evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zdeněk Dostál

Dualita v optimalizaci a v mechanice

Katedra aplikované matematiky 470
FEI VŠB-TU Ostrava

Osnova

- Motivace a cíl přednášky
- Dualita
- Úloha QP bez omezení
- Podmínky rovnováhy, variační principy
- Úloha QP s omezením =
- Dualita
- Silová metoda, reciproční formulace
- Úloha QP s omezením <=

Dualita

- **Wilkipedia**: “Generally speaking, a duality (in mathematics) translates concepts, theorems or mathematical structures into other concepts, theorems or structures, in a one-to-one fashion, often involution.”

- **Geometrie**: body – přímky

- **Hilbertův prostor**: vektory - funkcionály

- **Mechanika**: posunutí – síly

- **Optimalizace**: minimalizace v argumentu cenové funkce - maximalizace v Lagrangeových multiplikátorech.

Úloha kvadratického programování bez omezení

$$f(x)=\frac{1}{2}x^T Ax-b^T x, \quad A\in R^{n\times n}, \quad A=A^T$$

$$\nabla f(x)=Ax-b$$

$$f(x+d)=f(x)+(Ax-b)^T d+\frac{1}{2}d^T Ad$$

Podmínky minima:

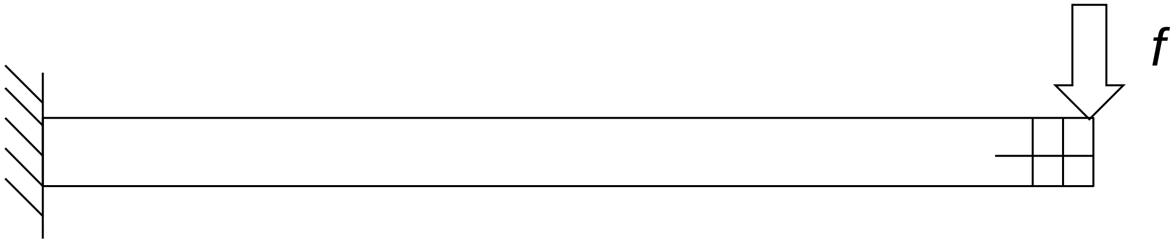
$$\boxed{f(\hat{x})\le f(x) \ \text{právě když} \ A\hat{x}-b=0}$$

$$0\le f(\hat{x}+\alpha d)-f(\hat{x})=\alpha(A\hat{x}-b)^T d+\frac{\alpha^2}{2}d^T Ad \ \text{pro všechna } \alpha, d$$

$$\alpha \ \text{malé} \ \Rightarrow \ A\hat{x}-b=0$$

$$\alpha \ \text{velké} \ \Rightarrow \ A \ \text{je SPS}$$

Diskretizované podmínky rovnováhy - posunutí



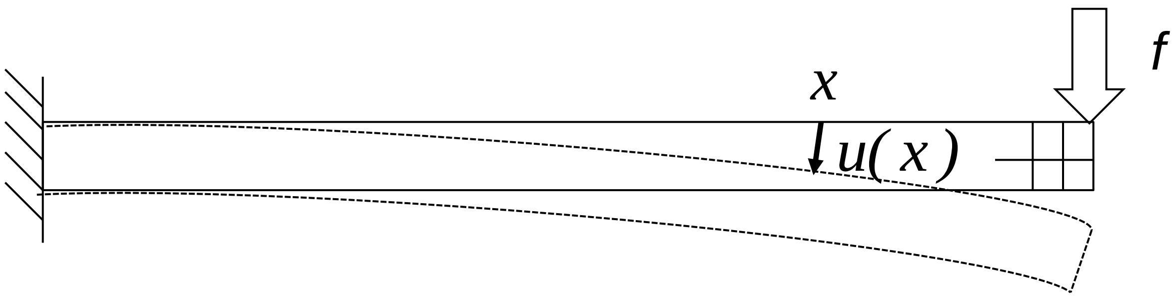
$Au = b$, u je uzlové posunutí, A matice tuhosti, b vnější síly

$$f(u) = \frac{1}{2} u^T A u - b^T u,$$ energetický funkcionál

Princip minima potenciální energie:

$$\boxed{A\hat{u} - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\hat{u}) \le f(u)}$$

Diskretizované podmínky rovnováhy - síly



$Au - f = o \quad \Leftrightarrow \quad u - A^{-1}f = o, \quad u$ je uzlové posunutí, A^{-1} matice poddajnosti

$\theta(f) = -\frac{1}{2} f^T A^{-1} f + u^T f,$ komplementární (duální) energie

$-\nabla\theta(f) = -A^{-1}f + u$

Princip maxima komplementární energie:

$$\boxed{u - A^{-1}\hat{f} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta(\hat{f}) \geq \theta(f)}$$

Úloha kvadratického programování s omezením =

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x, \quad A \in R^{n \times n}, \quad A = A^T$$

$$\Omega = \{x : Bx = c\}$$

$$f(x) \quad \rightarrow \quad \text{min pro } x \in \Omega \qquad \text{(P)}$$

Variační podmínka minima:

$$f(\hat{x}) \le f(x) \ \text{ právě když } \hat{x} \in \Omega \text{ a}$$

$$\boxed{0 \le f(\hat{x} + d) - f(\hat{x}) = (A\hat{x} - b)^T d + \frac{1}{2} d^T A d \ \text{ pro všechna } \ d \in \mathrm{Ker} B}$$

$$(\text{Jelikož} \quad B\hat{x} = c, \quad B(\hat{x} + d) = c \quad \Leftrightarrow \quad Bd = 0)$$

KKT

$$0 \le f(\hat{x}+\alpha d) - f(\hat{x}) = \alpha (A\hat{x}-b)^T d + \frac{\alpha^2}{2} d^T A d \quad \text{pro všechna } \alpha, d \in \mathrm{Ker} B$$

$$\alpha \quad \text{malé} \quad \Rightarrow \quad (A\hat{x}-b)^T \mathrm{d} = 0 \quad \text{pro } d \in \mathrm{Ker} B$$

$$Bd = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (B^T \lambda)^T d = \lambda^T B d = 0 \quad \text{pro všechna } \lambda \in R^m$$

$$\mathrm{Ker} B \perp Ax - b \quad \Leftrightarrow \quad Ax - b \in \mathrm{Im} B^T$$

Karush-Kuhn-Tuckerovy podmínky minima:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\hat{x}) \le f(x) \quad \text{právě když existuje } \hat{\lambda} \text{ tak, že} \\ A\hat{x} - b + B^T \hat{\lambda} = 0 \end{array}}$$

Citlivost cenové funkce na narušení vazeb

$$f(x) \to \min \quad \text{pro} \quad Bx = c + u, \ \textit{řešení} \ \ \hat{x}(u), \hat{x} = \hat{x}(o)$$

$$d(u) = \hat{x}(u) - \hat{x}$$

$$Bd(u) = B\hat{x}(u) - B\hat{x} = u$$

$$\text{KKT:} \ \ A\hat{x} - b + B^T\hat{\lambda} = \text{o} \ \Rightarrow \ \ \nabla f(\hat{x}) = -B^T\hat{\lambda} \ \ \text{a}$$

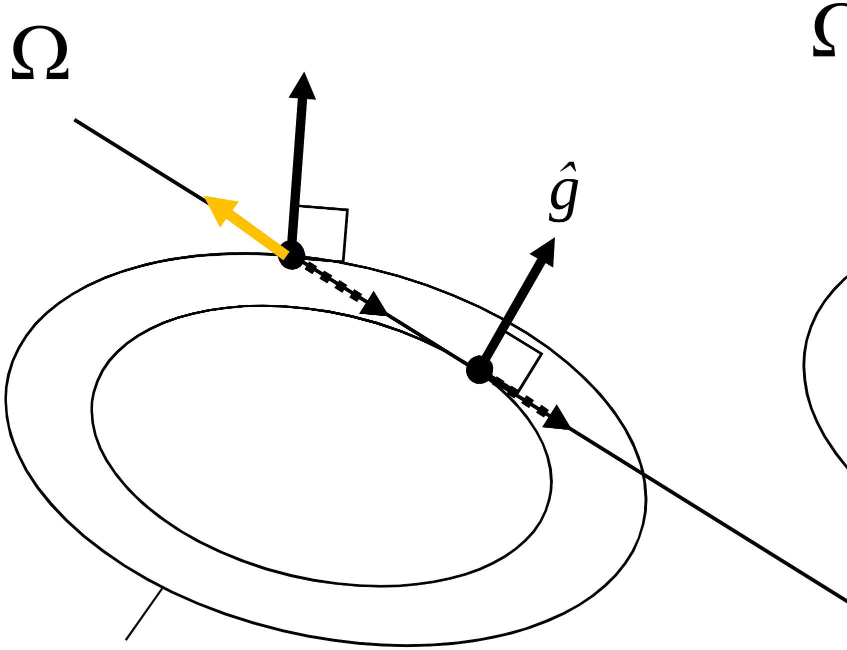
$$\nabla f(\hat{x})^T d(u) = -\left(B^T\hat{\lambda}\right)^T d(u) = -\hat{\lambda}^T Bd(u) = -\hat{\lambda}^T u$$

Změna hodnoty cenové funkce v závislosti na perturbaci vazeb:

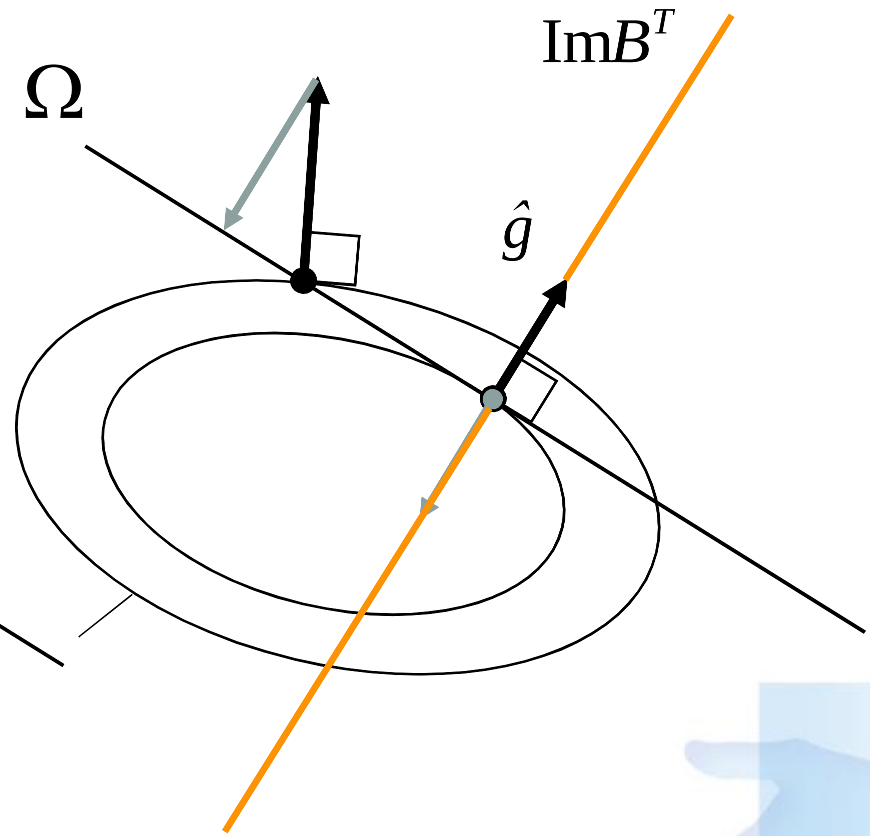
$$\boxed{f(\hat{x}(u)) - f(\hat{x}) \approx -\hat{\lambda}^T u}$$

Ilustrace podmínek rovnováhy

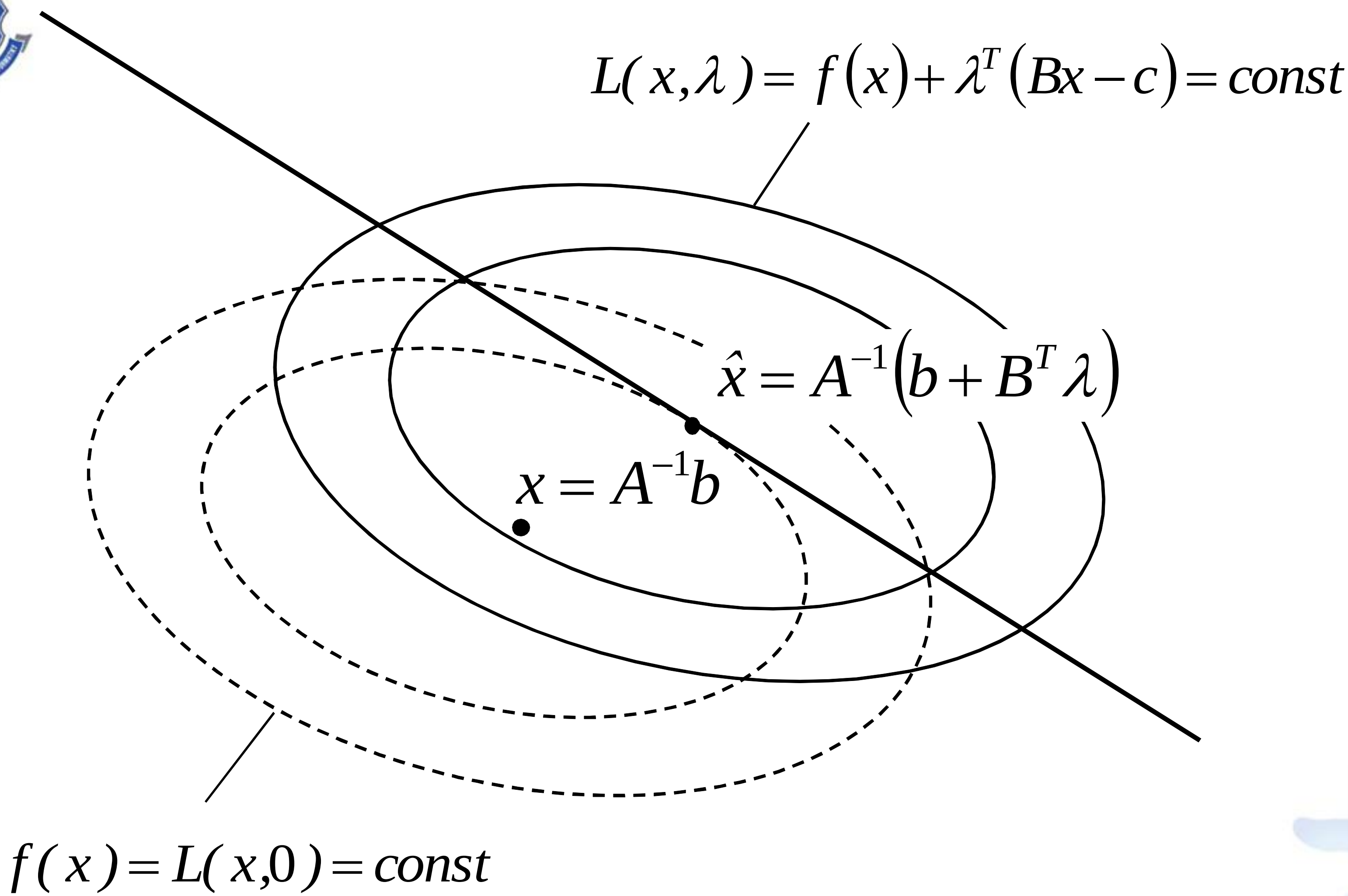
Variační:



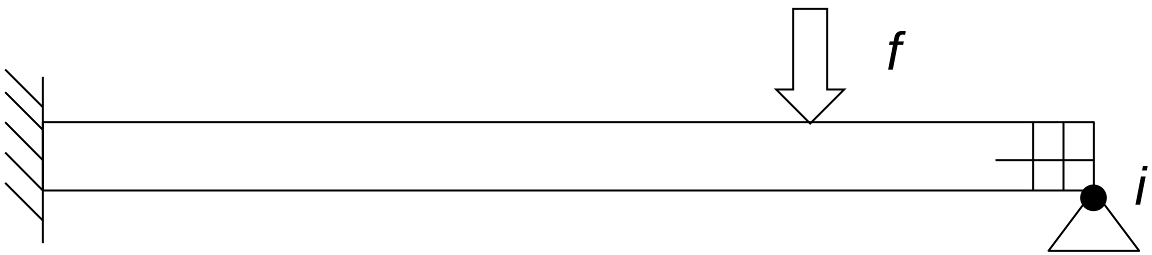
KKT:



Lagrangián


$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T(Bx - c) = const$
$\hat{x} = A^{-1}(b + B^T\lambda)$
$x = A^{-1}b$
$f(x) = L(x,0) = const$

Diskretizované podmínky rovnováhy - posunutí



$Au = b, \quad u$ je uzlové posunutí, A matice tuhosti

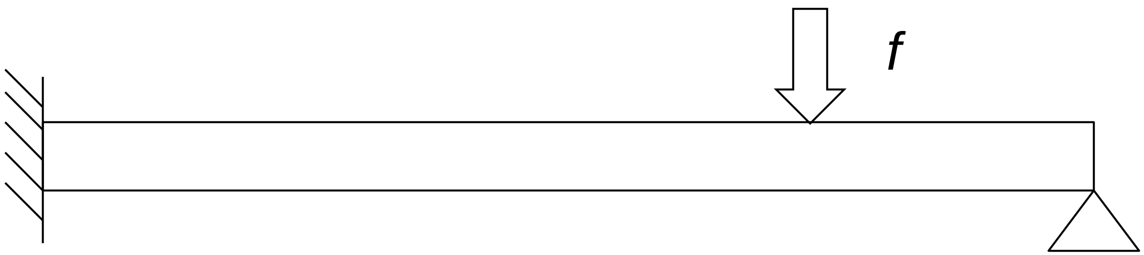
$$f(u) = \frac{1}{2} u^T A u - b^T u, \quad \text{energetický funkcionál}$$

$$u_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \qquad\qquad i \qquad\qquad \\ \left[\qquad\qquad 1 \qquad\qquad \right] \end{array} u = Bu = 0$$

Princip minima potenciální energie:

$$\boxed{A\hat{u} - b + B^T \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\hat{u}) \leq f(u) \text{ pro } u \in \operatorname{Ker} B}$$

Diskretizované podmínky rovnováhy - síly



z $\quad Ax - b + B^T\lambda = 0$ a $\quad Bx = c \quad$ plyne

$$BA^{-1}(Ax - b + B^T\lambda) = 0$$

$$c - BA^{-1}b + BA^{-1}B^T\lambda = 0 \quad \text{silová metoda}$$

$$\theta(\lambda) = -(\frac{1}{2}\lambda^T BA^{-1}B^T\lambda - (c - BA^{-1}b))$$

Princip maxima komplementární energie:

$$\boxed{\theta(\hat{\lambda}) \geq \theta(\lambda)}$$

Dualita

Pro $x \in \Omega$

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T (Bx - c)$$

$$\nabla L(x,\lambda) = Ax - b + B^T \lambda$$

z $Ax - b + B^T \lambda = 0$ plyne

$$x = A^{-1}\left(b - B^T \lambda\right)$$

$$\theta(\lambda) == \min_x L(x,\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^T BA^{-1}B^T \lambda - (c - BA^{-1}b)^T \lambda$$

$$\nabla \theta(\lambda) = -BA^{-1}B^T \lambda - (c - BA^{-1}b)$$

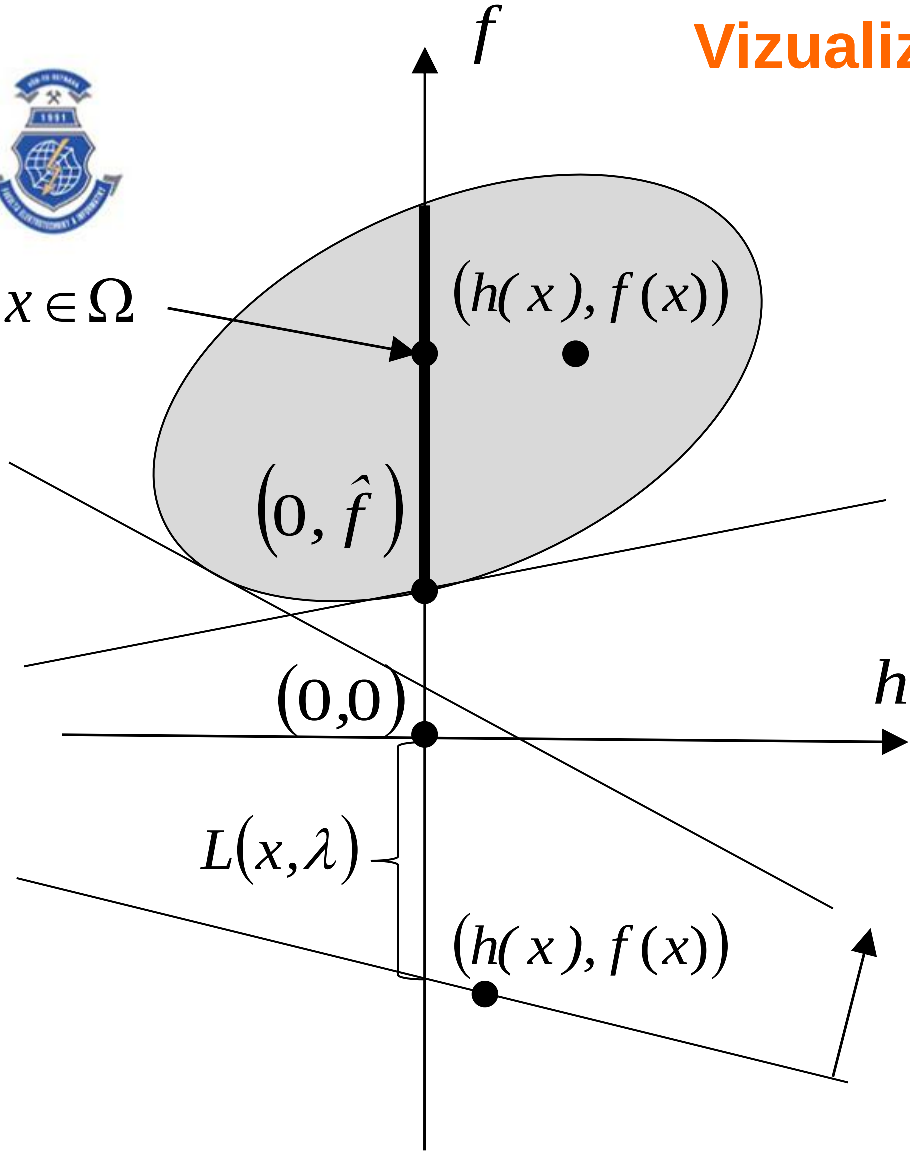
$$B^T \lambda = b - Ax \quad \Rightarrow \quad \nabla \theta(\lambda) = -BA^{-1}\left(b - Ax\right) - (c - BA^{-1}b) = Bx - c = 0$$

Duální úloha:

$\hat{\lambda} \in R^m$ je Lagrangeův multiplikátor právě když

$$\theta(\hat{\lambda}) \geq \theta(\lambda) \qquad \text{(D)}$$

Vizualizace



$$p \equiv \{(h, f): f + \lambda h = L(x,\lambda)\}$$

$$n^T (h - h(x), f - f(x)) = 0$$

$$n = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$$

Úloha kvadratického programování s omezením <=

$$f(x)=\frac{1}{2}x^T Ax-b^T x,\quad A\in R^{n\times n},\quad A=A^T$$

$$\Omega=\{x : Bx\le c\}$$

$$f(x)\ \rightarrow\ \min\ \text{pro}\ x\in\Omega \qquad \text{(P)}$$

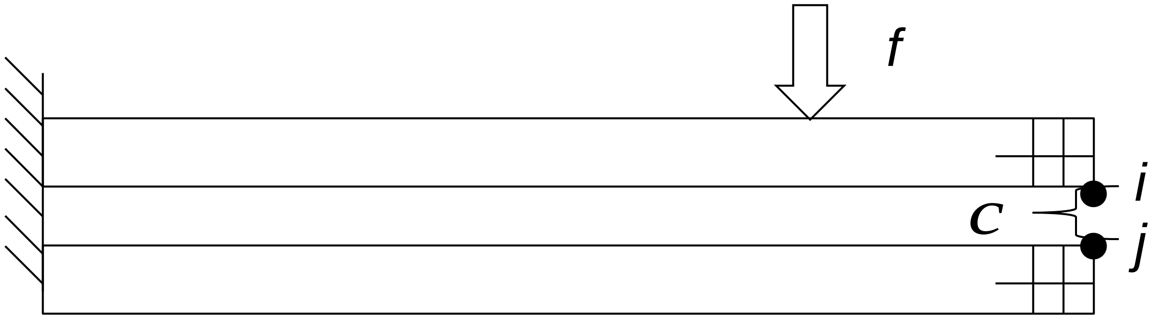
Hodnota minima *nemůže* vz*růst* po narušení vazby:

$$[B\hat{x}-c]_i=u_i \quad \text{a} \quad u_i>0\ \Rightarrow -\lambda_i u_i\le 0,\ \text{t.j. } \lambda_i\ge 0$$

Podmínka minima (KKT):

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\hat{x})\le f(x)\ \text{ právě když existuje } \hat{\lambda} \text{ tak, že} \\ A\hat{x}-b+B^T\hat{\lambda}=0,\quad \hat{\lambda}\ge o,\quad (Bx-c)^T\lambda=0 \end{array}}$$

Diskretizované podmínky rovnováhy - posunutí



$Au = b, \quad u$ je uzlové posunutí, A matice tuhosti

$f(u) = \frac{1}{2} u^T A u - b^T u, \quad$ energetický funkcionál

$u \le c \quad \Leftrightarrow \quad [\quad 1 \quad -1 \quad] u = Bu \le c$

Princip minima potenciální energie:

$$\boxed{A\hat{u} - b + B^T \lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\hat{u}) \le f(u) \text{ pro } Bu \le c}$$

Diskretizované podmínky rovnováhy - síly

z $\nabla_x L(x,\lambda) = Ax - b + B^T\lambda = 0$ plyne

$$x = A^{-1}b - A^{-1}B^T\lambda = \arg\min_x L(x,\lambda)$$

$$B\hat{x} - c = -BA^{-1}B^T\hat{\lambda} + BA^{-1}b - c \le 0, \quad \hat{\lambda} \ge o$$

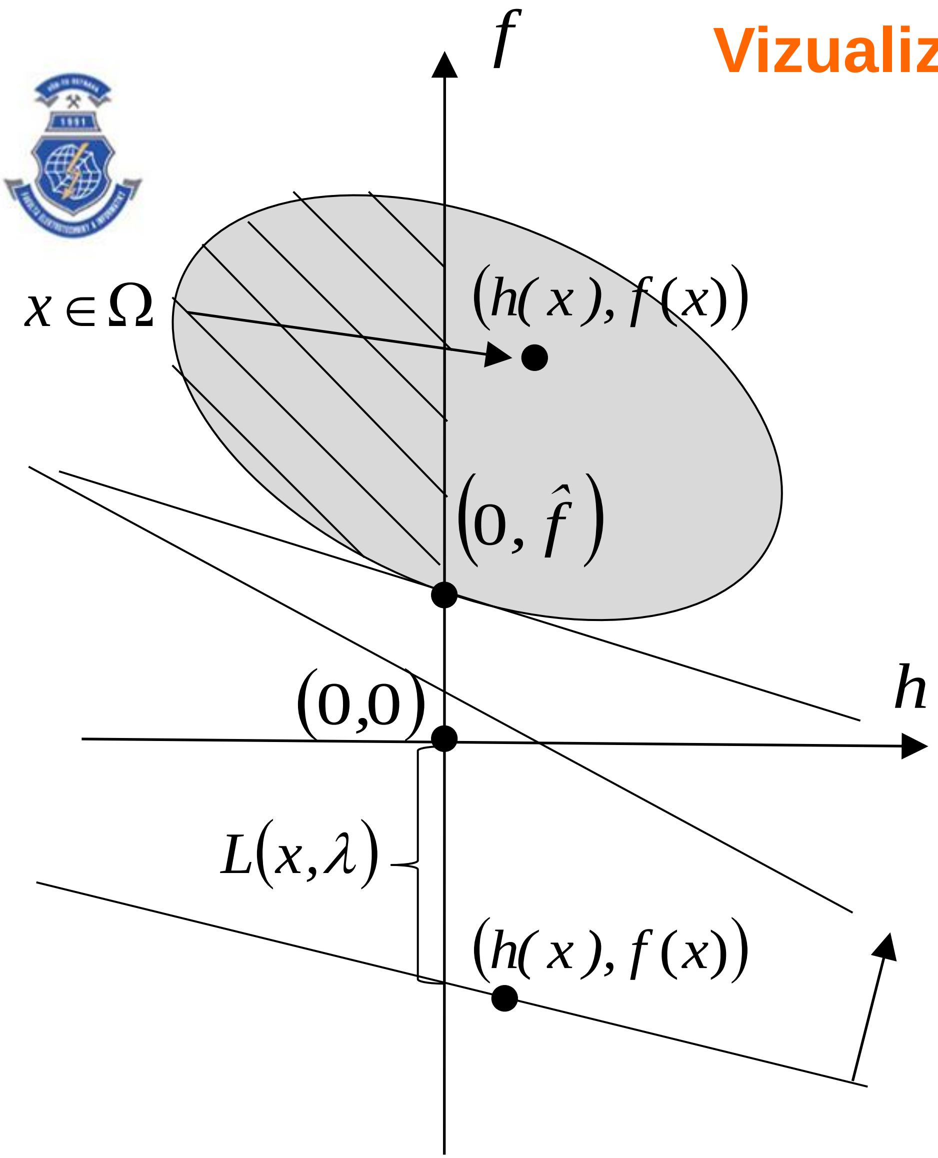
$$\theta(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda^T BA^{-1}B^T\lambda - (c - BA^{-1}b)$$

$$\nabla\theta(\hat{\lambda}) = -BA^{-1}B^T\hat{\lambda} + BA^{-1}b - c \le o, \quad \hat{\lambda} \ge o$$

Princip maxima komplementární energie:

$$\boxed{\theta(\hat{\lambda}) \ge \theta(\lambda) \text{ pro } \lambda \ge \mathrm{o}}$$

Vizualizace



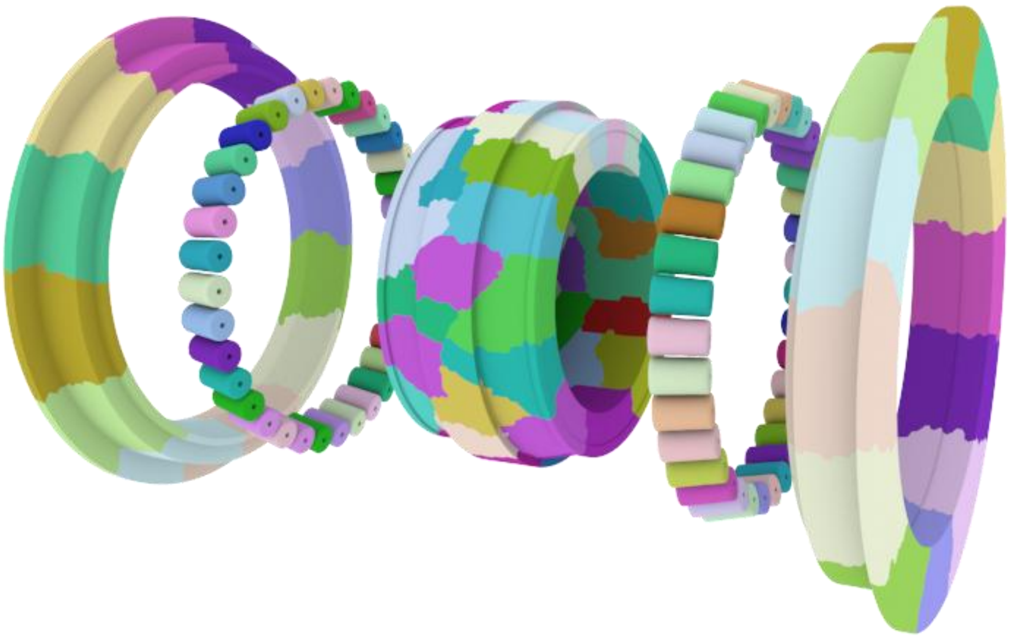
$$p \equiv \{(h, f): f + \lambda h = L(x,\lambda)\}$$

$$n^T (h - h(x), f - f(x)) = 0$$

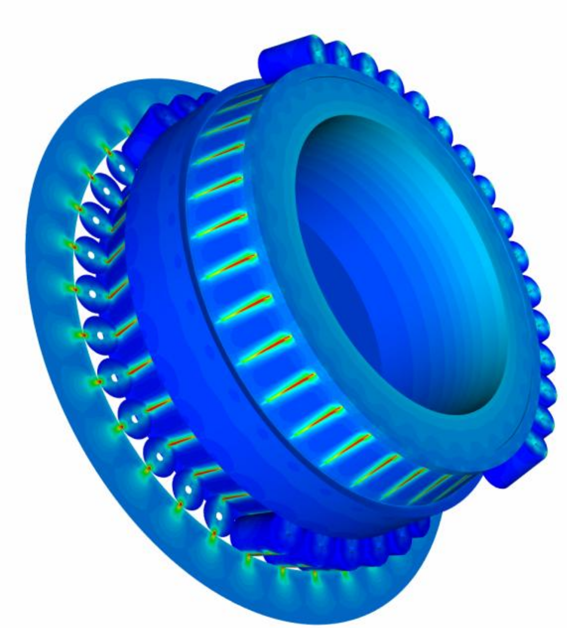
$$n = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \geq o$$

$-\lambda$ je směrnice přímky procházející bodem $(h(x), f(x))$

Decomposition and solution of roler bearing of wind generator



Bodies	73
Subdomains	700
Primal variables	2,73 M
Dual variables	459,8 k
Iterations	4270



s T.K., A.M, T.B, V.V., J.B., M.S., D.H., M.J., O.V., D.L., P.V., …

Závěr

- Stojí za to pochopit pojem duality
- Dualita mění obecné nerovnosti na jednoduché – zásadní význam v numerických algoritmech
- Ve FETI metodách redukuje problémy na hranice podoblastí
- Vzniká při tom spousta zajímavých problémů
- KAM k tomu přispěla
- Je smlouva na knihu ve Springeru