Extremální úlohy v geometrii

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

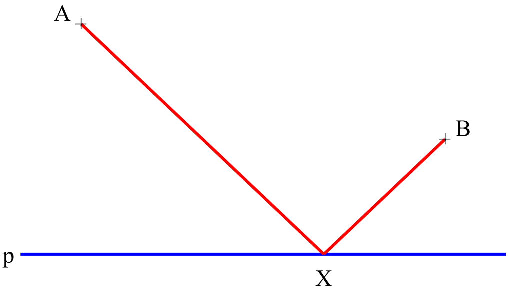
11.4. 2013

Katedra
aplikované
matematiky

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad (Hérónova úloha)

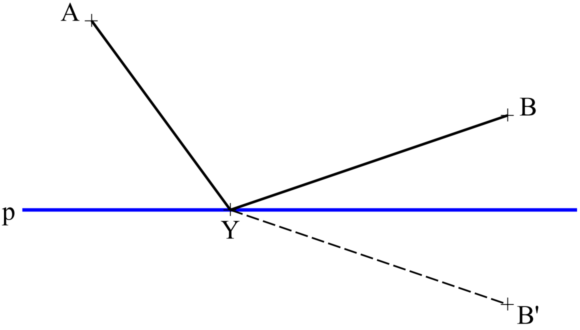
Nechť A, B jsou různé body ležící ve stejné polorovině vyťaté přímkou p. Najděte bod $X \in p$ tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.



Příklad (Hérónova úloha)

Nechť A, B jsou různé body ležící ve stejné polorovině vyťaté přímkou p. Najděte bod $X \in p$ tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.

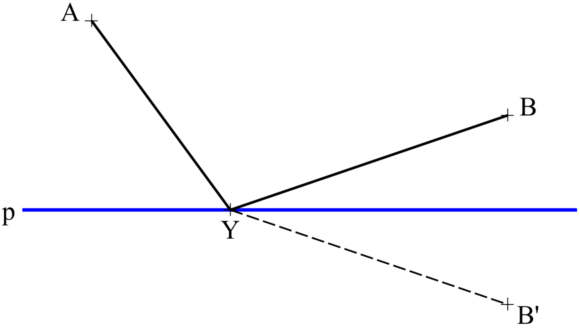
Nechť $Y \in p$ je libovolný bod. Nyní sestrojíme bod B' jako obraz bodu B v osové souměrnosti s osou p.



Příklad (Hérónova úloha)

Nechť A, B jsou různé body ležící ve stejné polorovině vyťaté přímkou p. Najděte bod $X \in p$ tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.

Nechť $Y \in p$ je libovolný bod. Nyní sestrojíme bod B' jako obraz bodu B v osové souměrnosti s osou p.

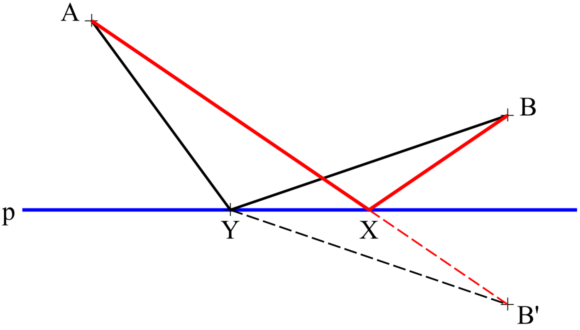


Jistě platí $|AY| + |BY| = |AY| + |YB'|$.

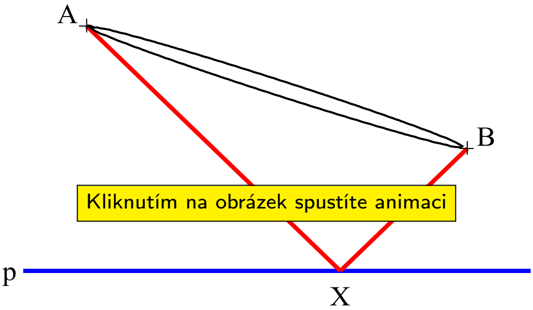
Příklad (Hérónova úloha)

Nechť A, B jsou různé body ležící ve stejné polorovině vyťaté přímkou p. Najděte bod $X \in p$ tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.

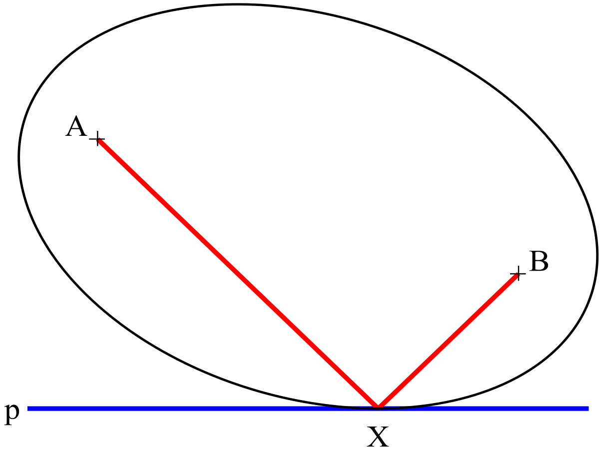
Nechť $Y \in p$ je libovolný bod. Nyní sestrojíme bod B' jako obraz bodu B v osové souměrnosti s osou p.



Jistě platí $|AY| + |BY| = |AY| + |YB'|$. Není tedy těžké si uvědomit, že hledaný bod X dostaneme jako průsečík přímek p a AB'.

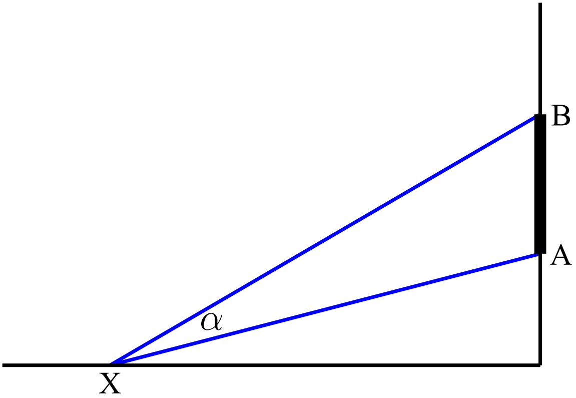


Kliknutím na obrázek spustíte animaci

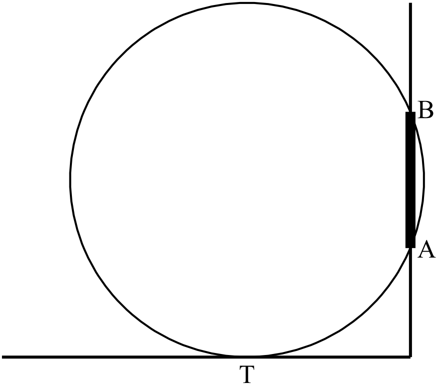

A
B
p
X

Příklad

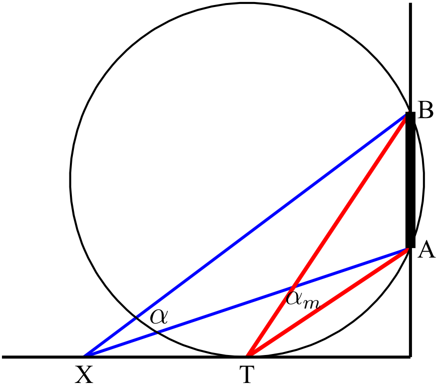
Na zdi je zavěšen obraz. Jeho spodní okraj A se nachází a délkových jednotek nad úrovní očí a jeho horní okraj B se nachází b délkových jednotek nad úrovní očí. Určete, z jaké vzdálenosti je obraz vidět pod největším zorným úhlem.



Řešení je založeno na rozboru následujícího obrázku.

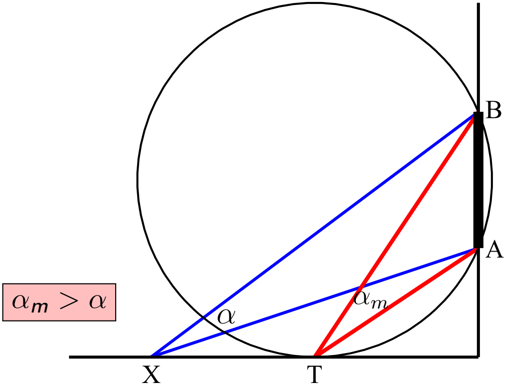


Řešení je založeno na rozboru následujícího obrázku.



Vezmeme-li v úvahu znalosti o obvodových a středových úhlech, dostaneme, že optimální je pozorovat obraz z bodu T (bod dotyku). Z tohoto bodu bude obraz vidět pod největším zorným úhlem. Vzdálenost bodu T od zdi je možné dopočítat např. pomocí mocnosti bodu ke kružnici.

Řešení je založeno na rozboru následujícího obrázku.



Vezmeme-li v úvahu znalosti o obvodových a středových úhlech, dostaneme, že optimální je pozorovat obraz z bodu T (bod dotyku). Z tohoto bodu bude obraz vidět pod největším zorným úhlem. Vzdálenost bodu T od zdi je možné dopočítat např. pomocí mocnosti bodu ke kružnici.

Poznámka (Analytické řešení)

Označme x naši vzdálenost od zdi a α úhel, pod kterým vidíme obraz.
Z goniometrických vzorců je možné odvodit, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

Poznámka (Analytické řešení)

Označme x naši vzdálenost od zdi a α úhel, pod kterým vidíme obraz. Z goniometrických vzorců je možné odvodit, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

Nyní použijme na jmenovatele elementární nerovnost $p^2 + q^2 \geq 2pq$. Poznamenejme, že v této nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když platí $p = q$.

Poznámka (Analytické řešení)

Označme x naši vzdálenost od zdi a α úhel, pod kterým vidíme obraz. Z goniometrických vzorců je možné odvodit, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{b}{x} - \frac{a}{x}}{1 + \frac{b}{x} \cdot \frac{a}{x}} = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab}.$$

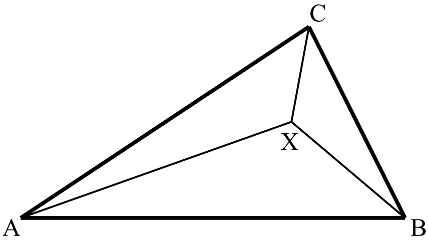
Nyní použijme na jmenovatele elementární nerovnost $p^2 + q^2 \geq 2pq$. Poznamenejme, že v této nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když platí $p = q$. Celkem tedy dostáváme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x(b-a)}{x^2 + ab} = \frac{x(b-a)}{x^2 + (\sqrt{ab})^2} \leq \frac{x(b-a)}{2x\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x = \sqrt{ab}$, což je vzdálenost, pro kterou je $\operatorname{tg}\alpha$ (a tedy i samotné α) maximální.

Příklad

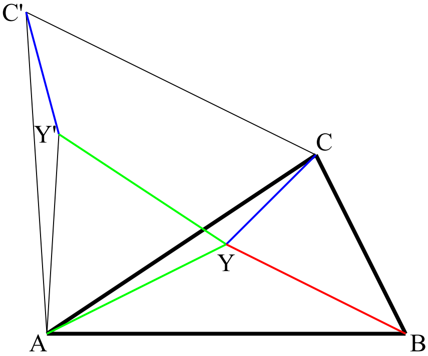
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX| + |BX| + |CX|$ minimální.



Příklad

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX| + |BX| + |CX|$ minimální.

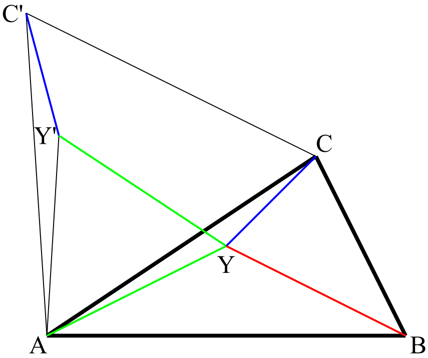
Nechť Y je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Použijeme otočení kolem bodu A o 60 stupňů proti směru hodinových ručiček.



Příklad

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX| + |BX| + |CX|$ minimální.

Nechť Y je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Použijeme otočení kolem bodu A o 60 stupňů proti směru hodinových ručiček.

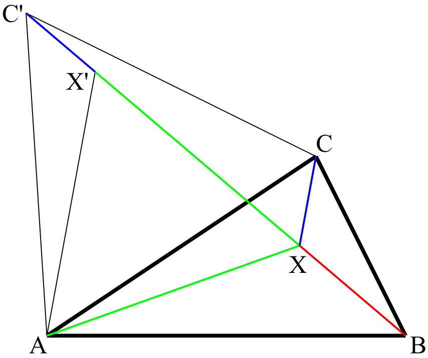


Jistě $|C'Y'| = |CY|$, $|Y'Y| = |AY|$, a tedy
$|AY| + |BY| + |CY| = |C'Y'| + |Y'Y| + |YB|$.

Příklad

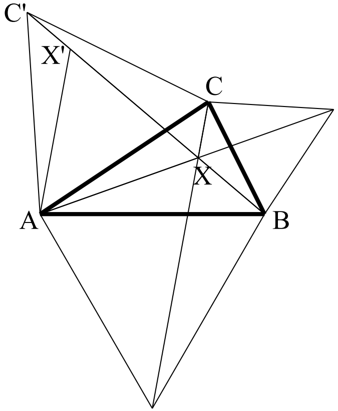
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX| + |BX| + |CX|$ minimální.

Nechť Y je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Použijeme otočení kolem bodu A o 60 stupňů proti směru hodinových ručiček.

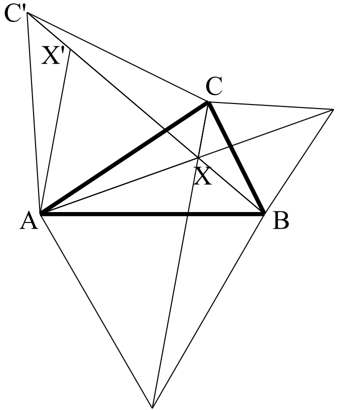


Jistě $|C'Y'| = |CY|$, $|Y'Y| = |AY|$, a tedy
$|AY| + |BY| + |CY| = |C'Y'| + |Y'Y| + |YB|$.

Vzhledem k symetrii úlohy si není obtížné uvědomit, že bod X, který hledáme, sestrojíme podle následujícího obrázku.



Vzhledem k symetrii úlohy si není obtížné uvědomit, že bod X, který hledáme, sestrojíme podle následujícího obrázku.



Poznámka

Bod X se nazývá Torricelliho bod. Pro takovýto bod pak navíc platí $|\angle AXB| = |\angle BXC| = |\angle CXA| = 120^\circ$.

Pokud bychom chtěli úlohu řešit analyticky (např. pro trojúhelník ABC, kde $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (3,2)$), museli bychom hledat minimum funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+y^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2},$$

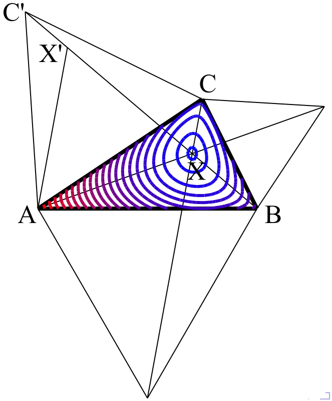
což by bylo komplikované. (Vychází $f_{min} = \sqrt{17+8\sqrt{3}}$.)

Pokud bychom chtěli úlohu řešit analyticky (např. pro trojúhelník ABC, kde $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (3,2)$), museli bychom hledat minimum funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2},$$

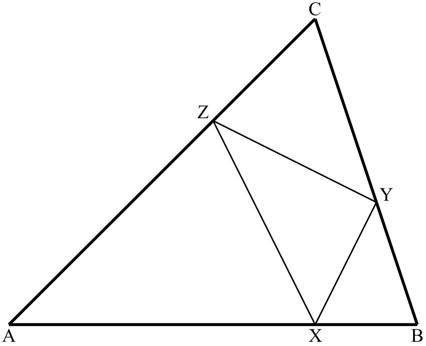
což by bylo komplikované. (Vychází $f_{min} = \sqrt{17 + 8\sqrt{3}}$.)

Pro ilustraci si ukažme vrstevnice funkce f v trojúhelníku ABC.



Příklad (Fermatova úloha)

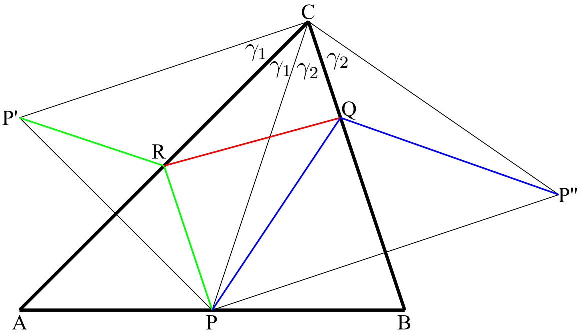
Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř stran AB, BC, AC sestrojte body X, Y, Z tak, aby obvod trojúhelníku XYZ byl minimální.



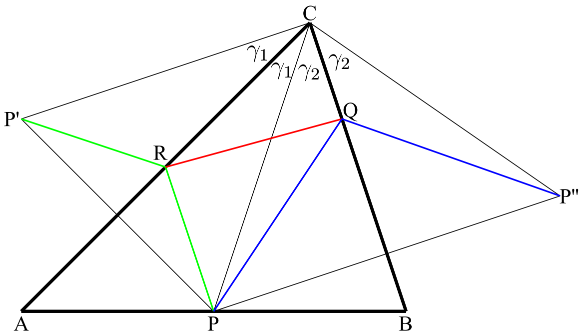
Nejprve na straně AB zvolme (zcela libovolně ale pevně) bod P. K tomuto bodu budeme hledat zbývající dva body tak, aby obvod příslušného trojúhelníku byl minimální.

Nejprve na straně AB zvolme (zcela libovolně ale pevně) bod P. K tomuto bodu budeme hledat zbývající dva body tak, aby obvod příslušného trojúhelníku byl minimální.

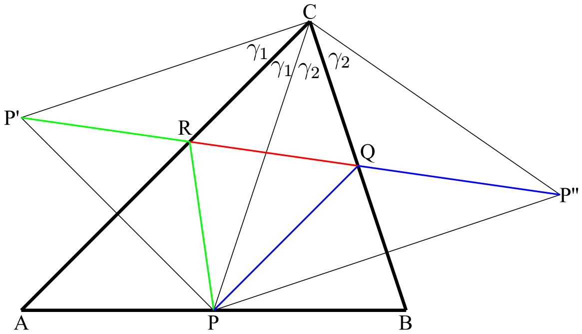
Nechť Q a R jsou libovolné body na zbývajících stranách BC a AC. Dále P' a P'' nechť jsou obrazy bodu P v osových souměrnostech s osami AC a BC.



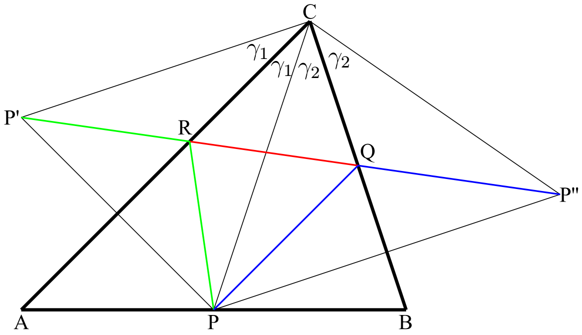
Jistě $|PR| = |P'R|$ a $|PQ| = |P''Q|$, odkud plyne, že $|PQ| + |QR| + |RP| = |P'R| + |RQ| + |QP''|$. Vidíme tedy, že pro dané P je nejlepší volit R a Q tak, aby body P', R, Q a P'' ležely v jedné přímce. Obvod ΔPQR je pak roven velikosti úsečky $P'P''$.



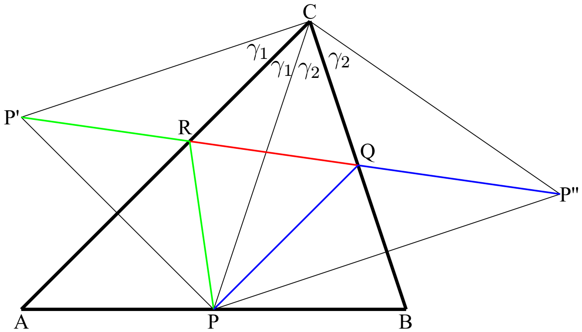
Jistě $|PR| = |P'R|$ a $|PQ| = |P''Q|$, odkud plyne, že $|PQ| + |QR| + |RP| = |P'R| + |RQ| + |QP''|$. Vidíme tedy, že pro dané P je nejlepší volit R a Q tak, aby body P', R, Q a P'' ležely v jedné přímce. Obvod ΔPQR je pak roven velikosti úsečky $P'P''$.



Nyní zbývá ještě stanovit optimální polohu bodu P, tj. najít na straně AB takový bod P, aby velikost úsečky $P'P''$ byla minimální.

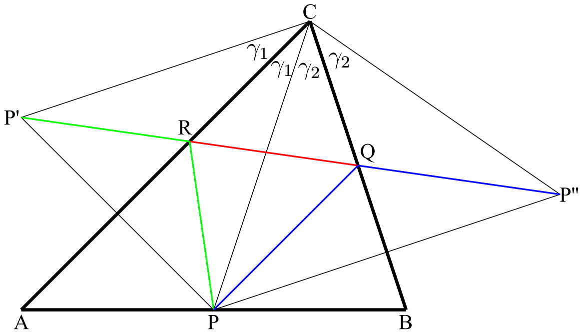


Nyní zbývá ještě stanovit optimální polohu bodu P, tj. najít na straně AB takový bod P, aby velikost úsečky $P'P''$ byla minimální.



Všimněme si, že $|CP'| = |CP| = |CP''|$ a $|\angle P'CP''| = 2 \cdot |\angle ACB|$ (velikost úhlu $P'CP''$ nezávisí na poloze bodu P).

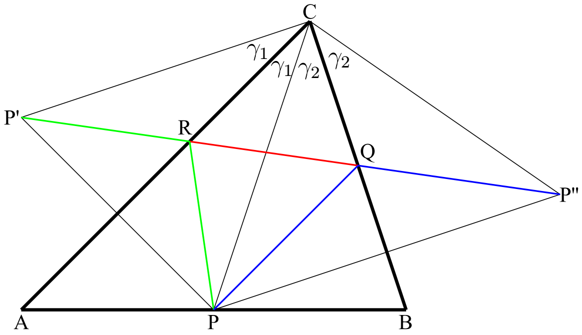
Nyní zbývá ještě stanovit optimální polohu bodu P, tj. najít na straně AB takový bod P, aby velikost úsečky $P'P''$ byla minimální.



Všimněme si, že $|CP'| = |CP| = |CP''|$ a $|\angle P'CP''| = 2 \cdot |\angle ACB|$ (velikost úhlu $P'CP''$ nezávisí na poloze bodu P).

Velikost úsečky $P'P''$ je tedy minimální právě tehdy, když je minimální velikost úsečky CP.

Nyní zbývá ještě stanovit optimální polohu bodu P, tj. najít na straně AB takový bod P, aby velikost úsečky $P'P''$ byla minimální.

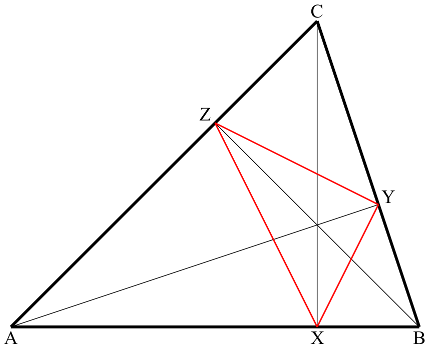


Všimněme si, že $|CP'| = |CP| = |CP''|$ a $|\angle P'CP''| = 2 \cdot |\angle ACB|$ (velikost úhlu $P'CP''$ nezávisí na poloze bodu P).

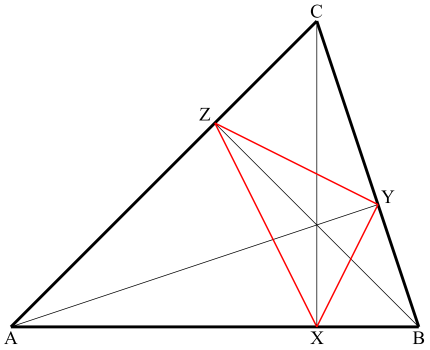
Velikost úsečky $P'P''$ je tedy minimální právě tehdy, když je minimální velikost úsečky CP.

Odtud je patrné, že bod P musíme vzít jako patu výšky.

Vzhledem k symetrii úlohy si není těžké uvědomit, že body X, Y, Z, které mají vlastnost uvedenou v zadání (obvod ΔXYZ je minimální), musí být paty jednotlivých výšek v trojúhelníku ABC.



Vzhledem k symetrii úlohy si není těžké uvědomit, že body X, Y, Z, které mají vlastnost uvedenou v zadání (obvod ΔXYZ je minimální), musí být paty jednotlivých výšek v trojúhelníku ABC.

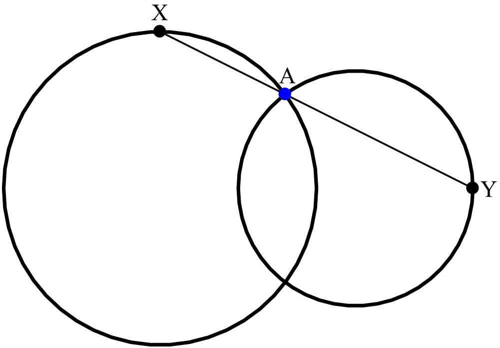


Poznámka

ΔXYZ se nazývá ortický trojúhelník.

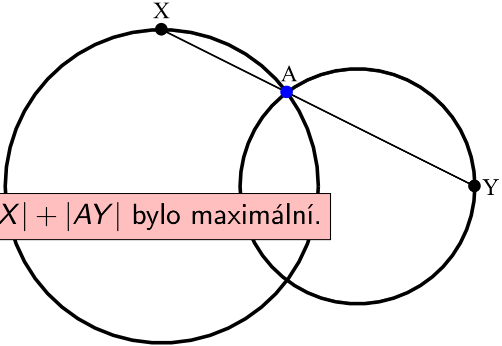
Domácí cvičení

Jsou dány dvě kružnice mající dva společné body. Jedním z nich veďte přímku tak, aby úsečka XY vyťatá kružnicemi měla největší délku (viz obrázek).



Domácí cvičení

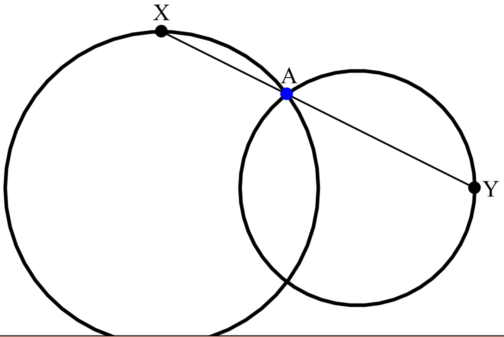
Jsou dány dvě kružnice mající dva společné body. Jedním z nich veďte přímku tak, aby úsečka XY vyťatá kružnicemi měla největší délku (viz obrázek).



Chceme, aby $|AX| + |AY|$ bylo maximální.

Domácí cvičení

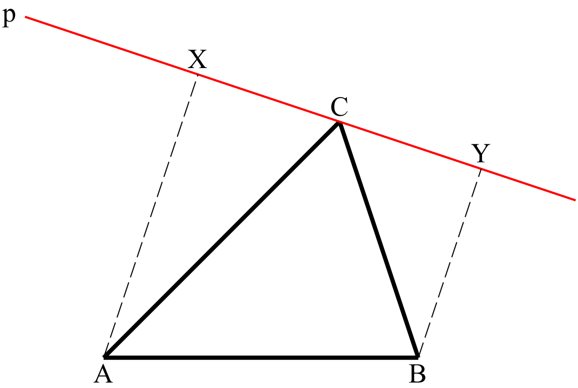
Jsou dány dvě kružnice mající dva společné body. Jedním z nich veďte přímku tak, aby úsečka XY vyťatá kružnicemi měla největší délku (viz obrázek).



Zkuste řešit podobnou úlohu, chceme-li, aby $|AX| \cdot |AY|$ bylo maximální.

Domácí cvičení

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Bodem C veďte přímku p tak, aby s trojúhelníkem ABC měla pouze jeden společný bod (bod C) a přitom byl součet vzdáleností bodů A a B od přímky p maximální (viz obrázek).



Zdroj

- Přednášky pro řešitele matematické olympiády, Jevíčko, červen 1994.

Děkuji za pozornost.