Lineární algebra — 8. přednáška: Kvadratické formy

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

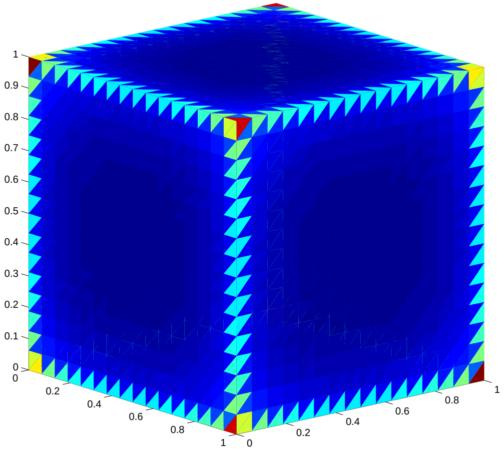
Motivace: Kvadratické formy popisují potenciální energii

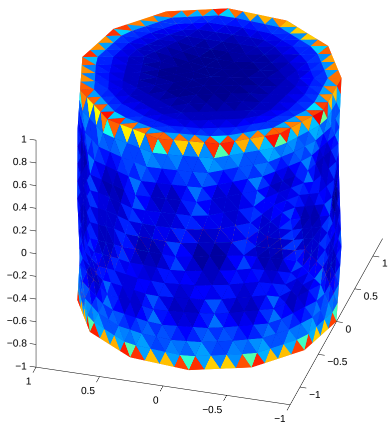
Rozložení hustoty nábojů

Mějme elektrodu nabitou jednotkovým nábojem. Hledáme (po trojúhelnících konstantní) hustotu povrchového náboje $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, která minimalizuje potenciální energii

$$\min \left\{ E(\mathbf{q}) := \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} \right\} \quad \text{vzhledem k } \sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{\text{„Obsah } \triangle\text{"}},$$

kde $(\mathbf{A})_{i,j} := 1/(4\pi\varepsilon_0) \int_{T_i} \int_{T_j} \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \, dV(\mathbf{x}_j) \, dV(\mathbf{x}_i)$ vychází z Coulombovské síly mezi nabitými trojúhelníky T_i a T_j. $\mathbf{A}$ je symetrická matice.





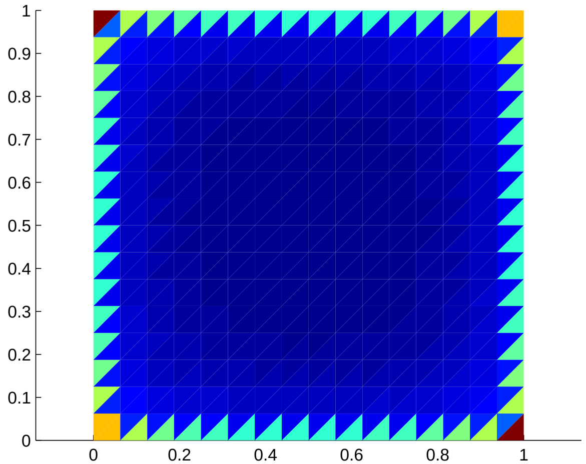
Motivace: Kvadratické formy popisují potenciální energii

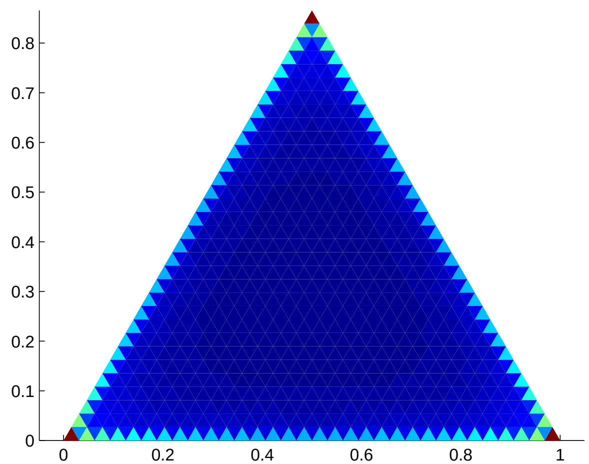
Rozložení proudové hustoty ve vodiči

Mějme vodič protékaný jednotkovým proudem. Hledáme (po trojúhelnících konstantní) proudovou hustotu $\mathbf{j} \in \mathbb{R}^n$, která minimalizuje potenciální energii

$$\min \left\{ E(\mathbf{j}) := \mathbf{j}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \right\} \quad \text{vzhledem k } \sum_{i=1}^{n} j_i = \frac{1}{\text{„Obsah } \triangle\text{"}},$$

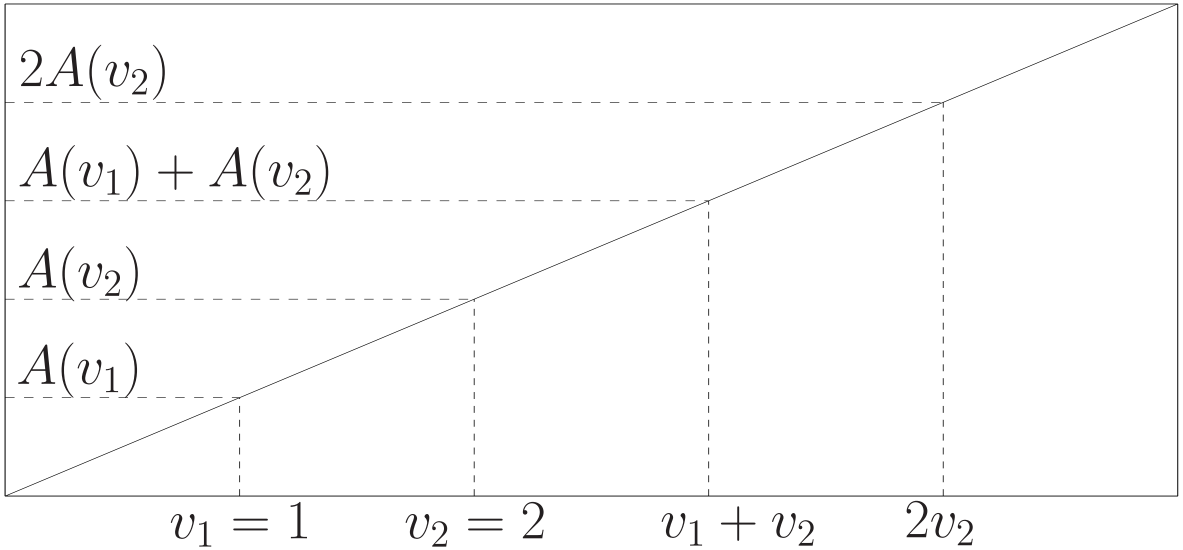
kde $(\mathbf{A})_{i,k} := \mu_0/(4\pi) \int_{T_i} \int_{T_k} \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|} \, dV(\mathbf{x}_k) \, dV(\mathbf{x}_i)$ vychází z Lorentzovy magnetické síly mezi proudovodiči s trojúhelníkovými profily T_i a T_k. **A** je symetrická matice.





Lineární zobrazení

Princip superpozice



Lineární zobrazení

Mějme vektorové prostory $\mathcal{V}, \mathcal{U}$. **Zobrazení** $A : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ je **lineární**, pokud

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}: \; A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A(\mathbf{v}_1) + A(\mathbf{v}_2)$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \; A(\alpha \mathbf{v}) = \alpha A(\mathbf{v})$.

Lineární zobrazení = matice

Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Matice lineárního zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$ a bázi $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ prostoru $\mathcal{U}$. Vezměme $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{v}]_E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E, tj.

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n.$$

Vyjádřeme obraz $A(\mathbf{v}) \in \mathcal{U}$ v bázi F

$$\begin{aligned} [A(\mathbf{v})]_F &= [A(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n)]_F = [\alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n)]_F \\ &= \underbrace{([A(\mathbf{e}_1)]_F, \dots, [A(\mathbf{e}_n)]_F)}_{=:\mathbf{A}_{E,F}} \cdot [\mathbf{v}]_E, \end{aligned}$$

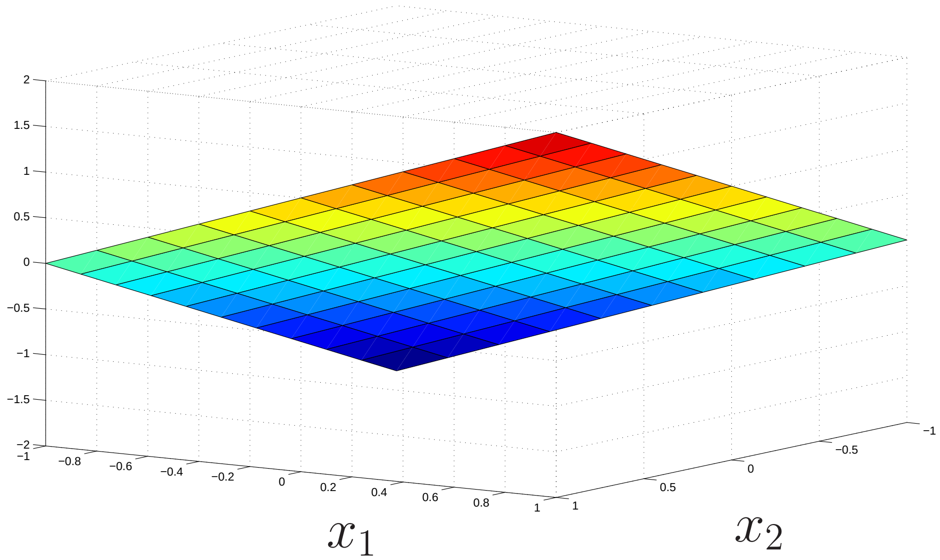
kde $\mathbf{A}_{E,F} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je **matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím** E a F.

Lineární formy

Definice

Mějme vektorové prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$. Lineární zobrazení $A : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ je **lineární forma**, pokud $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.

Příklad: $A(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2$ **je lineární forma na** $\mathbb{R}^2$**.**



Lineární formy = aritmetické vektory

Každý aritmetický vektor lze chápat jako lineární formu.

Mějme vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

Vektor lineární formy

Mějme lineární formu $A : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ a bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$. Vezměme $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{v}]_E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E, tj.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Vyjádřeme obraz $A(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{v}) &= A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n) \\ &= \underbrace{(A(\mathbf{e}_1), \ldots, A(\mathbf{e}_n))}_{=:\mathbf{a}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{a}_E \in \mathbb{R}^n$ je **vektor lineární formy vzhledem k bázi** E.

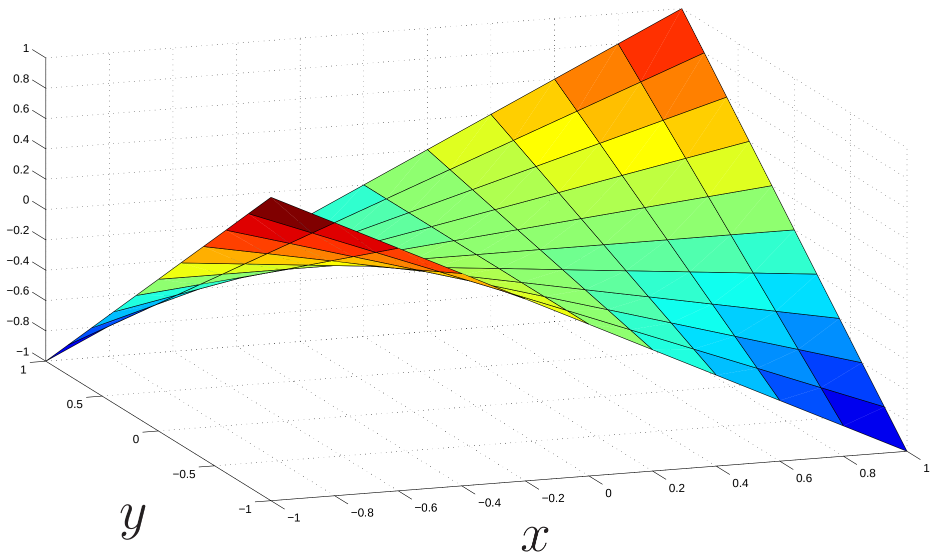
Bilineární formy

Definice

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. Zobrazení $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ je **bilineární forma**, pokud pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$

1. $B_1(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ je lineární forma na $\mathcal{V}$ a
2. $B_2(\mathbf{v}) := B(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ je lineární forma na $\mathcal{V}$.

Příklad: $B(x, y) := xy$ je bilineární forma na $\mathbb{R}$.



Bilineární formy = čtvercové matice

Každou čtvercovou matici lze chápat jako bilineární formu.

Mějme matici $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak následující zobrazení $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je bilin. forma

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{B})_{ij}\, v_j.$$

Matice bilineární formy

Mějme bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ a bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$. Vezměme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jejich souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $[\mathbf{v}]_E = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n.$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \mathbf{v}) \overset{1.}{=} \alpha_1 B(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) + \cdots + \alpha_n B(\mathbf{e}_n, \mathbf{v})$$

$$\overset{2.}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = [\mathbf{u}]_E^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \ldots & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \ldots & B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E,$$

kde $\mathbf{B}_E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je **matice bilineární formy vzhledem k bázi** E.

Kvadratické formy

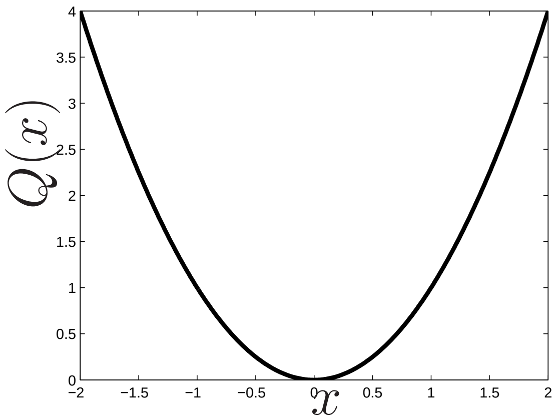
Definice

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a bilineeární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. Zobrazení $Q : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ je **kvadratická forma**, pokud

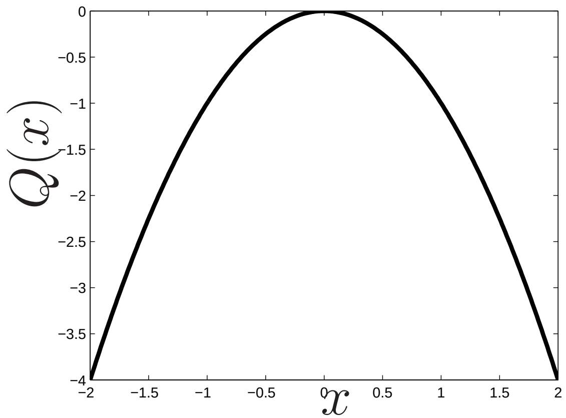
$$Q(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Příklady kvadratických forem na $\mathbb{R}$

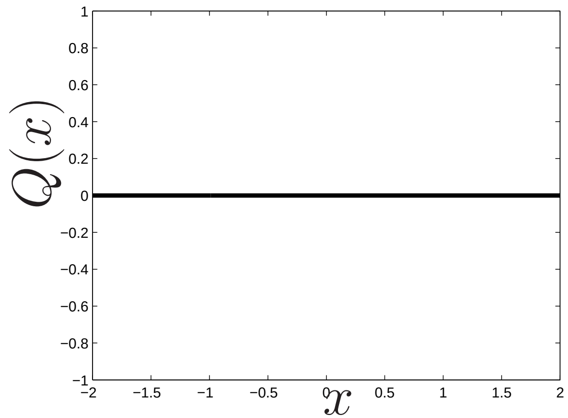
$Q(x) := x^2$



$Q(x) := -x^2$



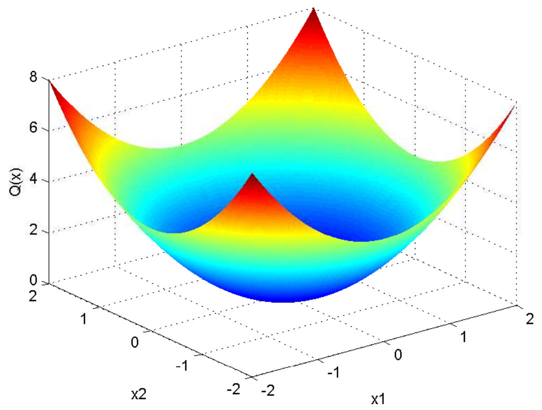
$Q(x) := 0$



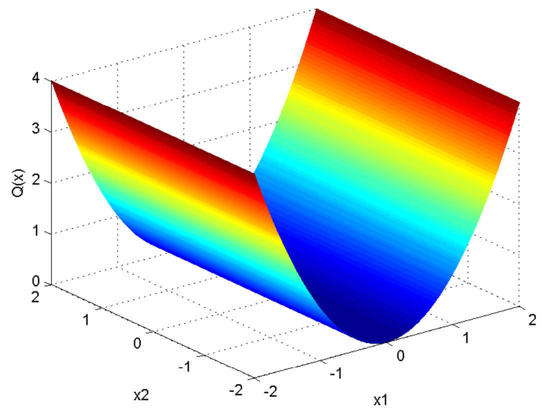
Kvadratické formy

Příklady kvadratických forem na $\mathbb{R}^2$

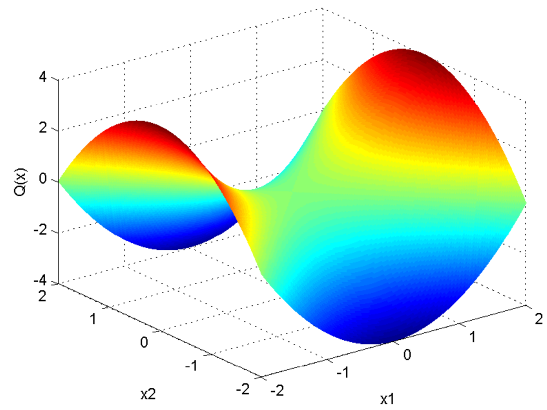
$Q(\mathbf{x}) := (x_1)^2 + (x_2)^2$



$Q(\mathbf{x}) := (x_1)^2$



$Q(\mathbf{x}) := (x_1)^2 - (x_2)^2$



Příklad: $Q(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je kvadratická forma,

neboť $Q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$, kde $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}$ je bilineární forma.

Jsou kvadratické formy libovolné čtvercové matice?

Kvadratické formy = symetrické matice

Antisymetrická bilineární forma dává nulovou kvadratickou formu.

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a antisymetrickou bilineární formu $B^{\mathrm{A}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, pak

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \; B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = -B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

a tedy

$$B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0.$$

Matice kvadratické formy je vždy symetrická.

Mějme bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, pak příslušná kvadratická forma je určena pouze symetrickou částí

$$Q(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \underbrace{B^{\mathrm{A}}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}_{=0} = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Mějme dále bázi $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$ a vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, pak

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \mathbf{B}_E \cdot [\mathbf{v}]_E = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \left(\mathbf{B}_E^{\mathrm{S}} + \mathbf{B}_E^{\mathrm{A}}\right) \cdot [\mathbf{v}]_E =$$
$$= [\mathbf{v}]_E^T \cdot \underbrace{\mathbf{B}_E^{\mathrm{S}}}_{=:\mathbf{Q}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E + \underbrace{[\mathbf{v}]_E^T \cdot \mathbf{B}_E^{\mathrm{A}} \cdot [\mathbf{v}]_E}_{=0}.$$

Kvadratické formy = symetrické matice

Matice kvadratické formy

Mějme bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, k ní příslušející kvadratickou formu $Q(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v},\mathbf{v}) = B^{\mathrm{S}}(\mathbf{v},\mathbf{v})$ a bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru $\mathcal{V}$. Pak pro každý $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí:

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \mathbf{Q}_E \cdot [\mathbf{v}]_E, \quad \text{kde } \mathbf{Q}_E := \mathbf{B}_E^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_E^T\right)$$

je **matice kvadratické formy v bázi** E.

Příklad: Najděte matici kvadratické formy $Q(\mathbf{x}) := (x_1)^2 - x_1x_2 - 2(x_2)^2$ na $\mathbb{R}^2$ v kanonické bázi.

Příslušná bilineární forma je např. $B(\mathbf{x},\mathbf{y}) := x_1y_1 - x_1y_2 - 2x_2y_2$, její matice v kanonické bázi $E := ((1,0),(0,1))$ je

$$\mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a matice kvadratické formy tedy je

$$\mathbf{Q}_E = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_E^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1+0}{2} \\ \frac{0-1}{2} & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Kvadratické formy = symetrické matice

Příklad: Najděte matici kvadratické formy $Q(\mathbf{x}) := (x_1)^2 - x_1x_3 - (x_2)^2 + x_2x_3 + (x_3)^2$ na $\mathbb{R}^3$ v kanonické bázi.

Příslušná bilineární forma je např. $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1y_1 - x_1y_3 - x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_3$, její matice v kanonické bázi $E := ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ je

$$\mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a matice kvadratické formy tedy je

$$\mathbf{Q}_E = \frac{1}{2}\left(\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_E^T\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{0+0}{2} & \frac{-1+0}{2} \\ \frac{0+0}{2} & -1 & \frac{1+0}{2} \\ \frac{0-1}{2} & \frac{0+1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Kvadratické formy = symetrické matice

Příklad: Najděte matici kvadratické formy $Q(p(x)) := \int_0^1 (p(x))^2\, dx$ na $\mathcal{P}_1$ v kanonické bázi $E := (1, x)$.

Příslušná bilineární forma je např. $B(p(x), q(x)) := \int_0^1 p(x)q(x)\, dx$. Napočítejme si její matici v kanonické bázi $E := (1, x)$:

$$B(1,1) = \int_0^1 1 \cdot 1\, dx = 1, \qquad B(1,x) = \int_0^1 1 \cdot x\, dx = \frac{1}{2}$$

$$B(x,1) = \int_0^1 x \cdot 1\, dx = \frac{1}{2}, \qquad B(x,x) = \int_0^1 x \cdot x\, dx = \frac{1}{3},$$

a tedy

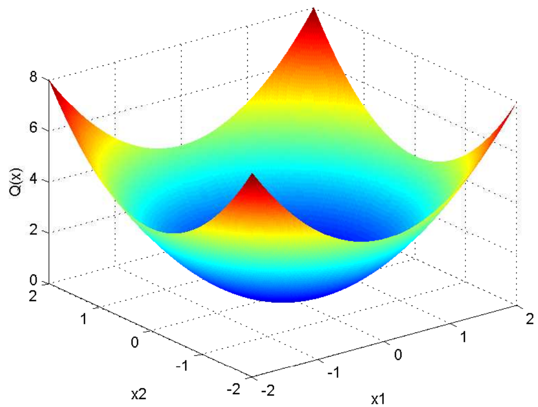
$$\mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_E,$$

což je zároveň i matice kvadratické formy.

Klasifikace kvadratických forem

Kladné, záporné, neurčité formy

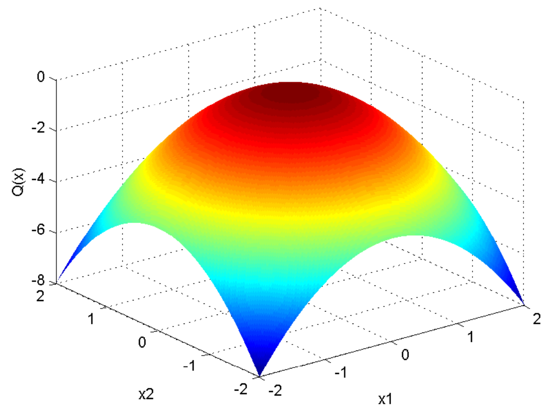
$Q(\mathbf{x}) := (x_1)^2 + (x_2)^2$



pozitivně definitní

$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{x}) > 0$

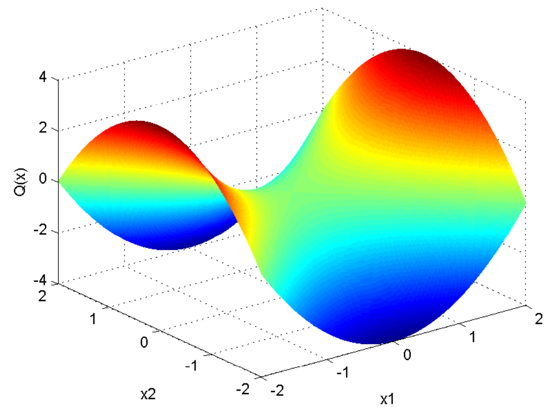
$Q(\mathbf{x}) := -(x_1)^2 - (x_2)^2$



negativně definitní

$\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{x}) < 0$

$Q(\mathbf{x}) := (x_1)^2 - (x_2)^2$



indefinitní

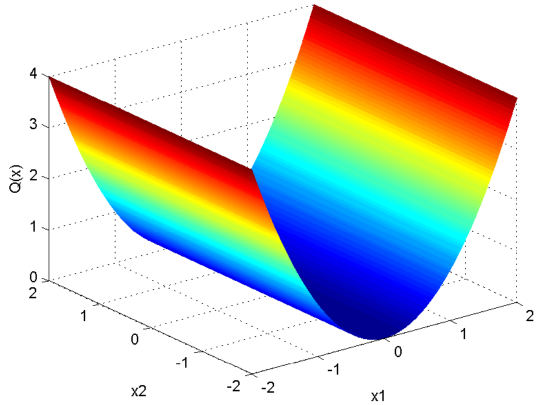
$\exists \mathbf{x} : Q(\mathbf{x}) > 0,$

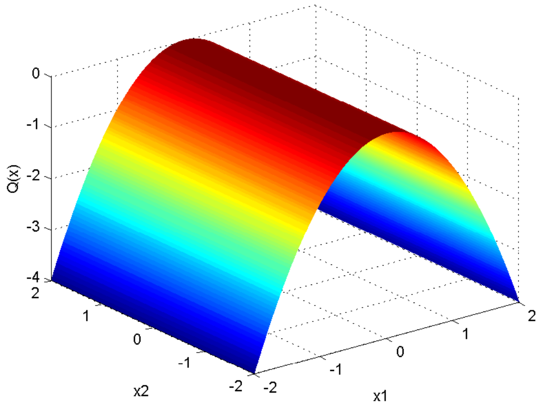
$\exists \mathbf{y} : Q(\mathbf{y}) < 0$

Klasifikace kvadratických forem

Nezáporné, nekladné formy

$$Q(\mathbf{x}) := (x_1)^2 \qquad\qquad Q(\mathbf{x}) := -(x_1)^2$$





pozitivně semidefinitní

$$\forall \mathbf{x} : Q(\mathbf{x}) \geq 0,$$

$$\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{y}) = 0$$

negativně semidefinitní

$$\forall \mathbf{x} : Q(\mathbf{x}) \leq 0,$$

$$\exists \mathbf{y} \neq \mathbf{0} : Q(\mathbf{y}) = 0$$

Klasifikace kvadratických forem

Definice

Mějme vekt. prostor $\mathcal{V}$. Řekneme, že **kvadratická forma** $Q : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní**, pokud
$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\} : Q(\mathbf{v}) > 0,$$
- **negativně definitní**, pokud
$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\} : Q(\mathbf{v}) < 0,$$
- **indefinitní**, pokud
$$\exists \mathbf{v} \in \mathcal{V} : Q(\mathbf{v}) > 0 \quad \text{a} \quad \exists \mathbf{w} \in \mathcal{V} : Q(\mathbf{w}) < 0$$
- **pozitivně semidefinitní**, pokud
$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : Q(\mathbf{v}) \geq 0 \quad \text{a} \quad \exists \mathbf{w} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\} : Q(\mathbf{w}) = 0,$$
- **negativně semidefinitní**, pokud
$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : Q(\mathbf{v}) \leq 0 \quad \text{a} \quad \exists \mathbf{w} \in \mathcal{V} \setminus \{\mathbf{0}\} : Q(\mathbf{w}) = 0.$$

Klasifikace kvadratických forem

Klasifikace kvadratických forem = klasifikace symetrických matic

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ o dimenzi n, bázi E prostoru $\mathcal{V}$ a kvadratickou formu $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$. Pro $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ označme $\boldsymbol{\alpha} := [\mathbf{v}]_E \in \mathbb{R}^n$, pak platí

$$Q(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{Q}_E \cdot \boldsymbol{\alpha} =: \widetilde{Q}(\boldsymbol{\alpha})$$

a klasifikace kvadratické formy $Q : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ je shodná s klasifikací kvadratické formy $\widetilde{Q}$, tedy s klasifikací matice $\mathbf{Q}_E$. Řekneme, že **symetrická matice** $\mathbf{Q}_E$ je

- **pozitivně (negativně) definitní**, pokud

$$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{Q}_E \cdot \boldsymbol{\alpha} \underset{(<)}{>} 0,$$

- **indefinitní**, pokud

$$\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{Q}_E \cdot \boldsymbol{\alpha} > 0 \quad \text{a} \quad \exists \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{Q}_E \cdot \boldsymbol{\beta} < 0,$$

- **pozitivně (negativně) semidefinitní**, pokud

$$\forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\alpha}^T \cdot \mathbf{Q}_E \cdot \boldsymbol{\alpha} \underset{(\leq)}{\geq} 0 \quad \text{a} \quad \exists \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \boldsymbol{\beta}^T \cdot \mathbf{Q}_E \cdot \boldsymbol{\beta} = 0.$$

Klasifikace kvadratických forem = klasifikace symetrických matic

Klasifikace diagonálních matic

Má-li kvadratická forma v nějaké bázi E diagonální matici, tj.

$$\mathbf{Q}_E = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

pak pro libovolný $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, resp. pro jeho souřadnice $[\mathbf{v}]_E =: (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ platí

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \mathbf{D} \cdot [\mathbf{v}]_E = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}(\alpha_i)^2$$

a znaménko $Q(\mathbf{v})$ je určeno znaménky diagonálních prvků. $I := \{1, 2, \dots, n\}$. $\mathbf{D}$ je

- pozitivně (negativně) definitní, pokud $\forall i \in I : d_{ii} \underset{(<)}{>} 0$,
- indefinitní, pokud $\exists i, j \in I : d_{ii} > 0, d_{jj} < 0$,
- pozitivně (negativně) semidefinitní, pokud $\forall i \in I : d_{ii} \underset{(\leq)}{\geq} 0$ a $\exists j \in I : d_{jj} = 0$,

Klasifikace kvadratických forem = klasifikace symetrických matic

Příklady: Klasifikujte následující diagonální matice (kvadrat. forem)

a)

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

je indefinitní (neurčitá), neboť $d_{11} = 1 > 0$ a $d_{22} = -1 < 0$.

b)

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

je negativně semidefinitní (nekladná), neboť $d_{11}, d_{22} \leq 0$, ale $d_{33} = 0$.

c)

$$\mathbf{D} := \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (kladná), neboť $d_{11}, d_{22}, d_{33} > 0$.

Klasifikace kvadratických forem = klasifikace symetrických matic

Kongruentní matice

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a jeho báze $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a $F := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n)$. Uvažujme identické zobrazení $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ a jeho matici vzhledem k bázím E a F označme $\mathbf{T} := \mathbf{I}_{E,F}$. Ta realizuje přechod mezi bázemi

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \ [\mathbf{v}]_F = \mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E.$$

Mějme dále kvadratickou formu $Q : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. **Matice $\mathbf{Q}_E$ a $\mathbf{Q}_F$ jsou kongruentní**:

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_F^T \cdot \mathbf{Q}_F \cdot [\mathbf{v}]_F = (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E)^T \cdot \mathbf{Q}_F \cdot (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E) = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \underbrace{\left(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}_F \cdot \mathbf{T}\right)}_{=\mathbf{Q}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E.$$

Klasifikace ostatních symetrických matic — kongruencí na diagonální

Mějme kvadratickou formu $Q : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$. Hledáme bázi E prostoru $\mathcal{V}$ tak, aby v ní byla matice kvadratické formy diagonální, tj.

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_E^T \cdot \mathbf{Q}_E \cdot [\mathbf{v}]_E, \text{ kde } \mathbf{Q}_E \text{ je diagonální matice.}$$

Klasifikace kvadratických forem = klasifikace symetrických matic

Algoritmus: Gaussova eliminace + kongruentní transformace

1. Začneme s maticí kvadratické formy $\mathbf{Q}_F$ v libovolné bázi F a provedeme Gaussovu eliminaci bez záměny řádků

$$(\mathbf{Q}_F|\mathbf{I}) \xrightarrow{\text{Gauss bez záměn řádků}} (\mathbf{U}|\mathbf{T}^T) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}_F = \mathbf{U},$$

kde $\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková a $\mathbf{T}^T$ dolní trojúhelníková.

2. Následující kongruentní transformace nám dá diagonální matici

$$\mathbf{D} := \mathbf{Q}_E := \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}_F \cdot \mathbf{T} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}.$$

Oba kroky lze sjednotit. Rozepišme Gaussovu eliminaci $\mathbf{T}^T = \mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1$, pak

$$\mathbf{Q}_E = \underbrace{\mathbf{T}_n \cdots \underbrace{\left(\mathbf{T}_2 \cdot \underbrace{\left(\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{Q}_F \cdot \mathbf{T}_1^T\right)}_{\text{kongruence } 1} \cdot \mathbf{T}_2^T \right)}_{\text{kongruence } 2} \cdots \mathbf{T}_n^T}_{\text{kongruence } n}.$$

Klasifikace kvadratických forem = klasifikace symetrických matic

Příklad: Klasifikujte $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Ad 1.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right) =: (\mathbf{U}|\widetilde{\mathbf{L}}),$$

Ad 2.

$$\mathbf{D} := \mathbf{U} \cdot \widetilde{\mathbf{L}}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{-5} \end{pmatrix},$$

a jelikož $d_{11} > 0$, $d_{22} < 0$, matice je indefinitní.

Oba kroky lze sjednotit takto:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_1]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{s}_2:=\mathbf{s}_2-2\mathbf{s}_1]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{-5} \end{pmatrix}}_{\text{kongruence 1}}.$$

Klasifikace kvadratických forem = klasifikace symetrických matic

Příklad: Klasifikujte $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=4\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=2\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{s}_3:=4\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_1]{\mathbf{s}_2:=2\mathbf{s}_2-\mathbf{s}_1} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & -4 \\ 0 & -4 & 28 \end{pmatrix}}_{\text{kongruence 1}} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2]{}$$

$$\underbrace{\xrightarrow[\mathbf{r}_3:=2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2]{} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & -4 \\ 0 & 0 & 52 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{s}_3:=2\mathbf{s}_3+\mathbf{s}_2]{} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{104} \end{pmatrix}}_{\text{kongruence 2}},$$

a jelikož $d_{11}, d_{22}, d_{33} > 0$, matice je pozitivně definitní.

Klasifikace kvadratických forem = klasifikace symetrických matic

Příklad: Klasifikujte $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{0} & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{výroba pivota}]{\mathbf{r}_1 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{s}_1 := -\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{kongruence 1}} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1}$$

$$\underbrace{\xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{s}_3 := \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_1]{\mathbf{s}_2 := \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{kongruence 2}} \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := 4\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1}$$

$$\underbrace{\xrightarrow[\mathbf{r}_3 := 4\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1]{} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{s}_3 := 4\mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_1]{} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{44} \end{pmatrix}}_{\text{kongruence 3}},$$

a jelikož $d_{11} < 0$ a $d_{22} > 0$, matice je indefinitní.

Gaussova eliminace pro symetrické matice

Choleského (LDL^T) rozklad

Uvažujme soustavu se symetrickou matici

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Po kongruentních transformacích dostáváme ekvivalentní soustavu s diagonální maticí $\mathbf{D} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$:

$$\underbrace{\overbrace{\mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1}^{=\mathbf{T}^T} \cdot \mathbf{A}}_{=\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\overbrace{\mathbf{T}_1^T \cdot \mathbf{T}_2^T \cdots \mathbf{T}_n^T}^{=\mathbf{T}} \cdot \mathbf{y}}_{=\mathbf{x}} = \underbrace{\mathbf{T}_n \cdots \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{b}}_{=:\mathbf{c}}.$$

Odtud vidíme, že řešení soustavy lze provést v následujících krocích:

1. $(\mathbf{A}|\mathbf{b}|\mathbf{I}) \xrightarrow{\text{Gauss bez záměn řádků}} (\mathbf{U}|\mathbf{c}|\mathbf{T}^T)$, $\mathbf{D} := \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}$
2. $\mathbf{D} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c} \rightsquigarrow \mathbf{y}$,
3. $\mathbf{x} := \mathbf{T} \cdot \mathbf{y}$.

Gaussova eliminace pro symetrické matice

Příklad: Řešte soustavu Choleského (LDL^T) rozkladem.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{s}_2:=\mathbf{s}_2-2\mathbf{s}_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 \end{array}\right), \quad y_1 = 1,\ y_2 = 0,$$

$$\mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 = 1y_1 - 2y_2 = 1, x_2 = y_2 = 0.$$

Gaussova eliminace pro symetrické matice

Příklad: Řešte soustavu Choleského (LDL^T) rozkladem.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{s}_3:=\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_1]{\mathbf{s}_2:=\mathbf{s}_2+\mathbf{s}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right), \quad y_1 = 1,$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{s}_3:=\mathbf{s}_3-\mathbf{s}_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \end{array}\right), \quad \begin{array}{l} y_2 = 3 \\ y_3 = 1 \end{array}$$

$$\mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_1 &:= y_1 = 1, \\ \widetilde{x}_2 &:= y_2 - y_3 = 2, \\ \widetilde{x}_3 &:= y_3 = 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &:= \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2 - \widetilde{x}_3 = 2, \\ x_2 &:= \widetilde{x}_2 = 2 \\ x_3 &:= \widetilde{x}_3 = 1. \end{aligned}$$