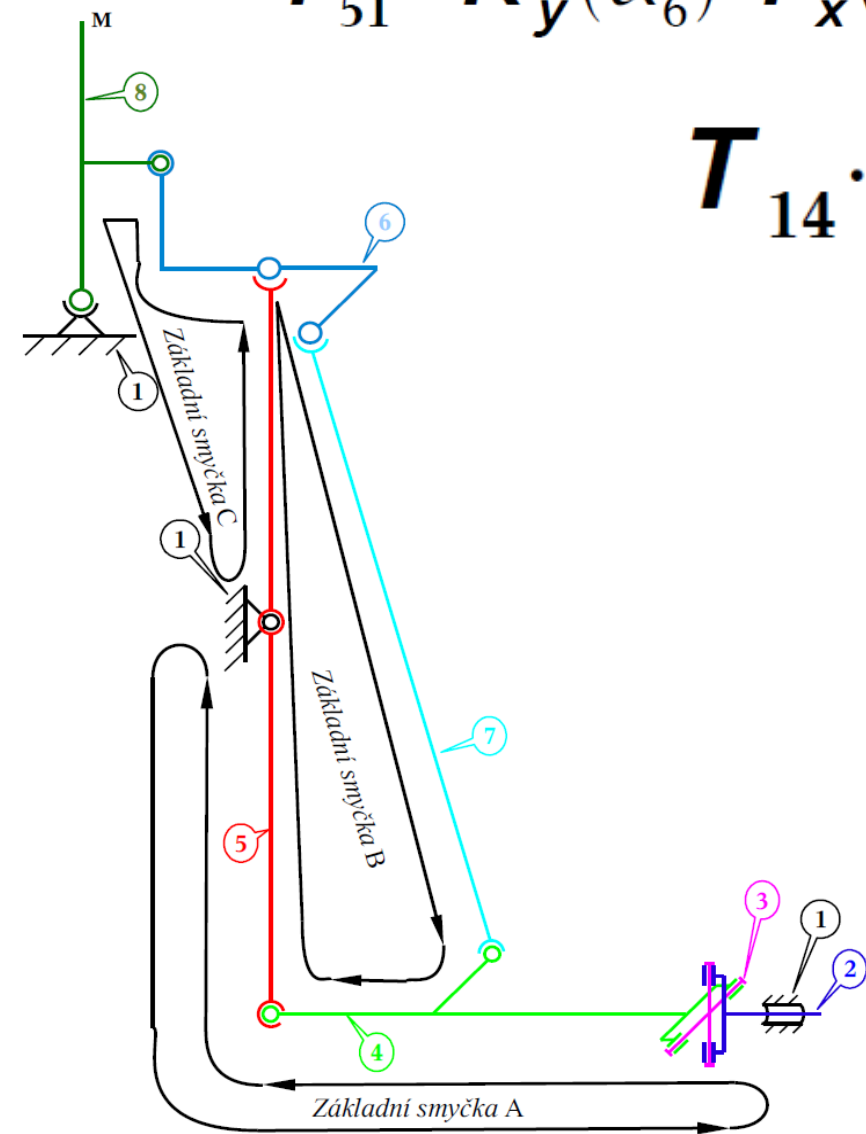
Sestavení maticové rovnice základní smyčky A

$$T_{14} = T_x(p) \cdot R_x(\varphi) \cdot R_y(\alpha_1) \cdot T_x(L_{3k}) \cdot R_z(\alpha_2),$$

$$T_{45} = T_x(L_4) \cdot R_x(\alpha_3) \cdot R_y(\alpha_4) \cdot R_z(\alpha_5) \cdot T_z(L_{5d}),$$

$$T_{51} = R_y(\alpha_6) \cdot T_x(-X_{R1}) \cdot T_y(-y_{R1}) \cdot T_z(-z_{R1}).$$

$$T_{14} \cdot T_{45} \cdot T_{51} = E$$



Sestavení maticových rovnic pro smyčky B a C

$$T_{45} \cdot T_{56} \cdot T_{67} \cdot T_{74} = E$$

$$T_{56} = T_z(L_{5h}) \cdot R_x(\alpha_7) \cdot R_y(\alpha_8) \cdot R_z(\alpha_9),$$

$$T_{67} = T_x(-L_{6s}) \cdot T_y(L_{6v}) \cdot R_x(\alpha_{10}) \cdot R_y(\alpha_{11}) \cdot R_z(\alpha_{12}),$$

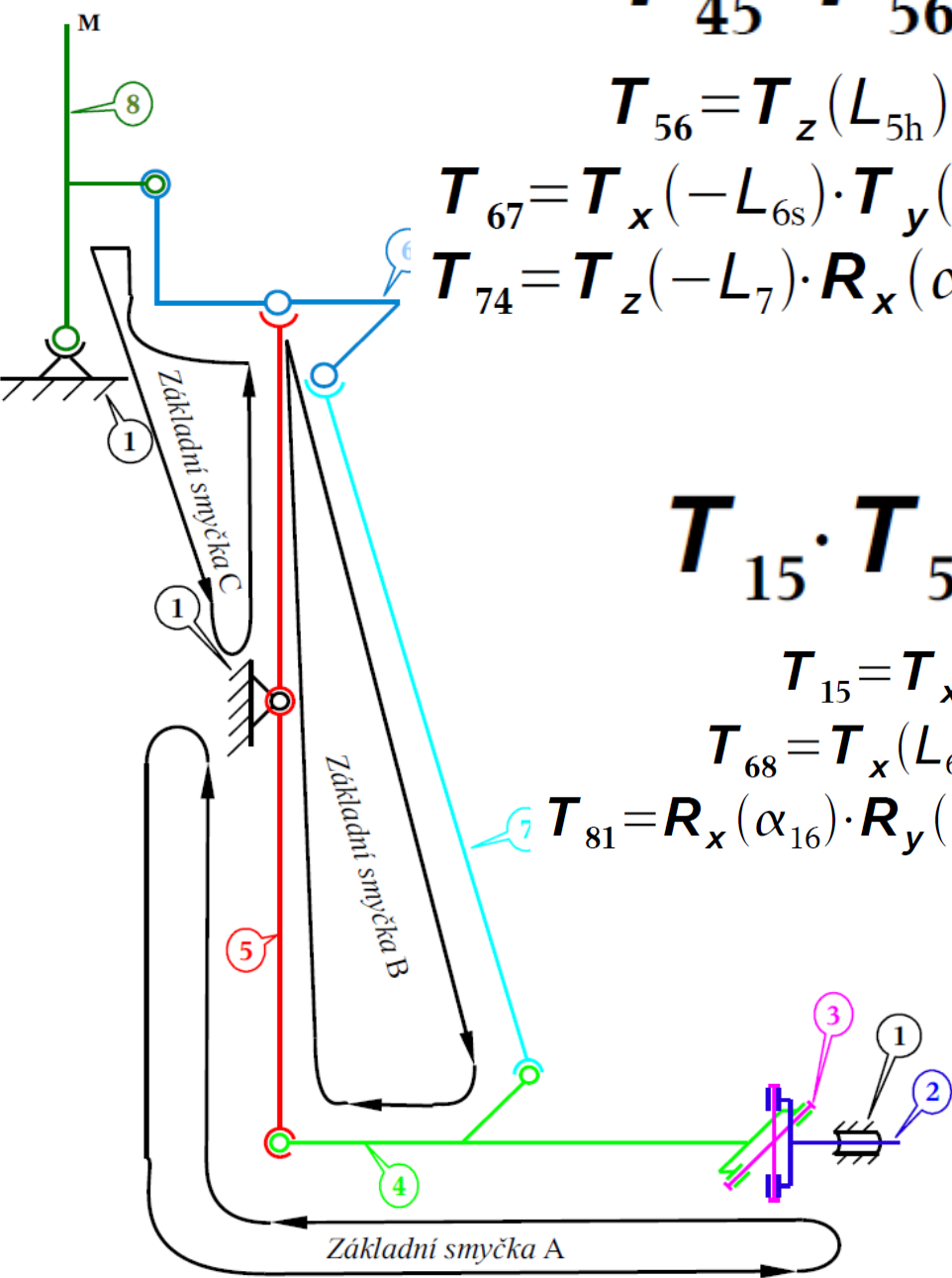
$$T_{74} = T_z(-L_7) \cdot R_x(\alpha_{13}) \cdot R_y(\alpha_{14}) \cdot T_y(L_{4v}) \cdot T_x(-L_{4s}).$$

$$T_{15} \cdot T_{56} \cdot T_{68} \cdot T_{81} = E$$

$$T_{15} = T_x(X_{R1}) \cdot T_y(Y_{R1}) \cdot T_z(Z_{R1}) \cdot R_y(-\alpha_6),$$

$$T_{68} = T_x(L_{6r}) \cdot T_z(L_{6h}) \cdot R_y(\alpha_{15}) \cdot T_x(L_{8r}) \cdot T_z(-L_{8s}),$$

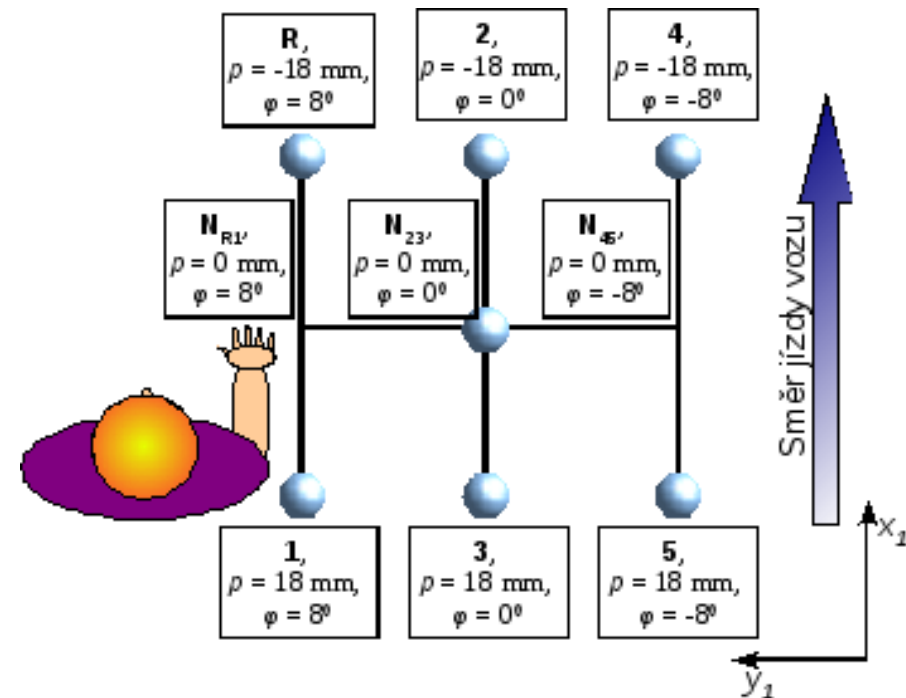
$$T_{81} = R_x(\alpha_{16}) \cdot R_y(\alpha_{17}) \cdot R_z(\alpha_{18}) \cdot T_x(-X_{S1}) \cdot T_y(-Y_{S1}) \cdot T_z(-Z_{S1}).$$



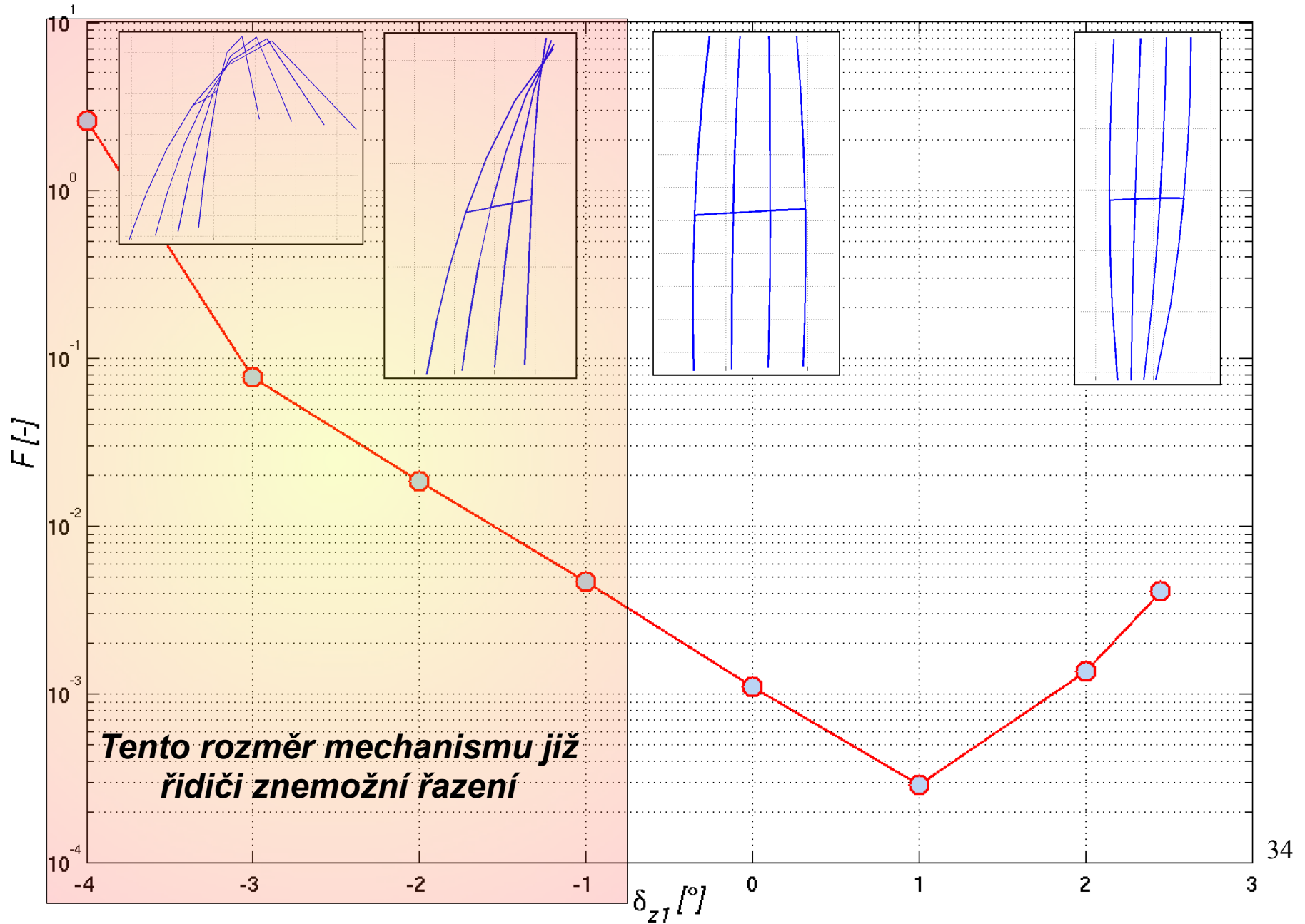
Výpočet...

1. Odhad hodnot neznámých souřadnic vazeb
2. Nastavení hodnot souřadnic převodové skříně
3. Výpočet souřadnic vazeb ze soustavy 18 nelineárních rovnic vyplývajících z maticových rovnic základních smyček
4. Výpočet polohy rukojeti řadící páky pomocí vztahu $r_{1M} = T_{18} \cdot r_{8M}$
5. Vypočtené souřadnice vazeb nastavit jako odhad do dalšího kroku
6. Zpět do bodu 2

Během tohoto výpočtu se řeší soustava nelineárních rovnic přibližně 30 krát

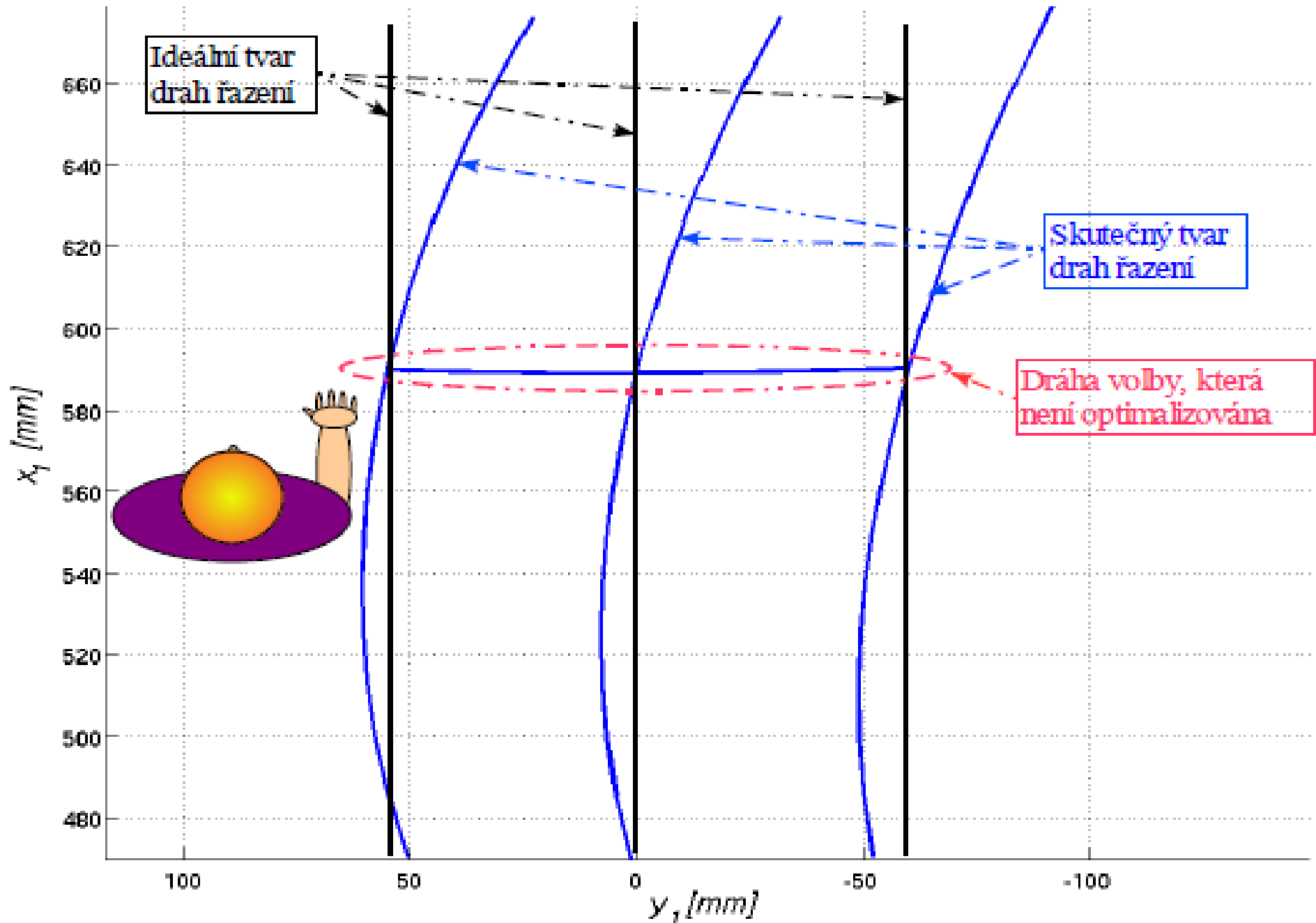


Citlivostní analýza => předepsání výrobních a montážních tolerancí



Výsledek – trajektorie rukojeti řadicí páky

Trajektorie bodu M v globálním souřadném systému y_1-x_1



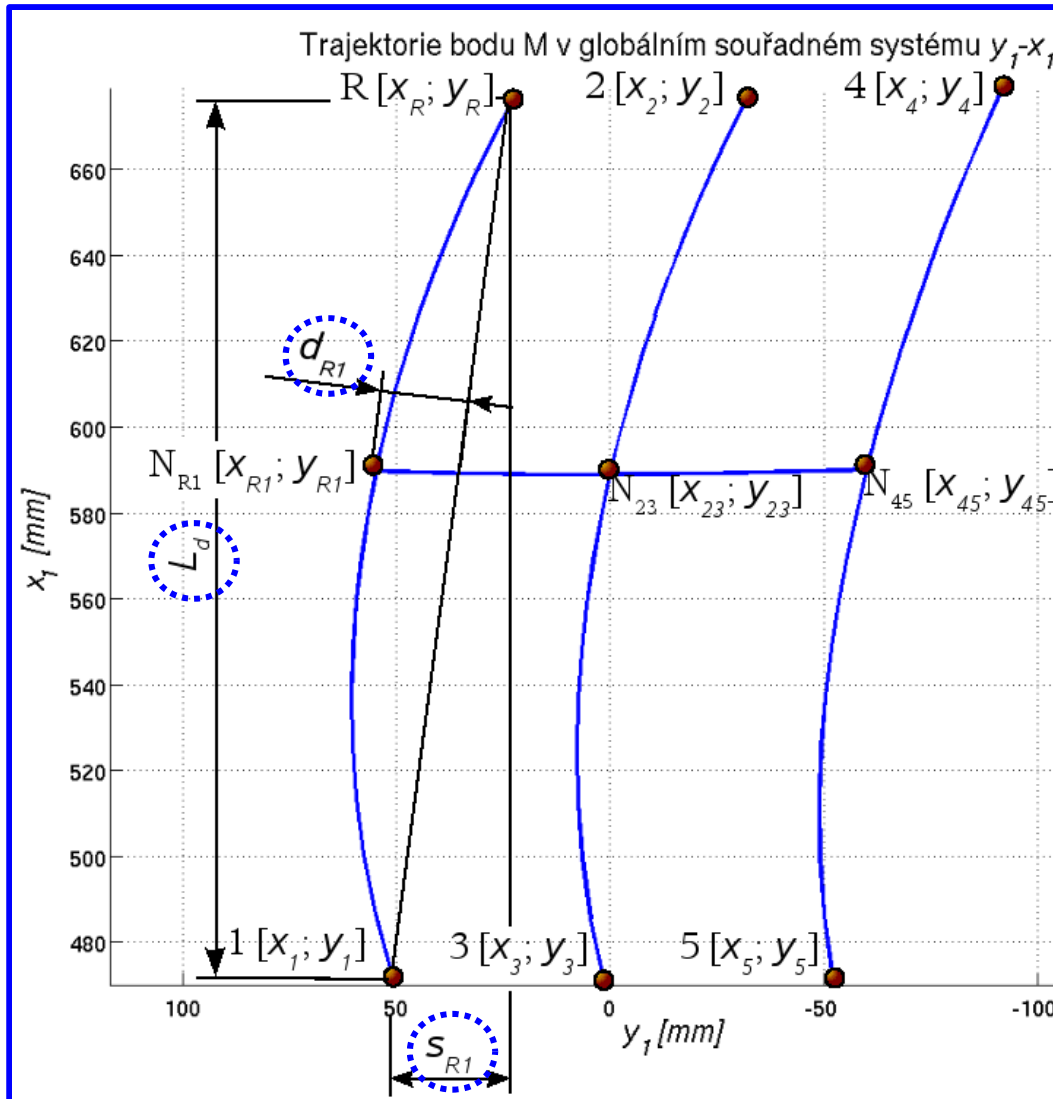
Postup optimalizačního procesu

1. Definice cílové funkce
2. Definice omezujících podmínek => volba optimalizační metody a algoritmu
3. Citlivostní analýza => volba ladicích parametrů (rozměrů mechanismu), které budou optimalizovány
4. Výpočet optimalizační úlohy
5. Rozbor řešení

Cílová funkce charakterizující tvar drah řazení

Úkolem optimalizace je nalézt vektor ladicích parametrů $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tak, aby minimalizoval $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbf{x}_{min} : \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} F(\mathbf{x})$$



Dvě geometrické charakteristiky tvaru drah řazení:

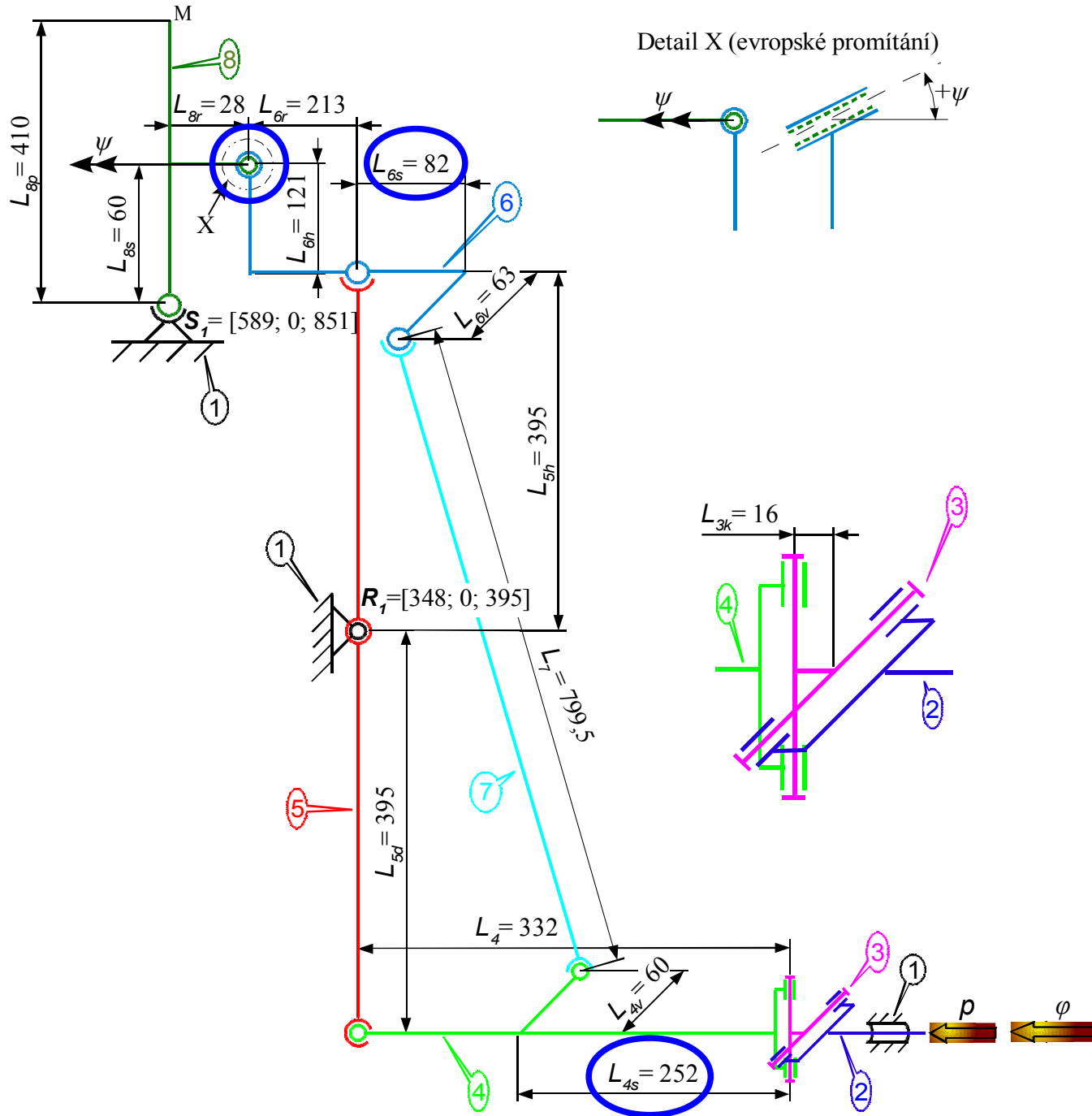
- Sklon $\rightarrow S_{R1}$
- Křivost $\rightarrow d_{R1}$
- Vztažené k délce drah L_d

Cílová funkce: $F = G_{R1} + G_{23} + G_{45}$

$$G_{R1} = \left(\frac{w_s \cdot S_{R1}}{L_d} \right)^2 + \left(\frac{w_d \cdot d_{R1}}{L_d} \right)^2$$

w_s & $w_d \rightarrow$ váhové faktory

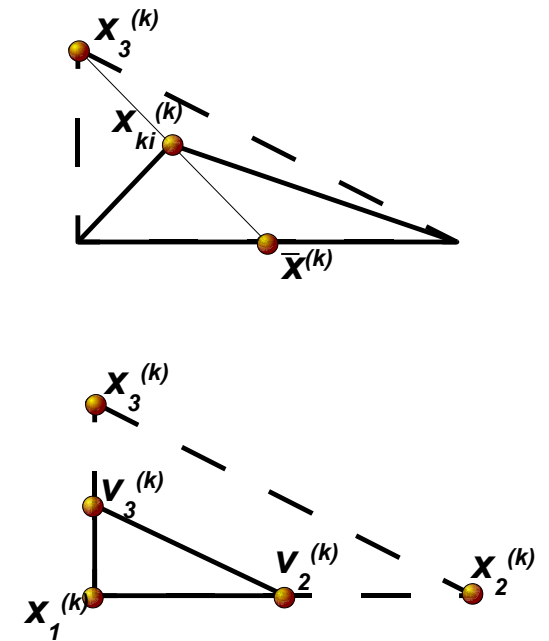
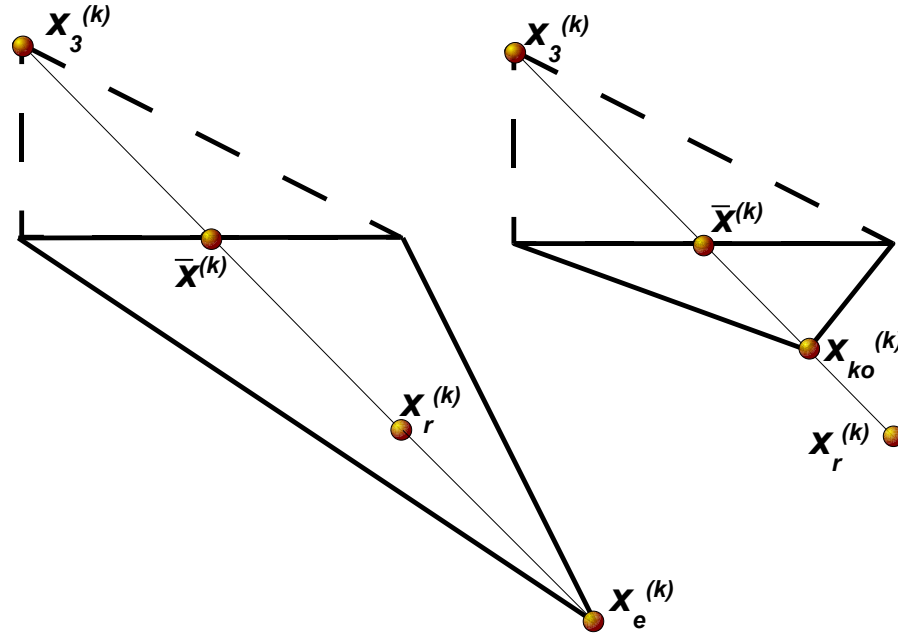
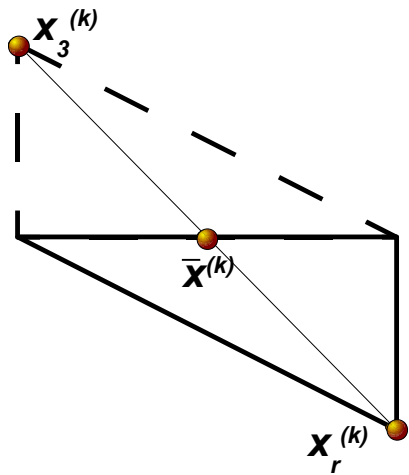
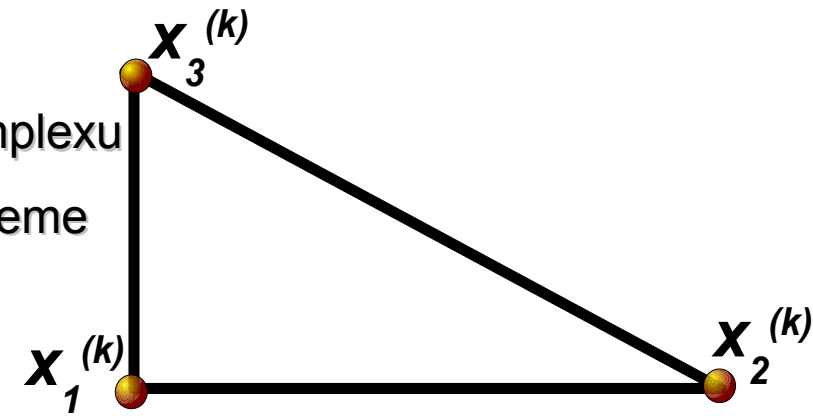
Citlivostní analýza \Rightarrow ladící parametry



Optimalizace bez omezení → Metoda simplexů (neboli Nelder-Mead)

Simplex → nejjednodušší geometrický útvar daného prostoru \mathbb{R}^n ; definován $n+1$ vrcholy

- Princip:
- 1 počáteční odhad simplexu
 - 1 vyčíslení hodnot cílové funkce ve vrcholech simplexu
 - 2 zrcadlíme, zmenšujeme, zvětšujeme, kontrahujeme



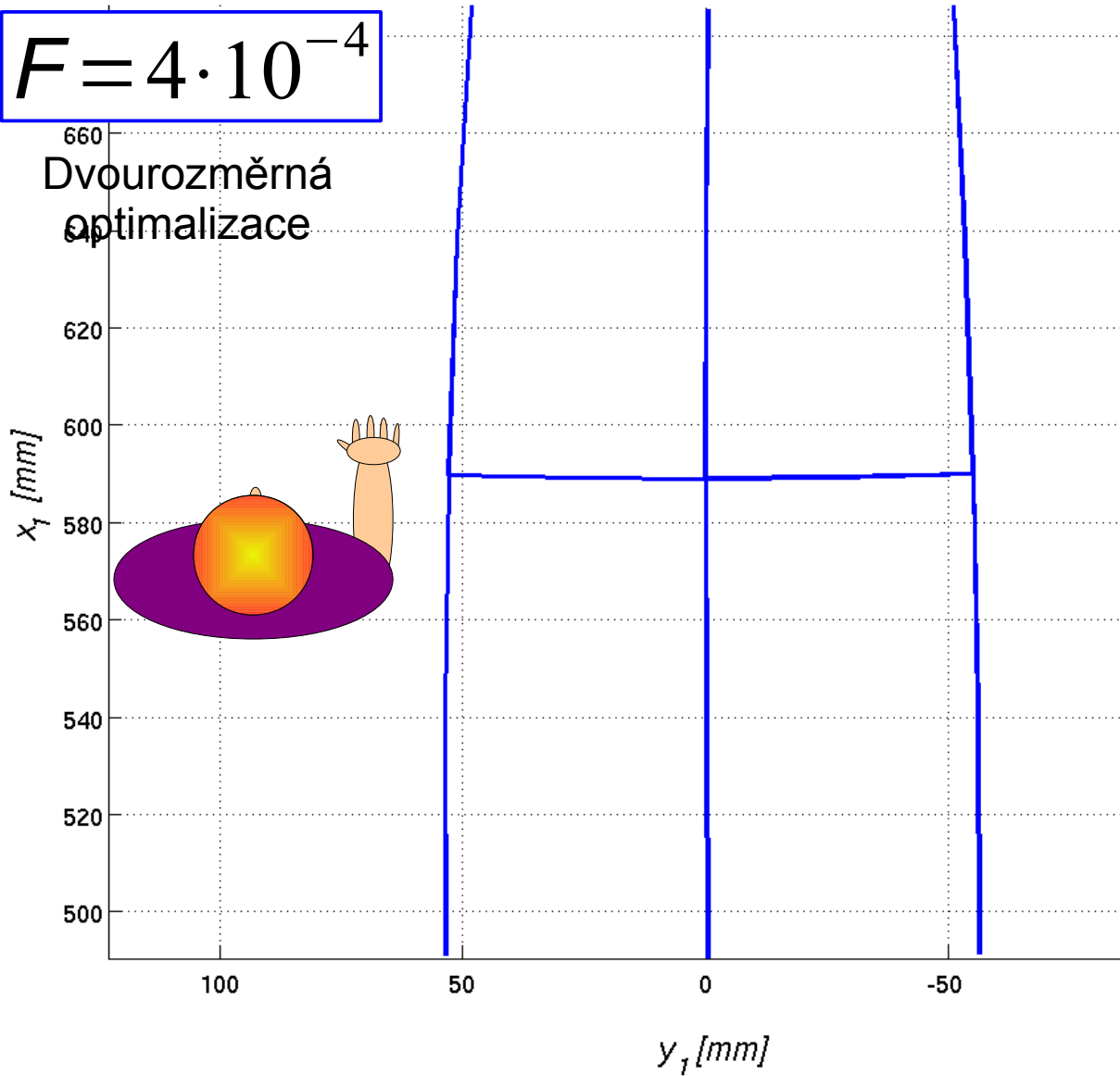
- Přednosti:** **Robustní**, nepotřebuje (kromě počátečního simplexu) žádné vstupní parametry
- Nedostatky:** Nevyužívá historii, není paralelizovatelná

Optimalizace metodou simplexů (Nelder-Mead)

Trajektorie bodu M v globálním souřadném systému y_1-x_1

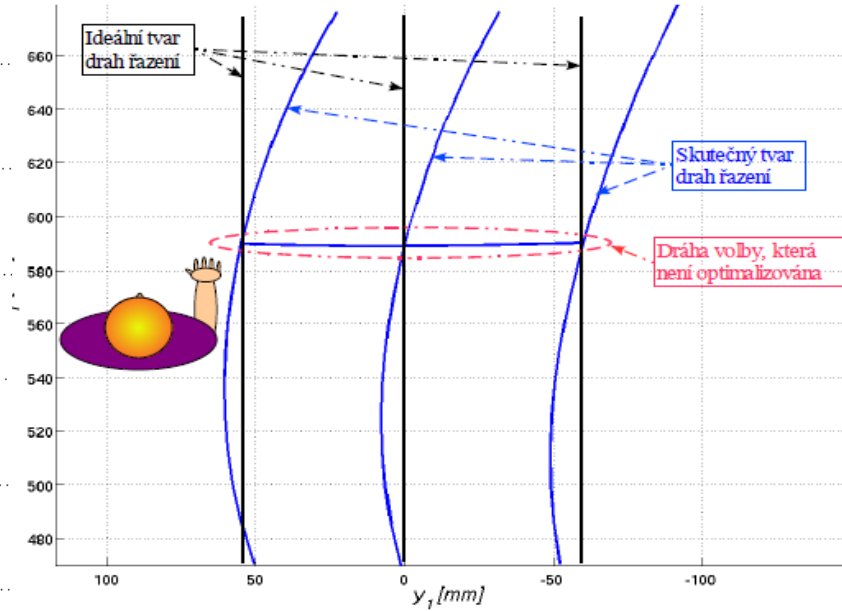
$$F = 4 \cdot 10^{-4}$$

Dvourozměrná optimalizace



Původní trajektorie řazení

Trajektorie bodu M v globálním souřadném systému y_1-x_1



Metoda simplexů video

video

Optimalizace kvazinewtonovskou metodou BFGS

Aproximuje cílovou funkci tzv. kvadratickým modelem $m^{(k)}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{Taylor: } F(\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}) \approx m^{(k)}(\mathbf{d}) = F^{(k)} + \underbrace{\nabla F^{(k)T}}_{\text{Gradient}} \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \underbrace{\mathbf{B}^{(k)}}_{\text{Hessián}} \mathbf{d}$$

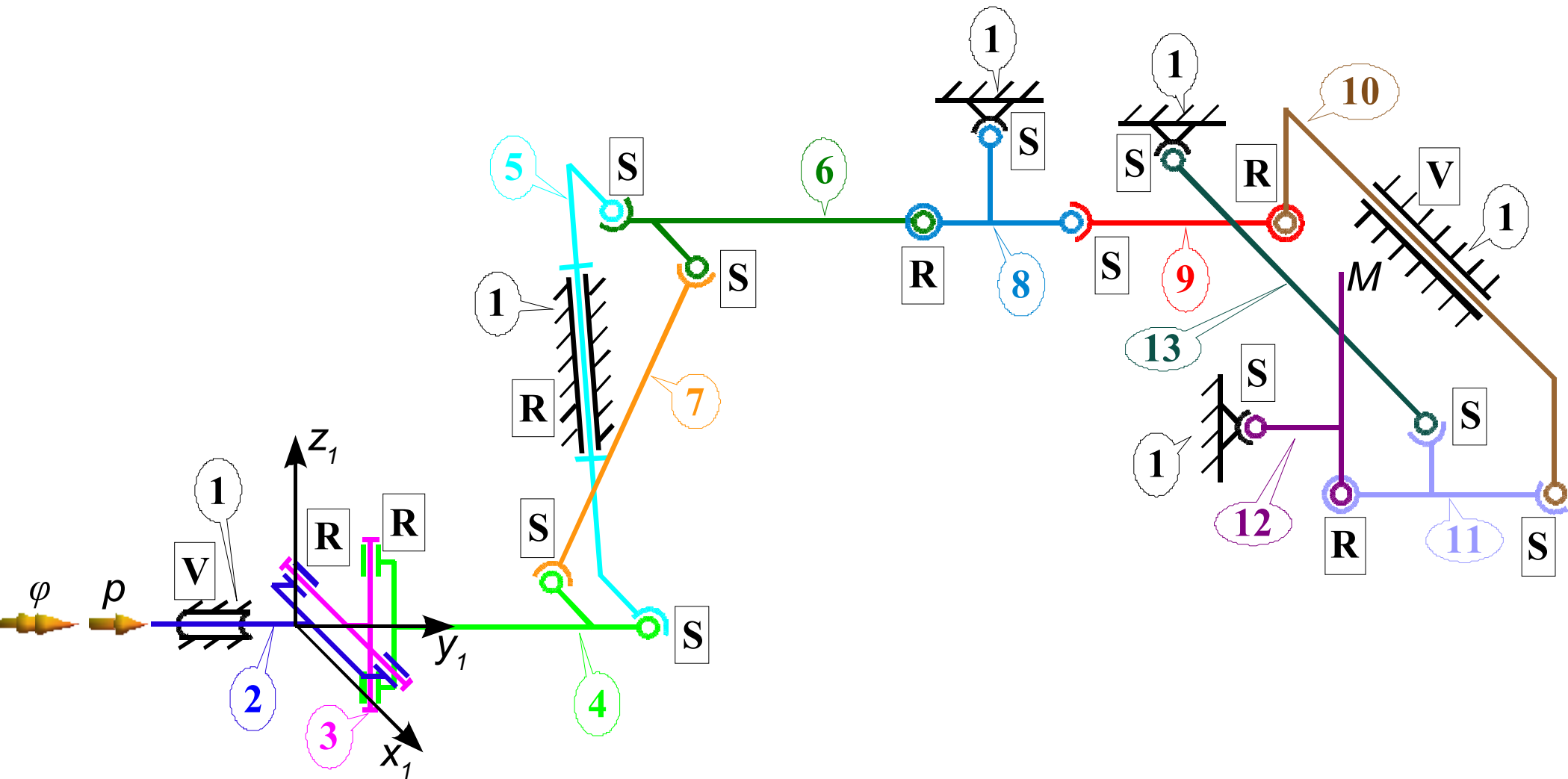
$$\mathbf{B}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x_1^{(k)2}} & \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x_1^{(k)} \partial x_2^{(k)}} & \dots & \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x_1^{(k)} \partial x_n^{(k)}} \\ \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x_2^{(k)} \partial x_1^{(k)}} & \ddots & & \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x_2^{(k)} \partial x_n^{(k)}} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x_n^{(k)} \partial x_1^{(k)}} & \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x_n^{(k)} \partial x_2^{(k)}} & \dots & \frac{\partial^2 F^{(k)}}{\partial x_n^{(k)2}} \end{bmatrix}$$

- ✎ Explicitní vyjádření $\mathbf{B}^{(k)}$ není možné a numerické vyčíslení je drahé, pro $n = 5 \Rightarrow 15$ vyčíslení F
- ✎ Hessián $\mathbf{B}^{(k)}$ konstruujeme pomocí historie
- ✎ Možností jak aproximovat Hessián $\mathbf{B}^{(k)}$ je několik \Rightarrow DFP, BFGS, **modifikovaná BFGS** etc.

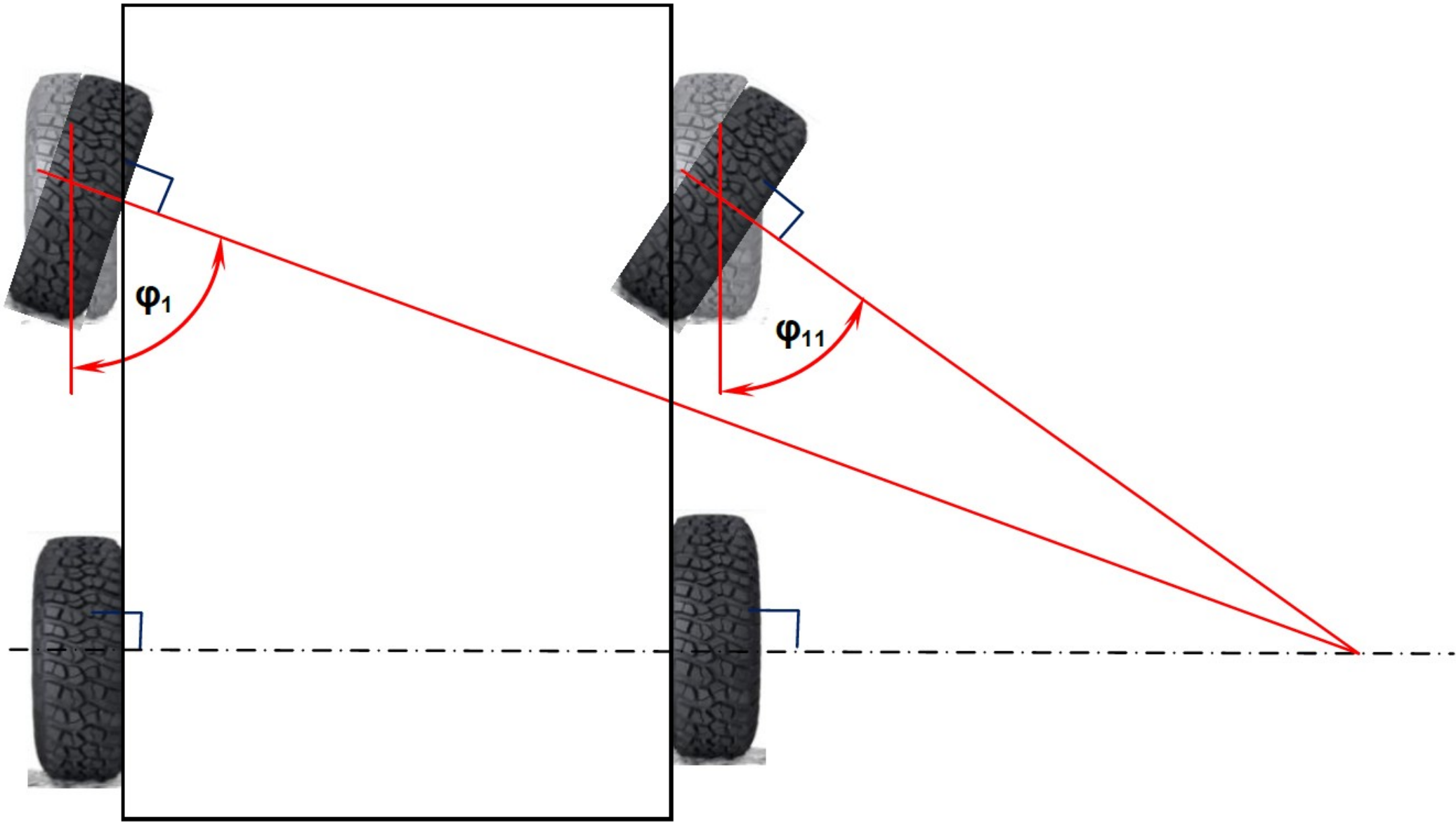
Přednosti: Využívá historii, je paralelizovatelná

Nedostatky: Potřebuje (kromě počátečního odhadu) další parametry, např: $\mathbf{B}^{(0)}$, h

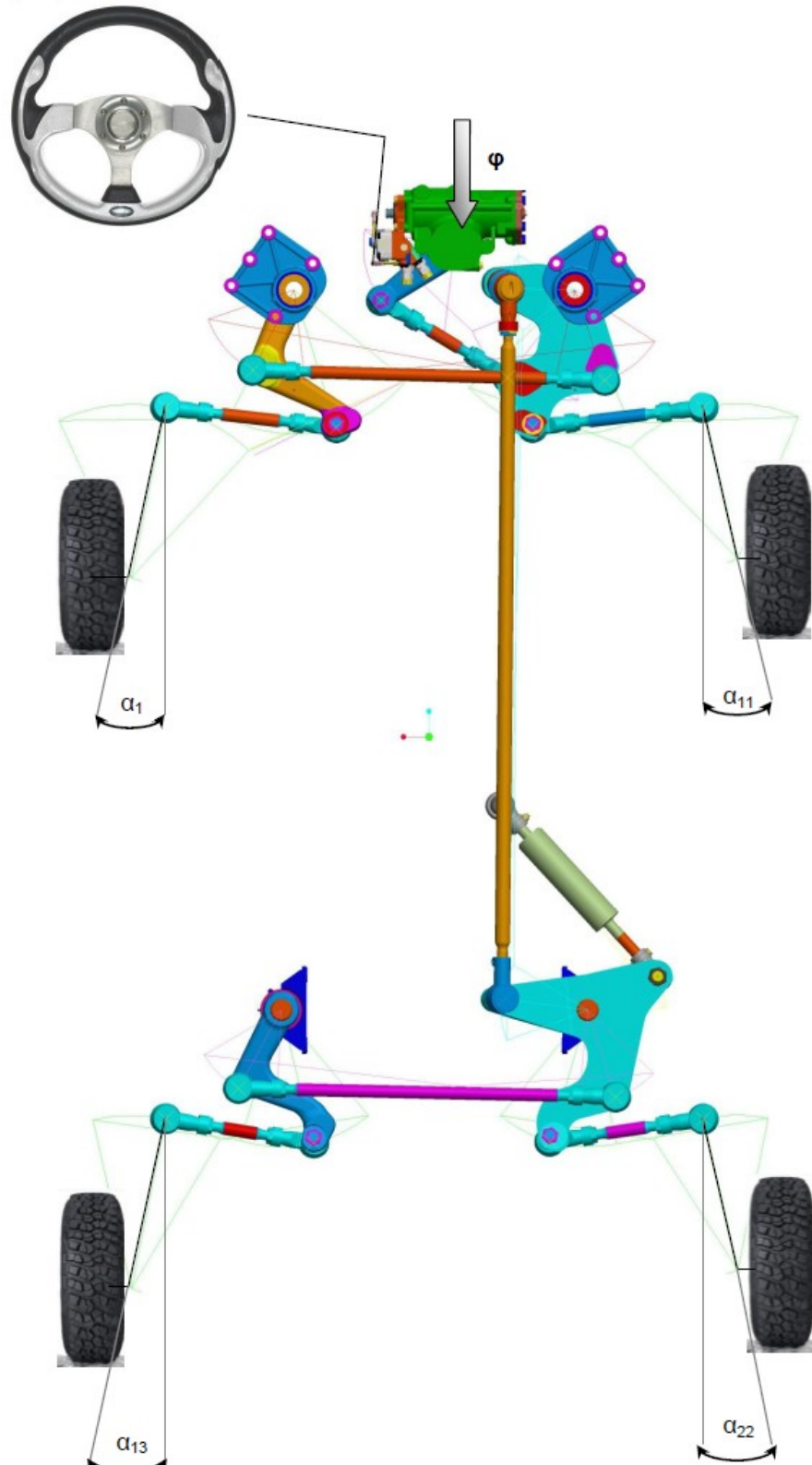
Příklad složitějšího mechanismu mechanismu řazení – 6 smyček => soustava 36 nelineárních rovnic



Mechanismus řízení



Mechanismus řízení



Děkuji Vám za pozornost

Fotografie upraveného levostranného mechanismu řazení

