

Rovnice se separovanými proměnnými - přehled

(1)  $g(y) \cdot y' = h(t)$  ... rovnice se separovanými prom.

(2)  $y(t_0) = y_0$  ... počáteční podmínka

(1), (2) ... Cauchyova úloha

Předpoklad:

$h \in C(I)$ , kde  $I \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval  $\Rightarrow$

$$\exists H(t) = \int h(t) dt.$$

$g \in C(J)$ , kde  $J \subset \mathbb{R}$  je otevřený interval  $\Rightarrow$

$$\exists G(y) = \int g(y) dy.$$

Pravidlo

Řešení (1) hledáme mezi diferencovat.

funkcemi, které vyhovují vztahům

$$G(y(t)) = H(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lze-li nalézt inverzi  $G^{-1}$ , lze psát:

$$y(t) = G^{-1}(H(t) + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Upřesnění

I Je-li  $\varphi$  (o rovnici  $y = \varphi(t)$ ) řešením (1) na  $I_1$ ,

$$\text{pak na } I_1: \quad g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = h(t) \quad \Rightarrow$$

$$\exists C \in \mathbb{R}: \quad \underline{\int g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int h(t) dt + C}$$

$$[\text{Subst.: } y = \varphi(t), \quad dy = \varphi'(t) dt] \quad \Rightarrow$$

$$\int g(y) dy = \int h(t) dt + C \quad \Rightarrow$$

$$\exists C \in \mathbb{R}: \quad G(\varphi(t)) = H(t) + C.$$

II Necht'  $\varphi$  je diferencovatelná funkce definovaná  
na otevřeném intervalu  $I_1$  a taková, že

$\exists C \in \mathbb{R}$  na  $I_1$  platí:

$$G(\varphi(t)) = H(t) + C$$

$$'G(\varphi(t))' = (H(t) + C)'$$

$$G'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = H'(t)$$

$$g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = h(t),$$

tedy  $\varphi$  řeší (1) na  $I_1$ .

$$G(y(t)) = H(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Formální postup

$$g(y) \cdot y' = h(t) \qquad y' = \frac{dy}{dt}$$

$$g(y) \cdot \frac{dy}{dt} = h(t) \quad | \cdot dt$$

$$\underbrace{g(y) dy} = \underbrace{h(t) dt}$$

$$\int g(y) dy = \int h(t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$G(y) = H(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y = G^{-1}(H(t) + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

$$(1) g(y) \cdot y' = h(t) \quad , \quad (2) y(t_0) = y_0$$

$$\underline{G(y(t)) = H(t) + C}$$

$$y(t_0) = y_0 \Rightarrow$$

$$G(y_0) = H(t_0) + C \quad \Rightarrow \quad C = G(y_0) - H(t_0)$$

$$\Rightarrow \underline{G(y(t)) = H(t) + G(y_0) - H(t_0)} \quad , \quad \underline{y(t_0) = y_0}$$

$$y(t) = \underline{G^{-1}(H(t) + G(y_0) - H(t_0))}$$

Věta

Nechť  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $J \subset \mathbb{R}$  jsou otevřené intervaly,  
 $g \in C(J)$ ,  $h \in C(I)$ . Nechť  $t_0 \in I$  a pro každé  
 $y \in J$ :  $g(y) \neq 0$ . Pak Cauchyova úloha (1), (2)  
má právě jedno maximální řešení.

$$g(y) \neq 0 \Rightarrow g > 0 \text{ nebo } g < 0 \text{ na } I$$

$$G(y) = \int_{y_0}^y g(\tilde{y}) d\tilde{y}$$