Rovnice se separovanými proměnnými – přehled

(1) $g(y) \cdot y' = h(t)$ ... rovnice se separovanými prom.

(2) $y(t_0) = y_0$ ... počáteční podmínka

(1), (2) ... Cauchyova úloha

Předpoklad:

$h \in C(I)$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval $\Rightarrow$

$$\exists \quad H(t) = \int h(t)\,dt.$$

$g \in C(J)$, kde $J \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval $\Rightarrow$

$$\exists \quad G(y) = \int g(y)\,dy.$$

Pravidlo

Řešení (1) hledáme mezi diferencovat. funkcemi, které vyhovují vztahům

$$G(y(t)) = H(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Lze-li nalézt inverzi G^{-1}, lze psát:

$$y(t) = G^{-1}(H(t) + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Upřesnění

I Je-li φ (o rovnici $y=\varphi(t)$) řešením (1) na I_1, pak na I_1:
$$g(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = h(t) \implies$$

$\exists C \in \mathbb{R}$:
$$\underline{\int g(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt} = \int h(t)\,dt + C$$

[Subst.: $y=\varphi(t)$, $dy=\varphi'(t)\,dt$] $\implies$
$$\int g(y)\,dy = \int h(t) + C \implies$$

$\exists C \in \mathbb{R}$:
$$G(\varphi(t)) = H(t) + C.$$

II Nechť φ je diferencovatelná funkce definovaná na otevřeném intervalu I_1 a taková, že $\exists C \in \mathbb{R}$ na I_1 platí:
$$G(\varphi(t)) = H(t) + C$$
$$\big(G(\varphi(t))\big)' = \big(H(t)+C\big)'$$
$$G'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = H'(t)$$
$$g(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = h(t),$$
tedy φ řeší (1) na I_1.

$$G(y(t)) = H(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Formální postup

$$g(y) \cdot y' = h(t) \qquad y' = \frac{dy}{dt}$$

$$g(y) \cdot \frac{dy}{dt} = h(t) \qquad | \cdot dt$$

$$\underbrace{g(y)\, dy} = \underbrace{h(t)\, dt}$$

$$\int g(y)\, dy = \int h(t)\, dt + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$G(y) = H(t) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y = G^{-1}(H(t) + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

(1) $g(y)\cdot y' = h(t)$, (2) $y(t_0) = y_0$

$$\underbrace{G(y(t)) = H(t) + C}$$

$y(t_0) = y_0 \implies$

$$G(y_0) = H(t_0) + C \implies C = G(y_0) - H(t_0)$$

$$\implies \underbrace{G(\varphi(t)) = H(t) + G(y_0) - H(t_0), \quad \varphi(t_0) = y_0.}$$

$$\varphi(t) = G^{-1}\left(H(t) + G(y_0) - H(t_0)\right).$$

Věta

Nechť $I \subset \mathbb{R}$, $J \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly, $g \in C(J)$, $h \in C(I)$. Nechť $t_0 \in I$ a pro každé $y \in J$: $g(y) \neq 0$. Pak Cauchyova úloha (1), (2) má právě jedno maximální řešení.

$$g(y) \neq 0 \implies g > 0 \text{ nebo } g < 0 \text{ na } I$$

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} g(\tilde{y})\,d\tilde{y}.$$