

Lineární algebra — 7. přednáška: Bilineární formy, determinanty



Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1>



Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



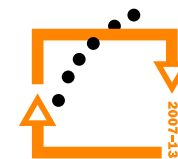
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

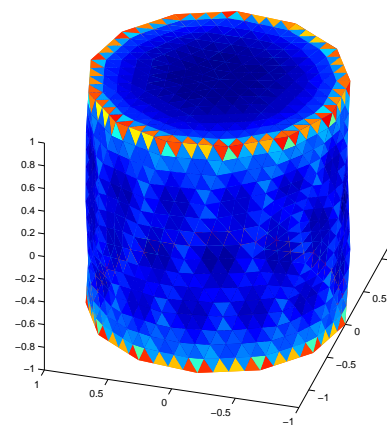
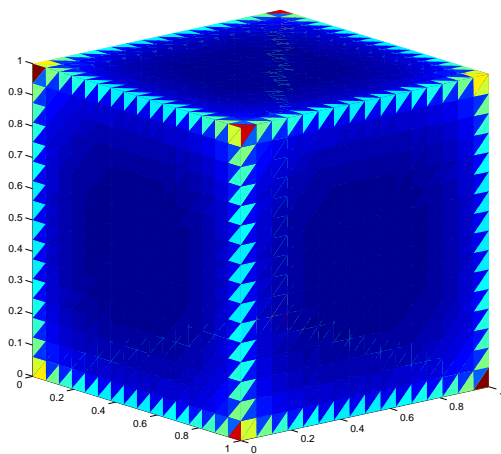
Motivace: Bilineární forma má blízko ke kvadratické

Kvadratické formy popisují potenciální energie systémů

Mějme elektrodu nabitou jednotkovým nábojem. Hledáme (po trojúhelníkových konstantní) hustotu povrchového náboje $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, která minimalizuje potenciální energii

$$\min \{ E(\mathbf{q}) := \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{q} \} \quad \text{vzhledem k } \sum_{i=1}^n q_i = 1 / \text{„Obsah } \Delta \text{”},$$

kde $(\mathbf{A})_{i,j} \approx \frac{1}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}$ vychází z Coulombovské síly mezi náboji umístěnými v $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$.



Determinanty jsou multi-lineární formy

Determinant prvního řádu je lineární zobrazení (forma) na \mathbb{R}

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(x) := \det(x) = x$$

Determinant druhého řádu je bilineární forma na \mathbb{R}^2

$$A_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_1(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = x_1 a_2 - x_2 a_1 = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x},$$

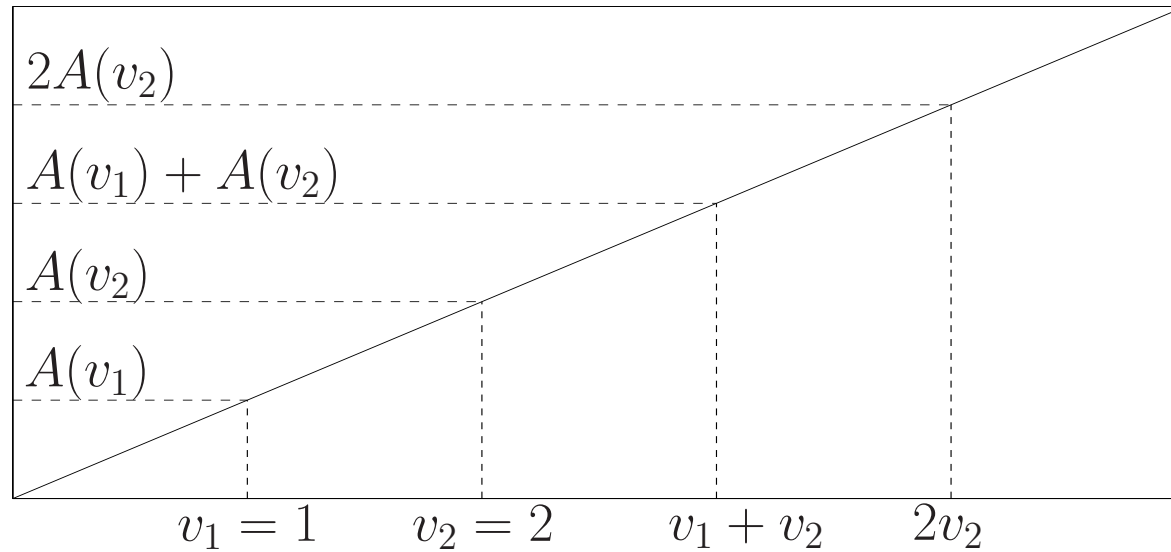
$$A_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_2(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = a_1 x_2 - a_2 x_1 = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}.$$

Determinant třetího řádu je trilineární forma na \mathbb{R}^3

$$A_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad A_1(\mathbf{x}) := \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_3 a_1 \\ a_3 b_1 - b_1 a_2 \\ a_1 b_2 - b_2 a_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}, \dots$$

Lineární zobrazení

Princip superpozice



Lineární zobrazení

Mějme vektorové prostory \mathcal{V} , \mathcal{U} . Zobrazení $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ je **lineární**, pokud

1. $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V} : A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = A(\mathbf{v}_1) + A(\mathbf{v}_2)$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : A(\alpha \mathbf{v}) = \alpha A(\mathbf{v})$.

Lineární zobrazení = matice

Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Matice lineárního zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$, bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathcal{V} a bázi $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ prostoru \mathcal{U} . Vezměme $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{v}]_E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E , tj.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Vyjádříme obraz $A(\mathbf{v}) \in \mathcal{U}$ v bázi F

$$\begin{aligned} [A(\mathbf{v})]_F &= [A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n)]_F = [\alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n)]_F \\ &= \underbrace{([A(\mathbf{e}_1)]_F, \dots, [A(\mathbf{e}_n)]_F)}_{=: \mathbf{A}_{E,F}} \cdot [\mathbf{v}]_E, \end{aligned}$$

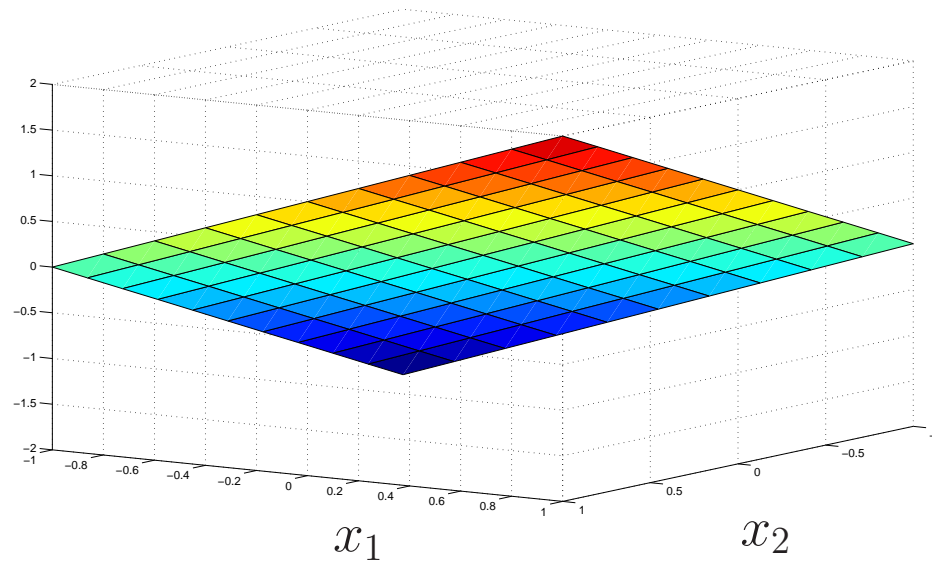
kde $\mathbf{A}_{E,F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím E a F .

Lineární formy

Definice

Mějme vektorové prostory \mathcal{V} a \mathcal{U} . Lineární zobrazení $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ je **lineární forma**, pokud $\mathcal{U} = \mathbb{R}$.

Příklad: $A(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2$ je lineární forma na \mathbb{R}^2 .



Každý aritmetický vektor lze chápat jako lineární formu.

Lineární formy = aritmetické vektory

Každý aritmetický vektor lze chápat jako lineární formu.

Mějme vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Vektor lineární formy

Mějme lineární formu $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ a bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathcal{V} . Vezměme $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{v}]_E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E , tj.

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Vyjádřeme obraz $A(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{v}) &= A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n) \\ &= \underbrace{(A(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_n))}_{=:\mathbf{a}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{a}_E \in \mathbb{R}^n$ je vektor lineární formy vzhledem k bázi E .

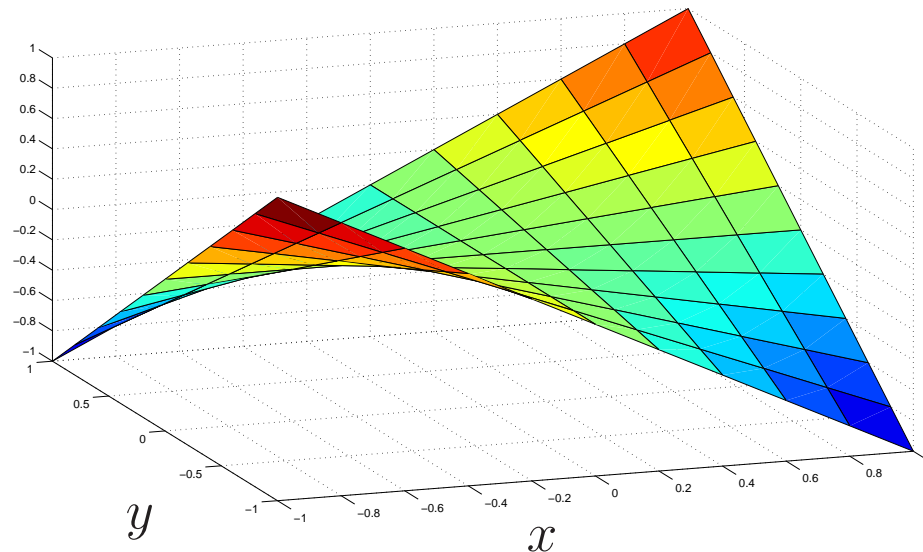
Bilineární formy

Definice

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} . Zobrazení $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ je **bilineární forma**, pokud pro libovolné $\mathbf{a} \in \mathcal{V}$

1. $B_1(\mathbf{v}) := B(\mathbf{v}, \mathbf{a})$ je lineární forma na \mathcal{V} a
2. $B_2(\mathbf{v}) := B(\mathbf{a}, \mathbf{v})$ je lineární forma na \mathcal{V} .

Příklad: $B(x, y) := xy$ je bilineární forma na \mathbb{R} .



Bilineární formy

Příklad: Skalární součin $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := u_1v_1 + u_2v_2$ je bilineární forma na \mathbb{R}^2 .

Vezměme libovolné $\mathbf{a} := (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ad 1. $B_1(\mathbf{u}) := B(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = u_1a_1 + u_2a_2 = (a_1, a_2) \cdot \mathbf{u}$ je lineární forma na \mathbb{R}^2 a

Ad 2. $B_2(\mathbf{v}) := B(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = a_1v_1 + a_2v_2 = (a_1, a_2) \cdot \mathbf{v}$ je také lineární forma na \mathbb{R}^2 .

Příklad: $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v}$, kde $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, je bilineární forma na \mathbb{R}^n .

Vezměme libovolné $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Ad 1. $B_1(\mathbf{u}) := B(\mathbf{u}, \mathbf{a}) = \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{a})^T = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{u} =: \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$, kde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, je lineární forma na \mathbb{R}^n a

Ad 2. $B_2(\mathbf{v}) := B(\mathbf{a}, \mathbf{v}) = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} =: \mathbf{c} \cdot \mathbf{v}$, kde $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, je lineární forma na \mathbb{R}^n .

Každou čtvercovou matici lze chápat jako bilineární formu.

Bilineární formy = čtvercové matice

Každou čtvercovou matici lze chápat jako bilineární formu.

Mějme matici $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pak následující zobrazení $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je bilin. forma

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n (\mathbf{B})_{ij} v_j.$$

Matice bilineární formy

Mějme bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ a bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathcal{V} . Vezměme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ a jejich souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $[\mathbf{v}]_E = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{e}_n.$$

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= B(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \mathbf{v}) \stackrel{1.}{=} \alpha_1 B(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) + \dots + \alpha_n B(\mathbf{e}_n, \mathbf{v}) \\ &\stackrel{2.}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \beta_j B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = [\mathbf{u}]_E^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & \dots & B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1) & \dots & B(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n) \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{B}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{B}_E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice bilineární formy vzhledem k bázi E .

Bilineární formy = čtvercové matice

Příklad: Vypočtete matici $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ na \mathbb{R}^n v kanonické bázi.

$$B(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \implies \mathbf{B}_E = \mathbf{I}$$

Příklad: Vypočtete matici $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 2u_1v_1 - u_1v_2 + u_2v_2$ na \mathbb{R}^2 v kan. bázi.

$$\begin{aligned} B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) &= B((1, 0), (1, 0)) = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2, \\ B(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) &= B((1, 0), (0, 1)) = 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -1, \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) &= B((0, 1), (1, 0)) = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0, \\ B(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) &= B((0, 1), (0, 1)) = 2 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned} \implies \mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

To není překvapení:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2u_1v_1 - 1u_1v_2 + 0u_2v_1 + 1u_2v_2 = (u_1, v_1) \cdot \begin{pmatrix} 2v_1 - 1v_2 \\ 0v_1 + 1v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Příklad: Vypočtěte matici $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := u_1v_1 - 2u_1v_2 + 3u_2v_2 + u_2v_3 - u_3v_1 + 3u_3v_2$ na \mathbb{R}^3 v kan. bázi.

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 1u_1v_1 - 2u_1v_2 + 0u_1v_3 + 0u_2v_1 + 3u_2v_2 + u_2v_3 - 1u_3v_1 + 3u_3v_2 + 0u_3v_3 = \\ &= u_1(1v_1 - 2v_2 + 0v_3) + u_2(0v_1 + 3v_2 + 1v_3) + u_3(-1v_1 + 3v_2 + 0v_3) = \\ &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}_E} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad: Vypočtěte matici $B(p, q) := p(0)q(1)$ na \mathcal{P}_1 v bázi $E := (1, x)$.

$$\begin{aligned} B(e_1(x), e_1(x)) &= B(1, 1) = 1|_{x=0} \cdot 1|_{x=1} = 1 \cdot 1 = 1, \\ B(e_1(x), e_2(x)) &= B(1, x) = 1|_{x=0} \cdot x|_{x=1} = 1 \cdot 1 = 1, \\ B(e_2(x), e_1(x)) &= B(x, 1) = x|_{x=0} \cdot 1|_{x=1} = 0 \cdot 1 = 0, \\ B(e_2(x), e_2(x)) &= B(x, x) = x|_{x=0} \cdot x|_{x=1} = 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B(1+x, 1-x) = [1+x]_E^T \cdot \mathbf{B}_E \cdot [1-x]_E = (1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 = (1+x)|_{x=0} \cdot (1-x)|_{x=1}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Příklad: Vypočtěte matici $B(p, q) := \int_0^1 p(x) q(x) dx$ na \mathcal{P}_1 v kan. bázi.

$$B(e_1(x), e_1(x)) = B(0x + 1, 0x + 1) = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = [x]_{x=0}^{x=1} = 1 - 0 = 1,$$

$$B(e_1(x), e_2(x)) = B(0x + 1, 1x + 0) = \int_0^1 1 \cdot x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

$$B(e_2(x), e_1(x)) = B(1x + 0, 0x + 1) = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2},$$

$$B(e_2(x), e_2(x)) = B(1x + 0, 1x + 0) = \int_0^1 x \cdot x dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{B}_E := \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

„Zkouška“:

$$B(1+x, 1-x) = [1+x]_E^T \cdot \mathbf{B}_E \cdot [1-x]_E = (1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3},$$

$$B(1+x, 1-x) = \int_0^1 (1-x)(1+x) dx = \int_0^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - 0 = \frac{2}{3}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Klasifikace

$B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ je **symetrická bilineární forma**, pokud

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = B(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Symetrická bilineární forma má v každé bázi **symetrickou matici**, tj.

$$\mathbf{B}_E = \mathbf{B}_E^T.$$

$B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ je **antisymetrická bilineární forma**, pokud

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} : B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -B(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Antisymetrická bilineární forma má v každé bázi **antisymetrickou matici**, tj.

$$\mathbf{B}_E = -\mathbf{B}_E^T.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Rozklad

Každá bilin. forma $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ lze rozložit na symetrickou část $B^S : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ a antisymetrickou část $B^A : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{\frac{1}{2} (B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\mathbf{v}, \mathbf{u}))}_{=: B^S(\mathbf{u}, \mathbf{v})} + \underbrace{\frac{1}{2} (B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - B(\mathbf{v}, \mathbf{u}))}_{=: B^A(\mathbf{u}, \mathbf{v})}.$$

Analogicky lze každou čtvercovou matici (bilin. formy v bázi E) $\mathbf{B}_E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ rozložit na symetrickou $\mathbf{B}_E^S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a antisymetrickou část $\mathbf{B}_E^A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{B}_E = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{B}_E + \mathbf{B}_E^T)}_{=: \mathbf{B}_E^S} + \underbrace{\frac{1}{2} (\mathbf{B}_E - \mathbf{B}_E^T)}_{=: \mathbf{B}_E^A}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Příklad: Zapište matici $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := 3u_1v_1 - u_2v_3 + u_3v_1 + u_3v_2$ na \mathbb{R}^3 v kan. bázi a rozložte ji na symetrickou a antisymetrickou část.

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 3u_1v_1 + 0u_1v_2 + 0u_1v_3 + 0u_2v_1 + 0u_2v_2 - 1u_2v_3 + 1u_3v_1 + 1u_3v_2 + 0u_3v_3 = \\ &= (u_1, u_2, u_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{B}_E} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_E^S = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{0+1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{-1+1}{2} \\ \frac{1+0}{2} & \frac{1-1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_E^A = \mathbf{B}_E - \mathbf{B}_E^S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilineární formy = čtvercové matice

Kongruentní matice

Mějme vektorový prostor \mathcal{V} a jeho báze $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$. Uvažujme identické zobrazení $I : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ a jeho matici vzhledem k bázím E a F označme $\mathbf{T} := \mathbf{I}_{E,F}$. Ta realizuje přechod mezi bázemi

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : [\mathbf{v}]_F = \mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E.$$

Mějme dále bilineární formu $B : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. Pak její **matice** \mathbf{B}_E a \mathbf{B}_F se nazývají **kongruentní** a splňují

$$\mathbf{B}_E = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot \mathbf{T},$$

neboť

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= [\mathbf{u}]_F^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot [\mathbf{v}]_F = (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{u}]_E)^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot (\mathbf{T} \cdot [\mathbf{v}]_E) = \\ &= [\mathbf{u}]_E^T \cdot \underbrace{(\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{B}_F \cdot \mathbf{T})}_{=\mathbf{B}_E} \cdot [\mathbf{v}]_E. \end{aligned}$$

Determinanty jsou antisymetrické multi-lineární formy

Determinant prvního řádu je lineární zobrazení (forma) na \mathbb{R}

$$A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(x) := \det(x) = x$$

Determinant druhého řádu je antisymetrická bilineární forma na \mathbb{R}^2

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1 = (u_1, u_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

je zjevně bilineární forma, která je i antisymetrická, viz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Výpočtářská definice determinantu (\rightsquigarrow Gauss–Jordanova metoda)

Mějme čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$, pak číslo $|\mathbf{A}| := \det \mathbf{A} \in \mathbb{R}$ je jednoznačně určeno následujícími vlastnostmi:

0. $\det \mathbf{I} = 1$,

1. (*linearita*)

$$\det(\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)^T = \alpha \det(\mathbf{u}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)^T + \beta \det(\mathbf{v}, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)^T,$$

2. (*antisymetrie*)

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n)^T = -\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n)^T.$$

Příklad: Vypočtěte $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} &\stackrel{\mathbf{r}_2 := -3\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{1.}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} \end{vmatrix} \stackrel{\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{=} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}_{=0} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2|\mathbf{I}| \stackrel{0.}{=} -2 \cdot 1 = -2. \end{aligned}$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Ještě výpočtářštější definice (\rightsquigarrow Gaussova eliminace)

Mějme čtvercovou matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \neq 0$, pak

1. $|\mathbf{A}| = a_{11} \dots a_{nn}$, pokud \mathbf{A} je horní nebo dolní trojúhelníková,

2. $\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j} \mathbf{B} : |\mathbf{A}| = -|\mathbf{B}|$,

3. $\mathbf{A} \xrightarrow{\mathbf{r}_i := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{r}_j} \mathbf{B} : |\mathbf{A}| = \frac{1}{\alpha_i} |\mathbf{B}|$ pro $\alpha_i \neq 0$.

Příklad: Vypočtete $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{r}_2 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 := -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & -2 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} = \\ \mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{1.}{=} 1 \cdot 3 \cdot (-3) = -9$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Příklady: Vypočtěte následující determinanty.

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{\underline{r_2 := -4r_1 + r_2}} \\ \underline{\underline{r_3 := -7r_1 + r_3}} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-3} & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{\underline{r_3 := -2r_2 + r_3}} \\ \underline{\underline{r_3 := -2r_2 + r_3}} \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{1.}{=} 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{\underline{r_2 := r_1 + r_2}} \\ \underline{\underline{r_3 := 3r_1 + r_4}} \\ \underline{\underline{r_4 := r_1 + r_3}} \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{\underline{r_3 := -2r_2 + r_3}} \\ \underline{\underline{r_4 := -3r_2 + 2r_4}} \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \underline{\underline{r_4 := -3r_3 + r_4}} \\ \underline{\underline{r_4 := -3r_3 + r_4}} \end{matrix} \\ = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) \cdot 18 = 54.$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Tradiční definice determinantu

Bud' $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $(a) \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ libovolné. Definujme $|\mathbf{A}| := \det \mathbf{A}$ takto

$$|(a)| := a, \quad |\mathbf{A}| := \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|,$$

kde \mathbf{A}_{ij} je čtvercová matice, která vznikne z \mathbf{A} vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce.

Příklad: Spočtete použitím tradiční definice.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 + (-1)^{2+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \\ + (-1)^{2+4} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \dots$$

Determinant je antisymetrická multi-lineární forma

Sarrusovo pravidlo pro matici řádu 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}|(a_{22})| - a_{12}|(a_{21})| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo pro matici řádu 3

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Cramerovo pravidlo pro $n > 3$ nebudeme používat!

Inverzní matice pomocí determinantů

Mějme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, pak

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \underbrace{\begin{pmatrix} |\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{21}| & \dots & (-1)^{n+1}|\mathbf{A}_{n1}| \\ -|\mathbf{A}_{12}| & |\mathbf{A}_{22}| & \dots & (-1)^{2+n}|\mathbf{A}_{n2}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}|\mathbf{A}_{1n}| & (-1)^{2+n}|\mathbf{A}_{2n}| & \dots & |\mathbf{A}_{nn}| \end{pmatrix}}{=: \mathbf{C}},$$

neboť

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{j+k} |\mathbf{A}_{jk}| = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Důsledek: Cramerovo pravidlo

Mějme $\mathbf{A} := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regulární, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pak

$$x_i = \frac{|\mathbf{A}_i|}{|\mathbf{A}|}, \text{ kde } \mathbf{A}_i := (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n).$$

\mathbf{A} je singulární, právě když $|\mathbf{A}| = 0$.

Cramerovo pravidlo pro $n > 3$ nebudeme používat!

Řešte soustavu Cramerovým pravidlem.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{r}_2 := -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}} \\ \underline{\underline{\mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \underline{\underline{\mathbf{r}_3 := -3\mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_3}} \end{array} = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (-5) \cdot 4 = -4,$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}} \\ \underline{\underline{\mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \underline{\underline{\mathbf{r}_3 := 3\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}} \end{array} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{r}_2 := -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}} \\ \underline{\underline{\mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 2 = -6,$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{r}_2 := -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}} \\ \underline{\underline{\mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \\ \underline{\underline{\mathbf{r}_3 := -3\mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_3}} \end{array} = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (-5) \cdot 9 = -9,$$

$$x_1 = |\mathbf{A}_1|/|\mathbf{A}| = 1/4, \quad x_2 = |\mathbf{A}_2|/|\mathbf{A}| = 3/2, \quad x_3 = |\mathbf{A}_3|/|\mathbf{A}| = 9/4,$$

Cramerovo pravidlo pro $n > 3$ nebudeme používat!

Řešte soustavu Gaussovou eliminací.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2 := -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := -3\mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \end{array} \right)$$

$$x_3 = 9/4, \quad x_2 = \frac{-3 - 2x_3}{-5} = 3/2, \quad x_1 = 1 - 2x_2 + x_3 = 1/4.$$

K čemu tedy jsou determinanty?

Obsah rovnoběžníku

Obsah 2d rovnoběžníku, jehož přilehlé strany jsou tvořeny vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, je

$$S = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|.$$

Obsah 3d rovnoběžníku, jehož přilehlé strany jsou tvořeny vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, je

$$S = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ (1, 1, 1) \end{pmatrix} \right| = |a_1(b_2 - b_3) + a_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2)|.$$

Objem rovnoběžnostěnu

Objem 3d rovnoběžnostěnu, jehož přilehlé strany jsou tvořeny vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$, je

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \right| = |a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)|.$$