Zajímavé pohledy na Laplaceovu rovnici, Dirichletovu úlohu a další podobné problémy

Petr Girg

23. března 2011

Laplaceova a Poissonova rovnice

Laplaceova rovnice

$$\Delta u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0 \tag{1}$$

Poissonova rovnice

$$\Delta u = f \tag{2}$$

Laplaceova a Poissonova rovnice

Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{3}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{4}$$

Co je to řešení Dirichletovy úlohy?

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{5}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{6}$$

V knize Gilbarga a Trudingera najdeme:

Co je to řešení Dirichletovy úlohy?

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{5}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{6}$$

V knize Gilbarga a Trudingera najdeme:

- "klasické",

Co je to řešení Dirichletovy úlohy?

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{5}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{6}$$

V knize Gilbarga a Trudingera najdeme:

- "klasické",
- ve smyslu Schauderovy teorie v Hölderových prostorech,

Co je to řešení Dirichletovy úlohy?

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{5}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{6}$$

V knize Gilbarga a Trudingera najdeme:

- "klasické",
- ve smyslu Schauderovy teorie v Hölderových prostorech,
- ve smyslu teorie Calderona a Zygmunda,

Co je to řešení Dirichletovy úlohy?

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{5}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{6}$$

V knize Gilbarga a Trudingera najdeme:

- "klasické",
- ve smyslu Schauderovy teorie v Hölderových prostorech,
- ve smyslu teorie Calderona a Zygmunda,
- slabé řešení,

Co je to řešení Dirichletovy úlohy?

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{5}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{6}$$

V knize Gilbarga a Trudingera najdeme:

- "klasické",
- ve smyslu Schauderovy teorie v Hölderových prostorech,
- ve smyslu teorie Calderona a Zygmunda,
- slabé řešení,
- ve smyslu distribucí.

Co je to řešení Dirichletovy úlohy?

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{5}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{6}$$

V knize Gilbarga a Trudingera najdeme:

- "klasické",
- ve smyslu Schauderovy teorie v Hölderových prostorech,
- ve smyslu teorie Calderona a Zygmunda,
- slabé řešení,
- ve smyslu distribucí.
- A co jsme to vlastně chtěli původně?

1. Klasické řešení

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ splňující rovnici i okrajovou podmínku v každém bodě.

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{7}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{8}$$

1. Klasické řešení

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ splňující rovnici i okrajovou podmínku v každém bodě.

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{7}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{8}$$

- Výhody
  - snadná formulace toho, co hledáme.

1. Klasické řešení

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ splňující rovnici i okrajovou podmínku v každém bodě.

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{7}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{8}$$

- Výhody
  - snadná formulace toho, co hledáme.
- Nevýhody
  - nedá se v podstatě najít pro $f \neq 0$.

Nevyzpytatelnost Dirichletovy úlohy pro $f \neq 0$

V případě obyčejné diferenciální rovnice má úloha:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}(x) &= f(x) \quad \text{pro } 0 < x < 1 \\ u(0) = \quad 0 &= u(1) \end{aligned} \tag{9}$$

pro každou funkci $f \in C(0,1)$ řešení $u \in C^2(0,1)$.

Nevyzpytatelnost Dirichletovy úlohy pro $f \neq 0$

V případě obyčejné diferenciální rovnice má úloha:

$$\begin{array}{rcl} \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}(x) & = & f(x) \quad \text{pro } 0 < x < 1 \\ u(0) = & 0 & = u(1) \end{array} \tag{10}$$

pro každou funkci $f \in C(0,1)$ řešení $u \in C^2(0,1)$:

$$u(x) = \int_0^x \int_0^s f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s - \int_0^1 \int_0^s f(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\,.$$

Nevyzpytatelnost Dirichletovy úlohy pro $f \neq 0$

Pro *spojitou* funkci

$$f(x,y) = -\frac{(x^2-y^2)\left(-4\ln\left(x^2+y^2\right)+1+\ln(256)\right)}{4\sqrt{2}\,(x^2+y^2)\left(\ln(4)-\ln\left(x^2+y^2\right)\right)^{3/2}},$$

pro $x, y \neq 0$ a $f(0,0) = 0$ nemá Dirichletovy úloha

$$\begin{aligned} -\Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{pro } 0 \leq x^2+y^2 < 0 \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{pro } x^2+y^2 = 1 \end{aligned} \tag{11}$$

klasické řešení, tj. neexistuje $u \in C^2(B(0,1)) \cap C_0(\overline{B(0,1)})$ splňující rovnici v každém bodě koule $B = \{(x,y) : 0 \leq x^2+y^2 < 0\}$ a $u(x,y) = 0$ pro každý bod $(x,y) : x^2+y^2 = 1$.

Nevyzpytatelnost Dirichletovy úlohy pro $f \neq 0$

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{pro } 0 \leq x^2 + y^2 < 0 \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{pro } x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Funkce

$$u(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)\left(\sqrt{-\ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}\right)} - \sqrt{\ln(2)}\right)$$

splňuje uvedenou rovnici v každém bodě kromě počátku, splňuje okrajovou podmínku v každém bodě, ale není třídy $C^2(\Omega)$ protože např. ...

...

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{2}\sqrt{-\log\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}}\right)} -$$

$$\frac{\sqrt{\log(2)-\frac{1}{2}\log\left(x^2+y^2\right)}\left(x^2\left(x^2+y^2\right)+2\left(3x^4+6x^2y^2-y^4\right)\log\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)}{16\left(x^2+y^2\right)^2\log^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)} - \frac{\sqrt{\log(2)}}{2}$$

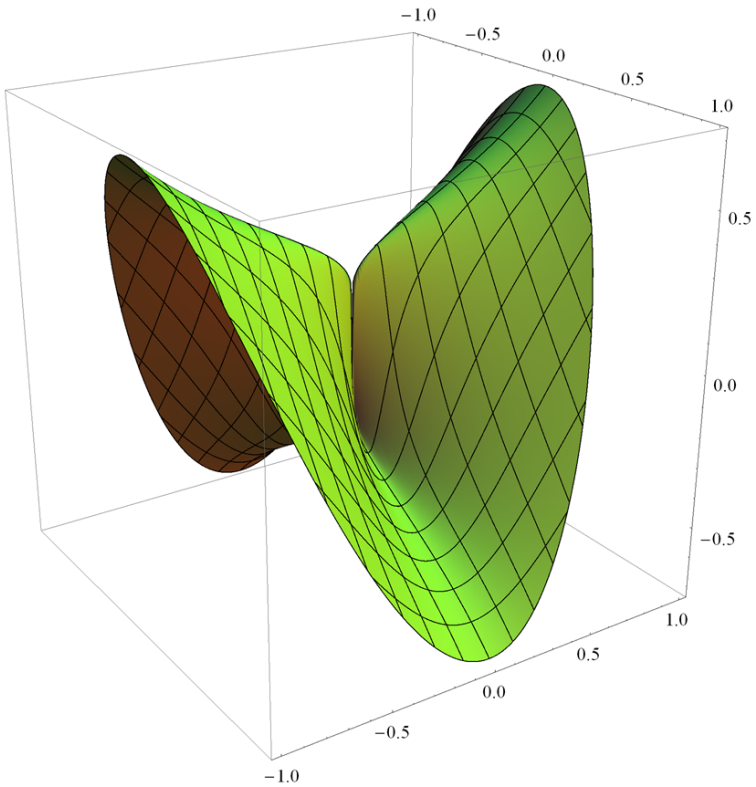
Nevyzpytatelnost Dirichletovy úlohy pro $f \neq 0$

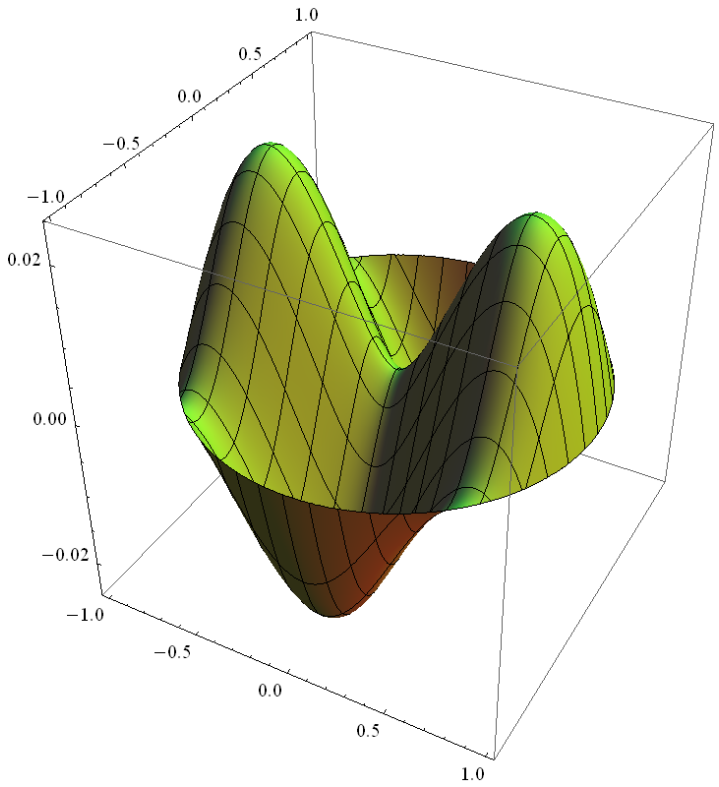
$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= f(x,y) \quad \text{pro } 0 \leq x^2 + y^2 < 0 \\ u(x,y) &= 0 \quad \text{pro } x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \tag{13}$$

Funkce

$$u(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}\right)\left(\sqrt{-\ln\left(\sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4}}\right)} - \sqrt{\ln(2)}\right)$$

je navíc jediným řešením ve smyslu distribucí uvedené okrajové úlohy. Protože každé klasické řešení by bylo zároveň řešením ve smyslu distribucí, nemůže mít uvedená rovnice klasciké řešení.





Obrázek: Spojitá pravá strana f rovnice a řešení rovnice, které není C^2.

Schauderova teorie

Předchozí problém odstraňuje až Schauderova teorie.

Schauderova teorie

Nechť má oblast Ω hranici třídy $C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $g \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ potom má úloha

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{14}$$

$$u = g \quad \text{na } \partial\Omega \tag{15}$$

jediné řešení $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Navíc platí

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K(\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})})$$

Důkaz je založen na teorii potenciálu a Schauderových odhadech.

Schauderova teorie

Důkaz je založen na Greenově reprezentaci:

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}S + \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u \mathrm{d}x \,, \; y \in \Omega$$

a studiu hladkosti Newtonova potenciálu:

$$w(x) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

kde

$$\Gamma(x-y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{n(1-n)\omega_n} |x-y|^{2-n} \,, & n > 2 \\ \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x-y| \,, & n = 2 \end{cases} \tag{16}$$

a ω_n je povrch n-rozměrné koule.

Schauderova teorie

Nevýhoda Schauderovy teorie - potřebuje data "mezi"spojitostí a hladkostí.

Laplace: Mécanique Céleste, angl. překlad z.r. 1829

the proposed right line, and we must then take the differential of this function relative to that co-ordinate; *the coefficient of this differential, taken with a contrary sign, will be the expression of the attraction of the spheroid, parallel to the proposed line, and directed towards the origin of the co-ordinate to which it is parallel.** [455‴]

If we put

$$\boxed{\beta = \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}};} \qquad [455^{iv}]$$

we shall have

$$\boxed{V = \int \beta \,.\, \rho \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz'.} \qquad [456]$$

The integration referring only to x', y', z', it is evident that we shall have†

$$\left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dz^2}\right) = \int \rho \,.\, dx' \,.\, dy' \,.\, dz' \,.\, \left\{ \left(\frac{dd\beta}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\beta}{dy^2}\right) + \left(\frac{dd\beta}{dz^2}\right) \right\}. \qquad [457]$$

But we have‡

$$0 = \left(\frac{dd\beta}{dx^2}\right) + \left(\frac{dd\beta}{dy^2}\right) + \left(\frac{dd\beta}{dz^2}\right); \qquad [458]$$

Laplaceova rovnice v původním zápise

therefore we shall have

[459] Important Equation for computing the attractions of Spheroids and the figures of the Heavenly Bodies.

$$\boxed{0 = \left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddV}{dz^2}\right).} \qquad (A)$$

This remarkable equation will be of the greatest use to us, in the theory of the figures of the heavenly bodies. We may put it under other forms which are more convenient on several occasions. For example, suppose we draw from the origin of the co-ordinates to the attracted point, a radius which we shall call r; let θ be the angle which this radius makes with the axis of x, and ϖ the angle which the plane formed by r and by this axis, makes with the plane of x and y;* we shall have

[459′]

[460] $$x = r \,.\, \cos.\, \theta\,; \qquad y = r \,.\, \sin.\, \theta \,.\, \cos.\, \varpi\,; \qquad z = r \,.\, \sin.\, \theta \,.\, \sin.\, \varpi\,;$$

Laplaceova rovnice, řešení ve sférických souřadnicích

[466]
$$0 = \left\{ \frac{d \cdot \left\{ (1-\mu^2) \cdot \left(\frac{dV}{d\mu} \right) \right\}}{d\mu} \right\} + \frac{\left(\frac{ddV}{d\varpi^2} \right)}{1-\mu^2} + r \cdot \left(\frac{d\,d \cdot rV}{dr^2} \right). \qquad (C)$$

12. Suppose now that the spheroid is a spherical stratum, whose centre is at the origin of the co-ordinates; it is evident that V will depend solely on r, and will not contain either μ or ϖ; the equation (C) [466] will then become

Attraction of Spheres.

[466′]

[467]
$$0 = \left(\frac{d\,d \cdot rV}{dr^2} \right);$$

whence by integration*

[468]
$$V = A + \frac{B}{r},$$

A and B being two arbitrary constant quantities. Hence we shall have

[469]
$$-\left(\frac{dV}{dr} \right) = \frac{B}{r^2}.$$

[469′] $-\left(\frac{dV}{dr} \right)$ expresses, by what has been said [455‴], the action of the spherical stratum upon the point m, resolved in the direction of the radius r, and tending towards the centre of the stratum; now it is evident that the whole action of the stratum must be in that direction;† therefore

Calderonova-Zygmundova teorie (L^p-teorie)

Za řešení považujeme funkci $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, splňující rovnici ve skoro všech bodech pro pravou strana $f \in L^p(\Omega)$ a splňujíci okrajovou podmínku pro $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$ (v jistém zobecněném smyslu):

$$\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{17}$$

$$u = \varphi \quad \text{na } \partial\Omega \tag{18}$$

Calderonova-Zygmundova teorie (L^p-teorie)

Také založena na Greenově reprezentaci u a studiu vlastností Newtonova potenciálu:

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) \mathrm{d}y$$

kde

$$\Gamma(x-y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \frac{1}{n(1-n)\omega_n} |x-y|^{2-n}, & n > 2 \\ \\ \frac{1}{2\pi} \ln |x-y|, & n = 2 \end{cases} \tag{19}$$

a ω_n je povrch n-rozměrné koule.

Caldeonova-Zygmundova teorie (L^p-teorie)

Nechť oblast Ω je třídy $C^{1,1}$, nechť dále $f \in L^p(\Omega)$ a $\varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < +\infty$, potom existuje právě jedno $u \in W^{2,p}(\Omega)$ takové, že $\Delta u = f$ skoro všude a $u - \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dirichletův princip (1851)

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 \quad \text{v } \Omega && (20)\\
u &= \varphi \quad \text{na } \partial\Omega\,, && (21)
\end{aligned}
$$

$$\min \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

Uvažují se funkce spojité na $\overline{\Omega}$, počástech hladké v Ω, nabývající hodnot ϕ na hranici.

Dirichletův princip - Weierstrassova kritika (1869)

$$\min \int_\Omega \left(1 + u'(x)^2\right)^{1/4} \mathrm{d}x$$

$$u(0) = 1\,, \quad u(1) = 0$$

Slabá řešení

Hledáme funkci $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ splňující následující integrální identitu

$$\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \psi \mathrm{d}x = \int_\Omega f \psi \mathrm{d}x - \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \mathrm{d}x \quad \forall \psi \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

Slabé řešení úlohy

$$-\Delta u = f \quad \text{v } \Omega \tag{22}$$

$$u = \varphi \quad \text{na } \partial\Omega\,, \tag{23}$$

kde $f \in L^2(\Omega)$ a $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$, je pak $u = v + \varphi$.

Slabé řešení, které není omezené

Nechť $N = 3$, $x \in \mathbb{R}^N$. Funkce $u(x) = u(|x|) = \ln |x|$ je slabé řešení Dirichletovy úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= -1/|x|^2 \qquad \text{for } x \in B_1(0)\,; \\ u &= 0 \qquad\qquad\quad \text{on } x \in \partial B_1(0)\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Numerical Analysis vs. Mathematics

Modern mathematics often does not deal with the practical problems which face numerical analysis.

R. W. Hamming

DOES ANYONE BELIEVE THAT THE DIFFERENCE BETWEEN THE LEBESGUE AND RIEMANN INTEGRALS CAN HAVE PHYSICAL SIGNIFICANCE AND WHETHER SAY, AN AIRPLANE WOULD OR WOULD NOT FLY COULD DEPEND ON THIS DIFFERENCE?

compute thing
ence theorem t
As a third e
I announce th
which ones I
certain proper
would quite ju
But if in num
method which
always know
tion to a dif
likely to be
advance.

mathematicians
atical numerical
much the subje
fiel f adjustm
d case of the market
not significantly greater than
for the two points. Of course,
ion by repeated guessing is also
asy in practice. The theorem is
ly an artifact of a small detail of
postulate.

Let me cite another example of the irrelevance of some mathematical results of practical applications. The Riemann integral exists for functions which are continuous except for, say, having 10^{78} discontinuities. Does anyone believe that the difference between the Lebesgue and Riemann integrals can have physical significance, that whether, say, an airplane would or would not fly could depend on this difference? If such were claimed I should not care to fly in that plane!

Since I am apt to be misunderstood

led a
metho
Gen
tory of
the real
straction
formul
etry, a
validated
early m
classical
(though
servation
difficult
observati
current
verified c
one ca
modern

at I was
ing d test of
that ine what
to have
extremely
times-re-
d me to
as often
examina-
ethods it

just as there are still many mathematicians writing about mathematical

The author is head of the Numerical Methods Research Department of Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N.J. This article was originally presented as the vice-presidential address to the Mathematics Section (A) at the AAAS meeting, Montreal, 29 December 1964.

Kámen, nůžky, papír

Je slabé řešení obecnější než klasické?

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{pro } 0 \leq x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad \text{pro } x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \tag{25}$$

$$g(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^3 \phi)/k^2$$

Kámen, nůžky, papír

Řešení úlohy

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 \quad \text{pro } 0 \leq x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) &= g(x,y) \quad \text{pro } x^2 + y^2 = 1 \end{aligned} \tag{26}$$

$$g(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^3 \phi)/k^2$$

lze vyjádřit ve tvaru nekonečné řady:

$$u(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{(n^3)} \cos(n^3 \phi)/k^2 \text{pro } 0 \leq r \leq 1$$

Kámen, nůžky, papír

Řešení úlohy

$$g(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k^3\phi)/k^2$$

Pro $0 \leq r < 1$ lze řadu

$$u(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{(k^3)} \cos(k^3\phi)/k^2$$

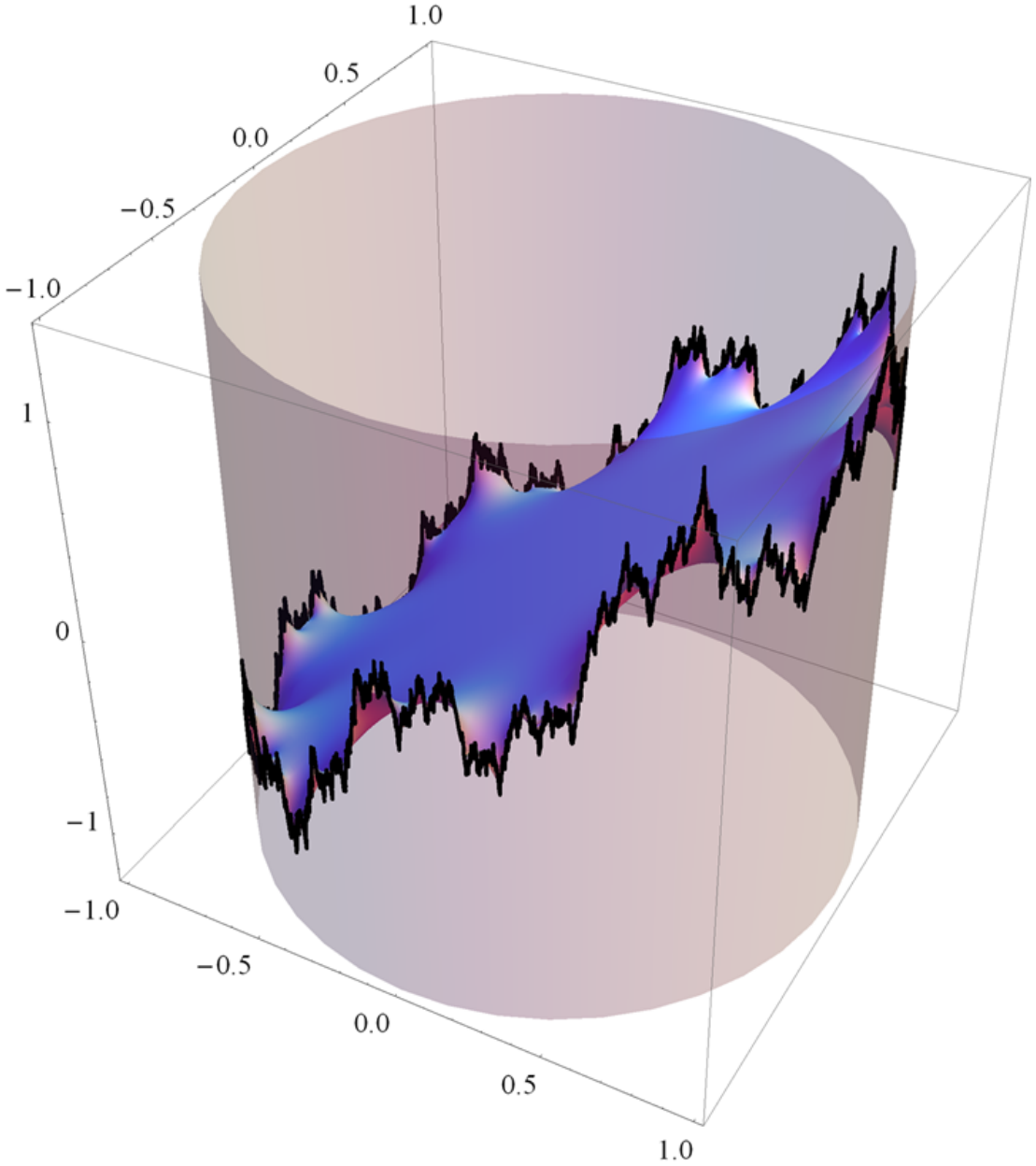
derivovat člen po členu a ověřit, že splňuje rovnici

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{pro } 0 \leq x^2 + y^2 < 0\,. \tag{27}$$

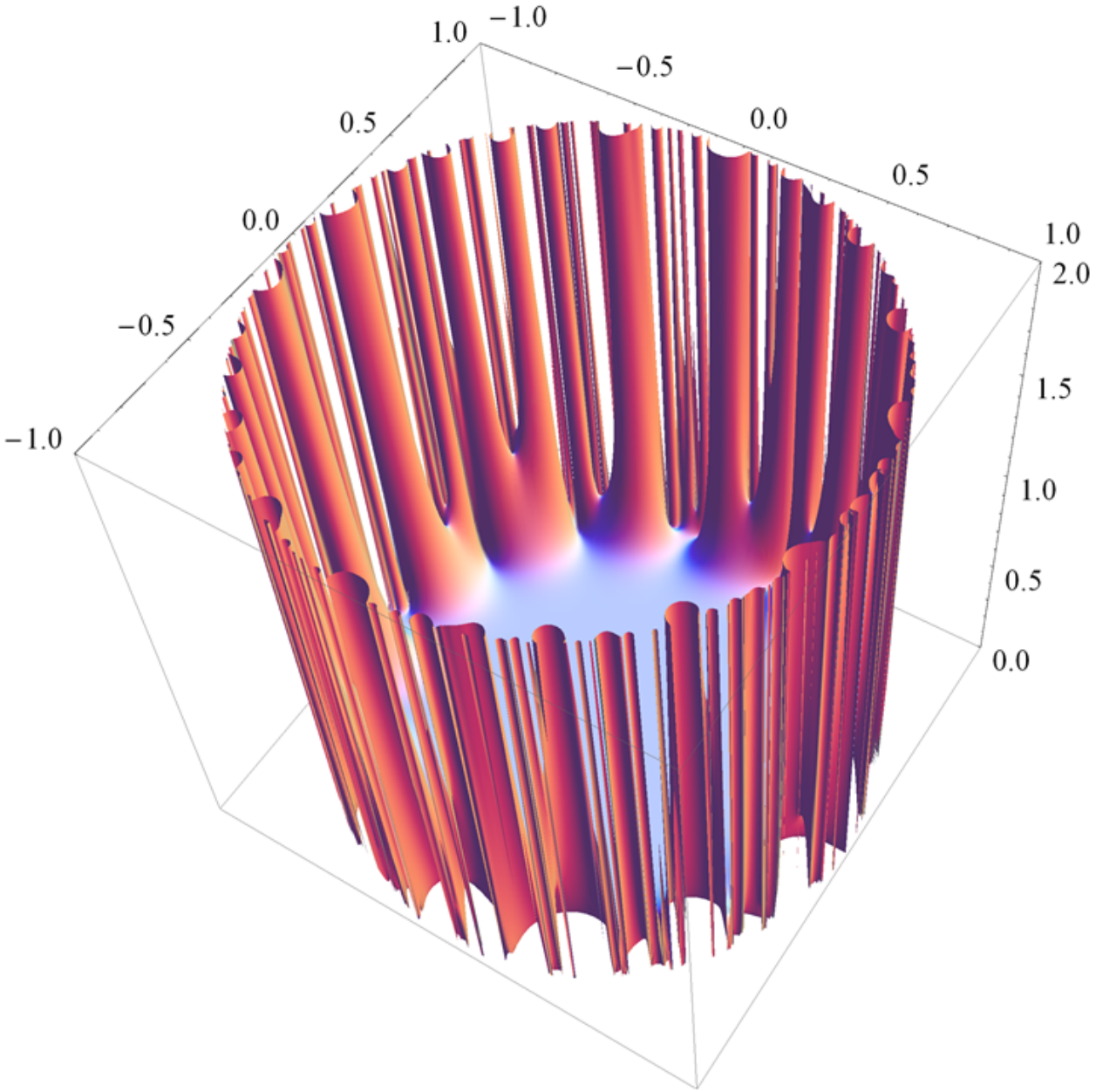
Díky omezenosti $r^{(n^3)} \cos(n^3\phi)$ pro $0 \leq r \leq 1$ řada konverguje absolutně a stejnoměrně, tudíž funkce u je spojitá na uzavřeném kruhu

$$0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$$

.



Obrázek: $u(x, y)$



Obrázek: $\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)^2$

Kámen, nůžky, papír

Věta z knížky [Chabrowski, The Dirichlet Problem with L^2 Boundary Data for Elliptic Equations].

Funkce $h(x, y) = h(\phi)$, $\phi \in (0, 2\pi)$, definovaná na jednotkovém kruhu je stopou funkce z $W^{1,2}(B(0,1))$ právě tehdy, když její Fourierovy koeficienty a_n, b_n splňují

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2) < +\infty \,.$$