

Lineární algebra — 6. přednáška: Lineární zobrazení



Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1>



Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



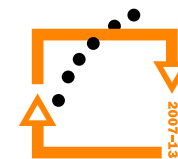
evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

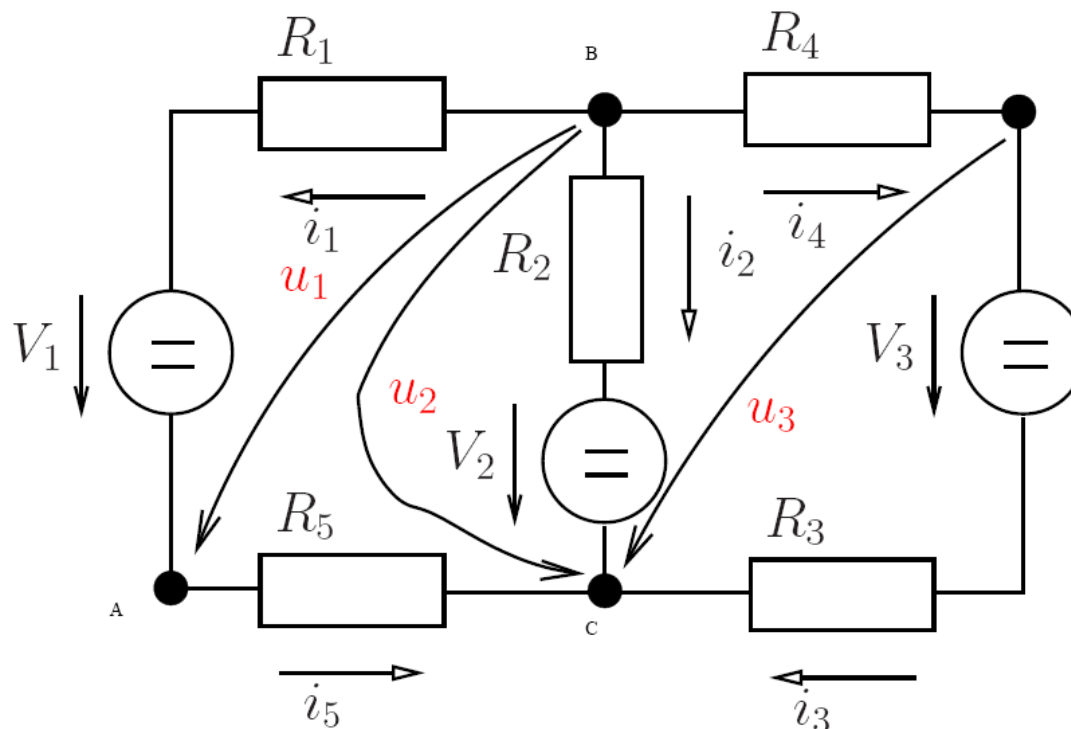


OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Princip superpozice

Steady-state circuit



Ohm's and Kirchhoff's laws

$$i_1 = \frac{u_1 - V_1}{R_1}, \quad i_2 = \frac{u_2 - V_2}{R_2}, \quad i_3 = \frac{u_3 - V_3}{R_3}, \quad i_4 = \frac{u_2 - u_3}{R_4}, \quad i_5 = \frac{u_2 - u_1}{R_5},$$

uzel A: $i_1 - i_5 = 0$, uzel B: $-i_1 - i_2 - i_4 = 0$, uzel C: $i_2 + i_3 + i_5 = 0$.

Princip superpozice

Stejnoseměrný obvod — soustava lineárních rovnic

$$R_1 = \dots = R_5 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{R_5} &= 0 & 2u_1 - u_2 &= V_1 \\ -\frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - V_2}{R_2} - \frac{u_2 - u_3}{R_4} &= 0 & \Leftrightarrow -u_1 - 2u_2 + u_3 &= -V_1 - V_2 \\ \frac{u_2 - V_2}{R_2} + \frac{u_3 - V_3}{R_3} + \frac{u_2 - u_1}{R_5} &= 0 & -u_1 + 2u_2 + u_3 &= V_2 + V_3 \end{aligned}$$

a) $V_1 = 1, V_2 = V_3 = 0$; b) $V_2 = 1, V_1 = V_3 = 0$; c) $V_3 = 1, V_1 = V_2 = 0$

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := 3\mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_3} \\ &\xrightarrow{\mathbf{r}_3 := 3\mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 2 & 4 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \mathbf{u}^a = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}, \mathbf{u}^b = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \mathbf{u}^c = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Princip superpozice

Stejnoseměrný obvod — soustava lineárních rovnic

$$R_1 = \dots = R_5 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{R_5} &= 0 & 2u_1 - u_2 &= V_1 \\ -\frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - V_2}{R_2} - \frac{u_2 - u_3}{R_4} &= 0 & \Leftrightarrow -u_1 - 2u_2 + u_3 &= -V_1 - V_2 \\ \frac{u_2 - V_2}{R_2} + \frac{u_3 - V_3}{R_3} + \frac{u_2 - u_1}{R_5} &= 0 & -u_1 + 2u_2 + u_3 &= V_2 + V_3 \end{aligned}$$

d) $V_1 = 1, V_2 = 2, V_3 = 3$

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) & \xrightarrow{\substack{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_1 + 2\mathbf{r}_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-5} & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 2 & 11 \end{array} \right) & \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := 3\mathbf{r}_2 + 5\mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & 40 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \mathbf{u}^d = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Princip superpozice

Stejnoseměrný obvod — soustava lineárních rovnic

$$R_1 = \dots = R_5 = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{R_5} &= 0 & 2u_1 - u_2 &= V_1 \\ -\frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - V_2}{R_2} - \frac{u_2 - u_3}{R_4} &= 0 & \Leftrightarrow -u_1 - 2u_2 + u_3 &= -V_1 - V_2 \\ \frac{u_2 - V_2}{R_2} + \frac{u_3 - V_3}{R_3} + \frac{u_2 - u_1}{R_5} &= 0 & -u_1 + 2u_2 + u_3 &= V_2 + V_3 \end{aligned}$$

- a) $V_1 = 1, V_2 = V_3 = 0$; b) $V_2 = 1, V_1 = V_3 = 0$; c) $V_3 = 1, V_1 = V_2 = 0$,
d) $V_1 = 1, V_2 = 2, V_3 = 3$

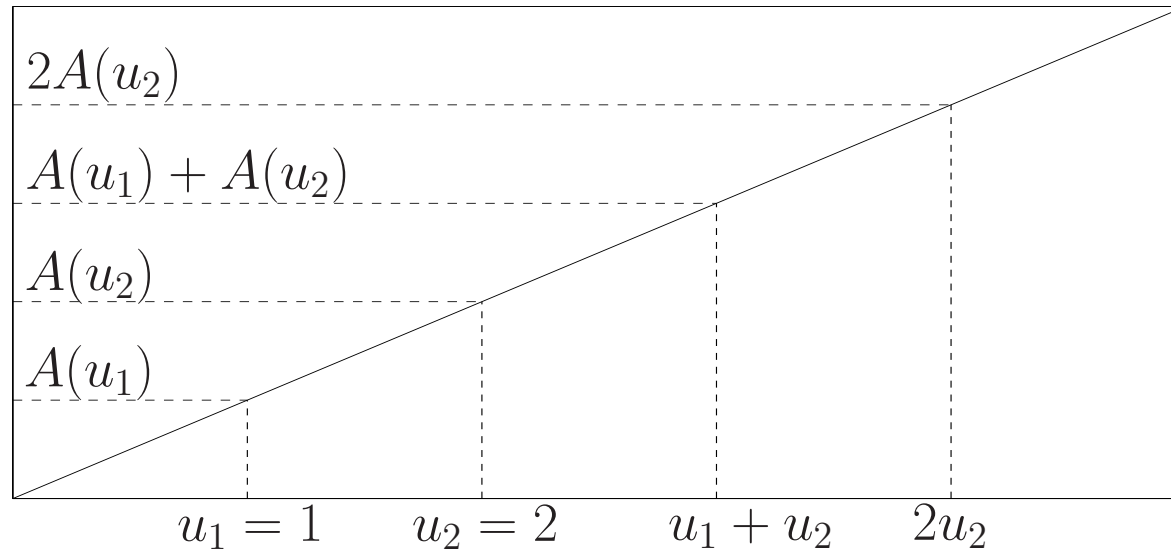
$$\mathbf{u}^a = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^b = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^c = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^d = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

Princip superpozice

$$1\mathbf{u}^a + 2\mathbf{u}^b + 3\mathbf{u}^c = 1 \begin{pmatrix} 5/8 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 5/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^d.$$

Princip superpozice = lineární zobrazení

Princip superpozice



Lineární zobrazení

Mějme vektorové prostory \mathcal{U} , \mathcal{V} . Zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je **lineární**, pokud

1. $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U} : A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = A(\mathbf{u}_1) + A(\mathbf{u}_2)$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U} : A(\alpha \mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u})$.

Lineární zobrazení

Příklad: $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A(\mathbf{x}) := x_1 - x_2$ je lineární zobrazení.

Ad 1. Vezměme libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, pak

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}).$$

Ad 2. Vezměme libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, pak

$$A(\alpha \mathbf{x}) = A(\alpha x_1, \alpha x_2) = \alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) = \alpha A(\mathbf{x}).$$

Příklad: $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $A(x) := x + 1$ není lineární zobrazení.

Ad 1. Vezměme libovolné $x, y \in \mathbb{R}$, pak

$$A(x + y) = (x + y) + 1 = (x + 1) + y = A(x) + y \neq A(x) + A(y).$$

Příklad: $A : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_0$, $A(a + bx) := \frac{d(a+bx)}{dx} = b$ je lineární zobrazení.

Ad 1. $A(p + q) = A((a + c) + (b + d)x) = b + d = A(a + bx) + A(c + dx) = A(p) + A(q).$

Ad 2. $A(\alpha p) = A(\alpha a + \alpha bx) = \alpha b = \alpha A(a + bx) = \alpha A(p).$

Lineární zobrazení

Příklad: $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, je lineární zobrazení.

Ad 1. Vezměme libovolné $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, pak

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{y} = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}).$$

Ad 2. Vezměme libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, pak

$$A(\alpha \mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{x}) = \alpha (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x}).$$

Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Každou soustavu rovnic lze chápat jako lineární úlohu

Pro $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ lze soustavu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

chápat jako úlohu: Hledáme $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Hledáme } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad A(\mathbf{x}) = \mathbf{b},$$

kde $A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je lineární zobrazení $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Lineární zobrazení

Princip superpozice

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, vektory $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathcal{V}$ a řešení $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{U}$ lineárních úloh

$$A(\mathbf{x}_1) = \mathbf{b}_1, \quad A(\mathbf{x}_2) = \mathbf{b}_2.$$

Vezměme lineární kombinaci pravých stran s $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, pak

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \quad \text{je řešením úlohy} \quad A(\mathbf{x}) = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2.$$

Příklad: Stejnoseměrný obvod

$$R_1 = \dots = R_5 = 1$$

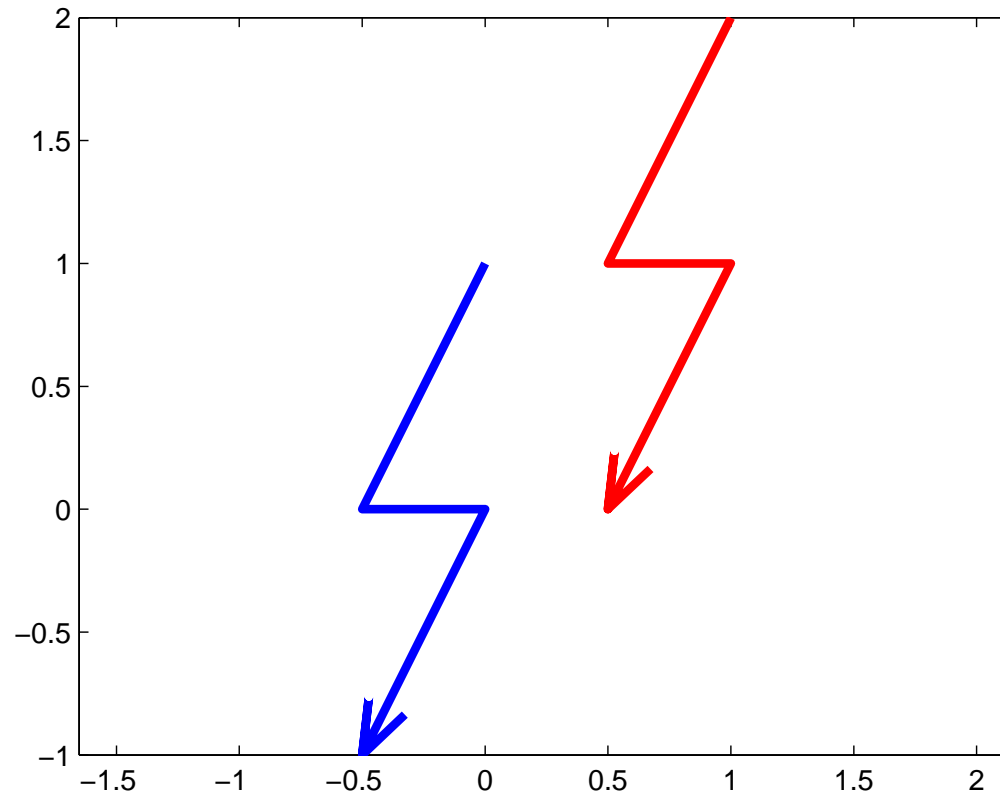
$$\begin{array}{l} \frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - u_1}{R_5} = 0 \\ -\frac{u_1 - V_1}{R_1} - \frac{u_2 - V_2}{R_2} - \frac{u_2 - u_3}{R_4} = 0 \\ \frac{u_2 - V_2}{R_2} + \frac{u_3 - V_3}{R_3} + \frac{u_2 - u_1}{R_5} = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2u_1 - u_2 = V_1 \\ -u_1 - 2u_2 + u_3 = -V_1 - V_2 \\ -u_1 + 2u_2 + u_3 = V_2 + V_3 \end{array}$$

$$A(\mathbf{u}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}, \quad \text{kde } \mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} := V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + V_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + V_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lineární zobrazení

Nenulové posunutí není lineární zobrazení

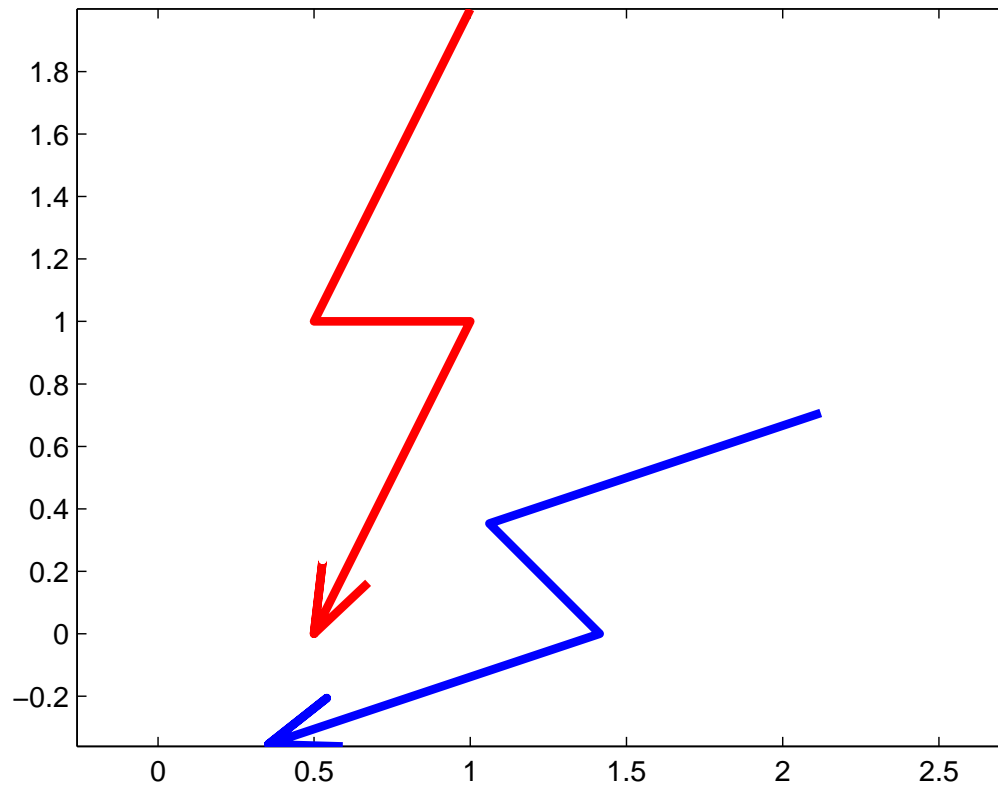
$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} := A(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{0}$$



Lineární zobrazení

Rotace podle počátku je lineární zobrazení

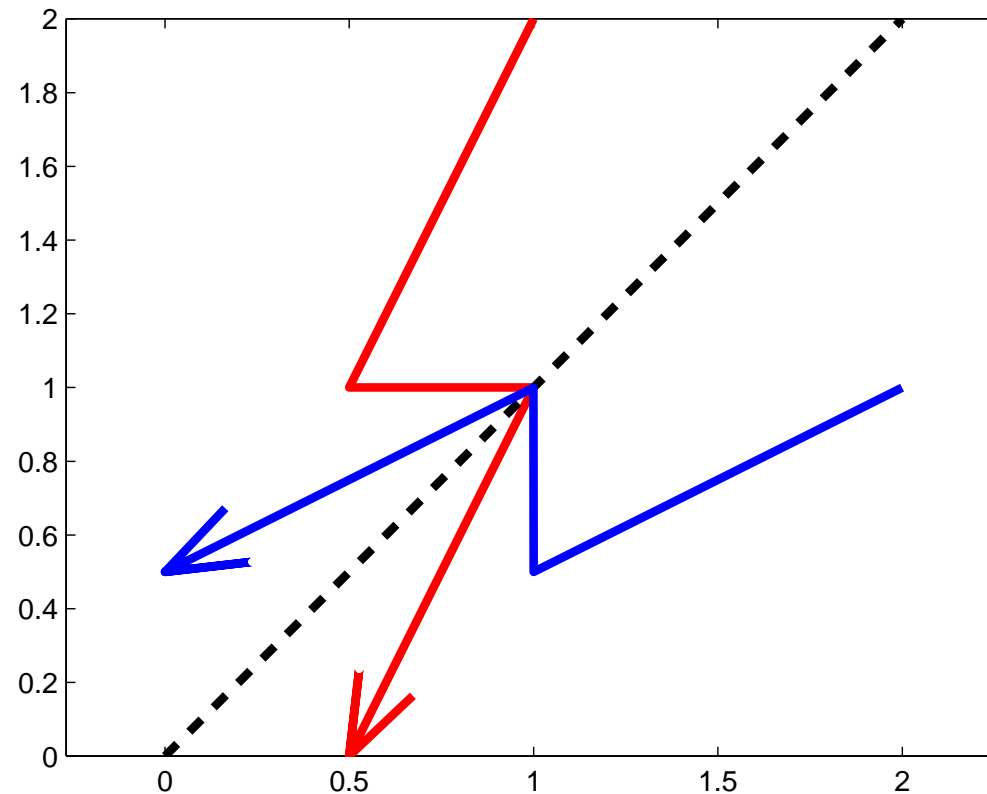
$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} := A(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}$$



Lineární zobrazení

Zrcadlení podle přímky procházející počátkem je lineární zobrazení

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} := A(\mathbf{x}) := \left(\mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^T}{\|\mathbf{n}\|^2} \right) \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{n} \text{ je normála k přímce}$$



Lineární zobrazení

Vlastnosti

Je-li $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ lineární zobrazení, pak platí

$$A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \quad A(-\mathbf{u}) = -A(\mathbf{u}).$$

$$\text{Důkaz: } A(\mathbf{0}) = A(0\mathbf{u}) \stackrel{2.}{=} 0A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad A(-\mathbf{u}) \stackrel{2.}{=} (-1)A(\mathbf{u}) = -A(\mathbf{u}).$$

Ekvivalentní definice lineárního zobrazení

Mějme vektorové prostory \mathcal{U} a \mathcal{V} . Zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je lineární, právě když obraz lineární kombinace je lineární kombinace obrazů, tj.

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathcal{U} : \quad \boxed{A(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n) = \alpha_1A(\mathbf{u}_1) + \dots + \alpha_nA(\mathbf{u}_n)}.$$

$$\text{Důkaz: } A(\alpha_1\mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n) \stackrel{1.,2.}{=} \alpha_1A(\mathbf{u}_1) + A(\alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{u}_n) \stackrel{1.,2.}{=} \dots$$

Lineární zobrazení

Lineární zobrazení je určeno obrazy bázových vektorů

Mějme vektorové prostory \mathcal{U} , \mathcal{V} , nechť $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je báze \mathcal{U} a nechť lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ je zadáno obrazy bázových vektorů, tj. známe $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n \in \mathcal{V}$:

$$\mathbf{f}_1 = A(\mathbf{e}_1), \quad \dots, \quad \mathbf{f}_n = A(\mathbf{e}_n).$$

Vezměme libovolný $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, pak

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n,$$

kde $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ jsou souřadnice \mathbf{u} v bázi E . Obraz této lineární kombinace je lineární kombinace známých obrazů

$$A(\mathbf{u}) = A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n) = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{f}_n.$$

Lineární zobrazení

Příklad: Je dáno $A(1, 1) = 1$, $A(1, -1) = 0$. Spočtěte $A(2, 3)$.

Vektor $\mathbf{u} := (2, 3)$ vyjádříme v bázi $E := (\mathbf{e}_1 := (1, 1), \mathbf{e}_2 := (1, -1))$, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1) = (2, 3)$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \alpha_2 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{5}{2}.$$

Obraz $A(\mathbf{u})$ je lineární kombinace obrazů bázevých vektorů

$$A(\mathbf{u}) = \alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 A(\mathbf{e}_2) = \frac{5}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) = \frac{5}{2}$$

Lineární zobrazení

Příklad: Je dáno $A(1 - x + x^2) = (1, 1)$, $A(1 + x - x^2) = (1, 0)$, $A(-1 + x + x^2) = (0, 1)$. **Spočtěte** $A(1)$.

Funkci $p(x) := 1$ vyjádříme v bázi $E := (1 - x + x^2, 1 + x - x^2, -1 + x + x^2)$, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \alpha_1(1 - x + x^2) + \alpha_2(1 + x - x^2) + \alpha_3(-1 + x + x^2) = 1 + 0x + 0x^2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obraz $A(1)$ je lineární kombinace obrazů bázových funkcí

$$\begin{aligned} A(1) &= \alpha_1 A(1 - x + x^2) + \alpha_2 A(1 + x - x^2) + \alpha_3 A(-1 + x + x^2) = \\ &= \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, 0) + 0(0, 1) = \\ &= (1, 1/2). \end{aligned}$$

Lineární zobrazení

Příklad: $A(1, 1) = 1$, $A(1, -1) = -1$. Najděte všechna $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$: $A(\mathbf{x}) = 1$.

Najdeme všechny lineární kombinace $v_1 := 1$ a $v_2 := -1$, které dávají $v := 1$, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1 1 + \alpha_2(-1) = 1 \rightarrow \alpha_1 = 1 + t, \alpha_2 = t, t \in \mathbb{R}.$$

Vzorem $\mathbf{x} : A(\mathbf{x}) = v$ jsou stejné lineární kombinace vektorů $(1, 1)$ a $(1, -1)$

$$\mathbf{x} = \alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, -1) = (1 + t)(1, 1) + t(1, -1) = (1, 1) + t(2, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Výsledky tvoří přímku v \mathbb{R}^2 .

Lineární zobrazení

Příklad: Je dáno $A(1 - x + x^2) = (1, 1)$, $A(1 + x - x^2) = (1, 0)$, $A(-1 + x + x^2) = (0, 1)$. **Najděte všechny** $p(x) \in \mathcal{P}_2$: $A(p) = (0, 0)$.

Najděme všechny lineární kombinace $(1, 1)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$, které dávají $(0, 0)$, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(1, 0) + \alpha_3(0, 1) = (0, 0)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \alpha_3 = t, \alpha_2 = t, \alpha_1 = -t, t \in \mathbb{R}.$$

Vzorem $p(x) : A(p(x)) = (0, 0)$ jsou stejné lineární kombinace vzorů bázových funkcí $1 - x + x^2$, $1 + x - x^2$ a $-1 + x + x^2$

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha_1(1 - x + x^2) + \alpha_2(1 + x - x^2) + \alpha_3(-1 + x + x^2) = \\ &= -t(1 - x + x^2) + t(1 + x - x^2) + t(-1 + x + x^2) = \\ &= t(-1 + 3x - x^2), t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lineární zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$.

Nulový prostor

$$\mathcal{N}(A) := \{\mathbf{u} \in \mathcal{U} : A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$$

je podprostor \mathcal{U} .

Obor hodnot

$$\mathcal{H}(A) := \{A(\mathbf{u}) \in \mathcal{V} : \mathbf{u} \in \mathcal{U}\}.$$

je podprostor \mathcal{V} .

„Zákon zachování dimenze“

$$\underbrace{\dim \mathcal{N}(A)}_{=:d(A)} + \underbrace{\dim \mathcal{H}(A)}_{=:h(A)} = \dim \mathcal{U},$$

kde $d(A)$ se nazývá **defekt** a $h(A)$ se nazývá **hodnota** zobrazení A .

Lineární zobrazení

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, které definuje zobrazení $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, kde $A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$.

Nulový prostor matice = nulový prostor lineárního zobrazení

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} = \mathcal{N}(A)$$

a $d(\mathbf{A}) := d(A) = \dim \mathcal{N}(A)$ nazýváme také **defekt matice**.

Sloupcový prostor matice = obor hodnot lineárního zobrazení

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \{A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \mathcal{H}(A)$$

a $h(\mathbf{A}) = h(A) = \dim \mathcal{H}(A)$ jsme minule definovali jako **hodnost matice**.

„Zákon zachování dimenze“ pro matice

$$d(\mathbf{A}) + h(\mathbf{A}) = n.$$

Lineární zobrazení

Příklad: Je dáno lin. zobr. $A(1, 1, -1) = (1, 1)$, $A(1, -1, 0) = (-2, 0)$, $A(1, 1, 1) = (0, 1)$. **Vypočtěte** $\mathcal{N}(A)$, $d(A)$, $\mathcal{H}(A)$, $h(A)$.

Pro výpočet nulového prostoru vyjádříme $(0, 0)$ jako lin. kombinaci obrazů báze, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1, 1) + \alpha_2(-2, 0) + \alpha_3(0, 1) = (0, 0),$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \alpha_3 = t, \alpha_2 = -\frac{1}{2}t, \alpha_1 = -t, t \in \mathbb{R}.$$

Nulový prostor obsahuje stejné lineární kombinace vektorů

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ -t(1, 1, -1) - \frac{1}{2}t(1, -1, 0) + t(1, 1, 1) : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2 \right) \right\rangle, d(A) = 1.$$

Ze zákona zachování dimenze víme, že

$$h(A) = n - d(A) = \dim \mathbb{R}^3 - d(A) = 3 - 1 = 2.$$

Zároveň je obor hodnot podprostorem \mathbb{R}^2 , musí tedy platit

$$\mathcal{H}(A) = \mathbb{R}^2.$$

Lineární zobrazení

Příklad: Je dáno lin. zobr. $A : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ obrazy báze $A(1 - x) = (1, -1, 1)$, $A(1 + x) = (0, 1, 2)$. Vypočtěte $\mathcal{N}(A)$, $d(A)$, $\mathcal{H}(A)$, $h(A)$.

Pro výpočet nulového prostoru vyjádříme $(0, 0, 0)$ jako lin. kombinaci obrazů báze, tj. hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\alpha_1(1, -1, 1) + \alpha_2(0, 1, 2) = (0, 0, 0),$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Nulový prostor obsahuje stejné lineární kombinace vektorů

$$\mathcal{N}(A) = \{0(1 - x) + 0(1 + x) \in \mathcal{P}_1\} = \{0\}.$$

Ze zákona zachování dimenze víme, že

$$h(A) = n - d(A) = \dim \mathcal{P}_1 - d(A) = 2 - 0 = 2.$$

Zároveň je obor hodnot prostorem $\langle (1, -1, 1), (0, 1, 2) \rangle$, a máme tedy i bázi $\mathcal{H}(A)$:

$$F := ((1, -1, 1), (0, 1, 2)).$$

Lineární zobrazení

Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Matice lineárního zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathcal{U} a bázi $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ prostoru \mathcal{V} . Vezměme $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E , tj.

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Vyjádřeme obraz $A(\mathbf{u}) \in \mathcal{V}$ v bázi F

$$\begin{aligned} [A(\mathbf{u})]_F &= [A(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n)]_F = [\alpha_1 A(\mathbf{e}_1) + \dots + \alpha_n A(\mathbf{e}_n)]_F \\ &= \underbrace{([A(\mathbf{e}_1)]_F, \dots, [A(\mathbf{e}_n)]_F)}_{=: \mathbf{A}_{E,F}} \cdot [\mathbf{u}]_E, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{A}_{E,F} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím E a F .

Matice lineárního zobrazení

Každou matici lze chápat jako lineární zobrazení.

Mějme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, pak následující zobrazení $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ je lineární

$$A(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}.$$

Každé lineární zobrazení lze vyjádřit maticí

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, bázi $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ prostoru \mathcal{U} a bázi $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ prostoru \mathcal{V} . Vezměme $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ a jeho souřadnice $[\mathbf{u}]_E = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ v bázi E . Obraz $A(\mathbf{u}) \in \mathcal{V}$ v bázi F je

$$[A(\mathbf{u})]_F = \mathbf{A}_{E,F} \cdot [\mathbf{u}]_E,$$

kde $\mathbf{A}_{E,F} := ([A(\mathbf{e}_1)]_F, \dots, [A(\mathbf{e}_n)]_F) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je **matice lineárního zobrazení** vzhledem k bázím E a F .

Matice lineárního zobrazení

Příklad: Je dáno lineární zobrazení obrazy báze E : $A(1, -1, 1) = (1, 2)$, $A(1, 1, -1) = (1, -1)$, $A(-1, 1, 1) = (0, 1)$. Vypočtěte $\mathbf{A}_{E,F}$ v bázích E a kanonické bázi F .

$$E := (\mathbf{e}_1 := (1, -1, 1), \mathbf{e}_2 := (1, 1, -1), \mathbf{e}_3 := (-1, 1, 1)), \quad F := (\mathbf{f}_1 := (1, 0), \mathbf{f}_2 := (0, 1)).$$

Souřadnice obrazů v bázi F už vlastně máme

$$[A(\mathbf{e}_1)]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad [A(\mathbf{e}_2)]_F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [A(\mathbf{e}_3)]_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a tedy i matici lineárního zobrazení

$$[\mathbf{A}]_{E,F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení

Příklad: Je dáno lineární zobrazení obrazy báze $A(1, -1, 1) = (1, 2)$, $A(1, 1, -1) = (1, -1)$, $A(-1, 1, 1) = (0, 1)$. Vypočtěte $\mathbf{A}_{E,F}$ v kanonických bázích E a F .

$$E := (\mathbf{e}_1 := (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0), \mathbf{e}_3 := (0, 0, 1)), \quad F := (\mathbf{f}_1 := (1, 0), \mathbf{f}_2 := (0, 1)).$$

Spočtěme souřadnice bázových vektorů E v bázi, v níž je zadáno A ,

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\mathbf{r}_1 := 2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_i := (1/2)\mathbf{r}_i} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{I} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Matice lineárního zobrazení v bázích E, F je pak tato

$$\mathbf{A}_{E,F} = ([A(\mathbf{e}_1)]_F, [A(\mathbf{e}_2)]_F, [A(\mathbf{e}_3)]_F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice lineárního zobrazení

Podobné matice

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, tzv. **lineární transformace**, a báze E, F prostoru \mathcal{V} . Pak

$$\mathbf{A}_{F,F} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{E,E} \cdot \mathbf{T},$$

kde \mathbf{T} je matice přechodu od báze E do báze F a $\mathbf{A}_{E,E}$, $\mathbf{A}_{F,F}$ se nazývají **podobné matice**.

Matice složeného zobrazení

Mějme lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $B : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ a báze E, F, G , respektive, vektorových prostorů $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$. Definujme složené zobrazení $C : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$, $C(\mathbf{u}) := B(A(\mathbf{u}))$. Pak C je opět lineární a

$$\mathbf{C}_{E,G} = \mathbf{B}_{F,G} \cdot \mathbf{A}_{E,F}.$$