# Lineární algebra — 5. přednáška: Báze a řešitelnost soustav

**Dalibor Lukáš**

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

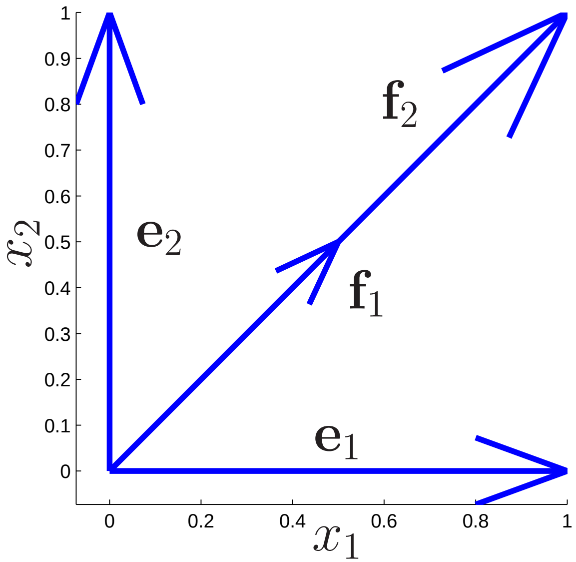
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Báze vektorového prostoru

## Báze

je uspořádaná množina vektorů generující jednoznačně celý prostor.




- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$, a tedy generují $\mathbb{R}^2$ jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

- $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ netvoří bázi $\mathbb{R}^2$, nesplňují 2. ani 3.
- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2$ netvoří bázi $\mathbb{R}^2$, nejsou lin. nezávislé:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{f}_2.$$

- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$, a tedy generují $\mathbb{R}^2$ jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x} = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{f}_2.$$

# Báze vektorového prostoru

## Báze

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. Uspořádaná množina nenulových vektorů $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ tvoří **bázi vektorového prostoru** $\mathcal{V}$, pokud

1. $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$,
2. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ jsou lineárně nezávislé,
3. libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je lineární kombinací $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, tj.

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \ldots \alpha_n \mathbf{f}_n = \mathbf{v}.$$

## Souřadnice vektoru v bázi, dimenze

Platí, že lineární kombinace je pro bázi vždy jednoznačná. Výsledné koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazýváme **souřadnice vektoru v v bázi** $F$ a značíme $[\mathbf{v}]_F := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Platí, že počet bázových vektorů $n$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je vždy stejný, říkáme mu **dimenze** $\mathcal{V}$ a značíme $\dim \mathcal{V} := n$.

# Báze vektorového prostoru

## Jednoznačnost souřadnic

Mějme bázi $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ a buď $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Souřadnicový vektor $[\mathbf{v}]_F \in \mathbb{R}^n$ je jednoznačný.

## Důkaz sporem

Předpodkládejme, že existují dva různé souřadnicové vektory $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$, tedy dvě různé lineární kombinace

$$\begin{aligned} \alpha_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{f}_n &= \mathbf{v}, \\ \beta_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_n\mathbf{f}_n &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

Odečtením rovnic dostáváme

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{f}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{f}_n = \mathbf{0}.$$

Jelikož vektory báze jsou lineárně nezávislé, poslední rovnice má pouze triviální řešení

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n - \beta_n = 0,$$

což je spor s předpokladem, tudíž souřadnice jsou jednoznačné.

# Báze vektorového prostoru

## Dimenze je jednoznačná

Mějme báze $E := (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ a $F := (\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Pak $m = n$.

## Důkaz, jak jinak než sporem

Předpokládejme, že $m > n$ (případ $n > m$ se vyvrátí analogicky). Jelikož $E$ je báze, máme jednoznačné souřadnicové vektory $[\mathbf{f}_i]_E$ tak, že např.

$$\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1^1\mathbf{e}_1 & + & \dots & + & \alpha_n^1\mathbf{e}_n & = & \mathbf{f}_1, \\
 & & & & & \vdots & \\
\alpha_1^n\mathbf{e}_1 & + & \dots & + & \alpha_n^n\mathbf{e}_n & = & \mathbf{f}_n, \\
\alpha_1^{n+1}\mathbf{e}_1 & + & \dots & + & \alpha_n^{n+1}\mathbf{e}_n & = & \mathbf{f}_{n+1}.
\end{array}$$

Ukážeme, že $\mathbf{f}_{n+1}$ je lineární kombinací $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$, tj. že existují $\beta_1, \dots, \beta_n$:

$$\beta_1\mathbf{f}_1 + \dots + \beta_n\mathbf{f}_n = \mathbf{f}_{n+1}.$$

# Báze vektorového prostoru

## Dimenze je jednoznačná

Mějme báze $E := (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ a $F := (\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m)$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$. Pak $m = n$.

## Pokračování důkazu

Rozepíšeme-li levou i pravou stranu pomocí souřadnic v bázi $E$, dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^i \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{n+1} \mathbf{e}_j,$$

což díky lineární nezávislosti $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ vede na následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{n+1} \\ \vdots \\ \alpha_n^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Matice soustavy je regulární, jinak by sloupce $\boldsymbol{\alpha}^i$ byly lineárně závislé, ale pak by byly lineárně závislé i vektory $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$. Soustava tedy má jednoznačné řešení a $\mathbf{f}_{n+1}$ je lineárně kombinací $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, tudíž $F$ není báze. Předpoklad $m > n$ byl mylný.

# Báze vektorového prostoru

**Příklad: Najděte bázi $\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \; x_1 + x_2 = 0\}$.**

Hledáme parametrické vyjádření prostoru $\mathcal{U}$. Řešíme „soustavu"

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Pro vyjádření nekonečně mnoha řešení, zavedeme parametr

$$x_2 := t \in \mathbb{R}$$

a dopočteme

$$x_1 = -x_2 = -t.$$

Zjistili jsme, že

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{x} = (-t, t) : \; t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} = t(-1, 1) : \; t \in \mathbb{R}\},$$

a tedy libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je lineární kombinací jediného bázového vektoru

$$F := (\mathbf{f}_1 := (-1, 1)).$$

Dimenze $\mathcal{U}$ je 1. $\mathcal{U}$ je přímka v $\mathbb{R}^2$ procházející počátkem.

# Báze vektorového prostoru

**Příklad: Najděte bázi $\mathcal{U} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.**

Řešíme soustavu

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Zavedeme parametry

$$x_3 := t \in \mathbb{R}, \quad x_2 := s \in \mathbb{R}$$

a dosadíme

$$x_1 = -x_2 - x_3 = -s - t.$$

Dostáváme parametrické vyjádření prostoru

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{x} = (-s - t, s, t) : \; s, t \in \mathbb{R}\} = \{\mathbf{x} = s(-1, 1, 0) + t(-1, 0, 1) : \; s, t \in \mathbb{R}\},$$

a tedy libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ je lineární kombinací dvou bázových vektorů

$$F := (\mathbf{f}_1 := (-1, 1, 0), \mathbf{f}_2 := (-1, 0, 1)\}.$$

Dimenze $\mathcal{U}$ je 2. Jedná se o rovinu v $\mathbb{R}^3$ procházející počátkem.

# Báze vektorového prostoru

**Příklad: Najděte bázi** $\mathcal{U} := \{p(x) := \sum_{i=0}^{2} a_i x^i : \; a_0 + a_1 = 0, \; a_0 - a_1 + a_2 = 0\}$**.**

Řešíme soustavu (nulovou pravou stranu neopisujeme)

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & + & a_1 & & & = & 0, \\ a_0 & - & a_1 & + & a_2 & = & 0, \end{array} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme parametr

$$a_2 := t \in \mathbb{R}$$

a dosadíme

$$a_1 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{2} t, \quad a_0 = -a_1 = -\frac{1}{2} t.$$

Dostáváme parametrické vyjádření prostoru

$$\mathcal{U} := \left\{ p(x) = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} t x + t x^2 : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ p(x) = t \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x + x^2 \right) : \; t \in \mathbb{R} \right\},$$

a tedy

$$F := \left( f_1(x) := -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} x + x^2 \right), \quad \dim \mathcal{U} = 1.$$

# Báze vektorového prostoru

**Příklad: Vypočtěte souřadnice $[(1,2)]_F$ v bázi $F := ((1,1),(1,-1))$.**

Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ lineární kombinace

$$\alpha_1(1,1) + \alpha_2(1,-1) = (1,2).$$

Řešíme tedy soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Řešení je

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_2 = \frac{3}{2},$$

a tedy

$$[(1,2)]_F = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

# Báze vektorového prostoru

**Příklad: Vypočtěte souřadnice $[1-x+x^2]_F$ v bázi $F := (1-x-x^2, 1+x-x^2, -1+x+2x^2)$.**

Hledáme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ lineární kombinace

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \alpha_1(1-x-x^2) + \alpha_2(1+x-x^2) + \alpha_3(-1+x+2x^2) = 1-x+x^2,$$

tj.

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)+x(-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+x^2(-\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3) = 1+(-1)x+1x^2.$$

Díky lineární nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ stačí porovnat koeficienty u těchto funkcí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Řešení je

$$\alpha_3 = 2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 = 1-\alpha_2+\alpha_3 = 3, \quad \text{a tedy} \quad [1-x+x^2]_F = (3,0,2).$$

Zkouška: $3(1-x-x^2) + 0(1+x-x^2) + 2(-1+x+2x^2) = 1-x+x^2$.

# Báze vektorového prostoru

## Báze a souřadnice převádějí úlohy do $\mathbb{R}^n$

$$\text{Lineární úloha ve } \mathcal{V} \quad \xrightarrow{\text{báze } \mathcal{V}\text{, souřadnice}} \quad \text{lineární úloha v } \mathbb{R}^n.$$

## Příklad: Jsou $1 - x - x^2$, $1 + x + x^2$ a $1 - x + x^2$ lineárně nezávislé?

Vezměme kanonickou bázi $E := (1, x, x^2)$ prostoru $\mathcal{P}_2$. Příslušné souřadnicové vektory jsou tyto

$$[1-x-x^2]_E = (1, -1, -1), \quad [1+x+x^2]_E = (1, 1, 1), \quad [1-x+x^2]_E = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

Řešíme ekvivalentní úlohu v $\mathbb{R}^3$: Jsou $(1, -1, -1)$, $(1, 1, 1)$ a $(1, -1, 1)$ lin. nezávislé?

$$\alpha_1(1, -1, -1) + \alpha_2(1, 1, 1) + \alpha_3(1, -1, 1) = (0, 0, 0),$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Jediné řešení je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, odpověď na obě úlohy (v $\mathbb{R}^3$ i v $\mathcal{P}_2$) tedy je

Ano, jsou lineárně nezávislé.

# Báze vektorového prostoru

## Lineární obal

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. **Lineární obal vektorů** $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$ je množina všech jejich lineárních kombinací, značíme

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle := \{\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}\,.$$

Lineární obal tvoří podprostor $\mathcal{V}$.

## Ekvivalentní definice báze

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. Uspořádaná množina nenulových vektorů $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ tvoří **bázi vektorového prostoru** $\mathcal{V}$, pokud

1. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ jsou lineárně nezávislé,
2. $\langle \mathbf{f}_l, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n \rangle = \mathcal{V}$.

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Sloupcový prostor matice $\mathcal{S}(\mathbf{A})$

je lineární obal sloupců matice $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1^{\mathrm{s}}, \ldots, \mathbf{a}_n^{\mathrm{s}}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, tj.

$$\mathcal{S}(\mathbf{A}) := \{\alpha_1 \mathbf{a}_1^{\mathrm{s}} + \alpha_2 \mathbf{a}_2^{\mathrm{s}} + \cdots + \alpha_n \mathbf{a}_n^{\mathrm{s}} : \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} .$$

To nám umožňuje zkráceně zapsat podmínku řešitelnosti soustavy lin. rovnic

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}).$$

## Hodnost matice

je dimenze sloupcového prostoru matice $\mathbf{A}$, značíme $h(\mathbf{A}) := \dim \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

**Příklad: Najděte bázi $\mathcal{S}(\mathbf{A})$,**

kde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stačí zjistit, které ze sloupců jsou lineárně závislé na ostatních. Řešíme

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\alpha_2$ a $\alpha_4$ jsou tzv. volné neznámé, báze $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ sestává z pivotovaných sloupců

$$F := \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad h(A) = 2.$$

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Řádková hodnost = sloupcová hodnost

Řádková hodnost je dimenze lineárního obalu řádků matice, tj. počet lineárně nezávislých řádků, a platí, že je rovna sloupcové hodnosti. Tedy

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T).$$

## Příklad: Vypočtěte řádkovou hodnost A,

kde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_4=\mathbf{r}_4-2\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_4:=2\mathbf{r}_4-3\mathbf{r}_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h(\mathbf{A}^T) = 2.$$

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Nulový prostor (jádro) matice A

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\} \, .$$

## Obecné řešení soustavy lineárních rovnic

Uvažujme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{m}$ a soustavu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Máme-li libovolné tzv. partikulární řešení $\mathbf{x}^{\mathrm{P}}$ této soustavy, pak obecné řešení se bude lišit od partikulárního právě o vektory z jádra matice $\mathbf{A}$, tj.

$$\forall \mathbf{x}^{\mathrm{H}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) : \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x}^{\mathrm{H}} + \mathbf{x}^{\mathrm{P}}) = \mathbf{b}, \quad \text{kde } \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{P}} = \mathbf{b}.$$

Vektorům $\mathbf{x}^{\mathrm{H}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ říkáme homogenní řešení, neboť řeší homogenní (s nulovou pravou stranou) soustavu

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{\mathrm{H}} = \mathbf{0}.$$

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Výpočet báze jádra matice — Gaussova eliminace s parametrizací

Najděme nějakou bázi $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, kde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - 3\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Za nepivotované proměnné zavedeme parametry

$$\alpha_4 = t \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 = s \in \mathbb{R},$$

zpětně dosadíme a dostáváme

$$\alpha_3 = -2\alpha_4 = -2t, \quad \alpha_1 = -2\alpha_2 - 2\alpha_3 - 2\alpha_4 = -6t - 2s.$$

Nulový prostor má tedy tvar

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} = (-6t - 2s, s, -2t, t) : \ t, s \in \mathbb{R}\} = \langle (-6, 0, -2, 1), (-2, 1, 0, 0) \rangle$$

a jeho báze je

$$N := (\mathbf{n}_1 := (-6, 0, -2, 1), \mathbf{n}_2 := (-2, 1, 0, 0)).$$

Lineární nezávislost $N$ bychom ještě raději měli ověřit z definice.

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Výpočet báze $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ — Gauss–Jordanova metoda s „nulovými pivoty"

Najděme nějakou bázi $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, kde

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-3\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pokračujeme dále Jordanovou metodou pro pivotované sloupce 1 a 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_1:=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathbf{r}_2:=(1/2)\mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

což je redukovaná matice soustavy s pivot. sloupci 1 a 3 a volnými sloupci 2 a 4.

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Výpočet báze $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ — Gauss–Jordanova metoda s „nulovými pivoty”

Máme redukovanou matici soustavy s pivot. sloupci 1 a 3 a volnými sloupci 2 a 4

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} =: (\mathbf{I}\mathbf{F}) \,.$$

Permutujme sloupce

$$\widetilde{\mathbf{R}} := (\mathbf{I} \;\; \mathbf{F}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Nyní najdeme bázi $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ pomocí matice $\widetilde{\mathbf{N}}$:

$$\widetilde{\mathbf{R}} \cdot \widetilde{\mathbf{N}} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \widetilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a po zpětné permutaci} \quad \mathbf{N} := \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

**Báze $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ je** $((-2, 1, 0, 0), (2, 0, -2, 1))$**.** Zkouška: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$.

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Podmínka řešitelnosti

$$\exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A}).$$

## Obecné řešení soustavy lineárních rovnic

Uvažujme $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$. Označme hodnost matice

$$h := h(\mathbf{A}).$$

Pak máme $r$ pivotovaných sloupců/neznámých a $n - h$ volných sloupců/proměnných.
Za volné proměnné dosazujeme $n - h$ parametrů.

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Obecná Gauss–Jordanova metoda pro $0$, $1$ i $\infty$ řešení

1. $(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \xrightarrow{\text{Gaussova (dopředná) eliminace}} (\mathbf{U}|\mathbf{c})$
2. Pokud $\mathbf{c} \notin \mathcal{S}(\mathbf{U})$ soustava nemá řešení, jinak

$$(\mathbf{U}|\mathbf{c}) \xrightarrow{\text{Jordanova (zpětná) eliminace}} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{R} & \mathbf{x}^{\mathrm{P}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

3. Pokud $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, pak $\mathbf{x}^{\mathrm{P}}$ je jediným řešením, jinak

$$\mathbf{R} \xrightarrow{\text{záměna sloupců}} \widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{záměna řádků}} \mathbf{N}.$$

4. Soustava má $\infty$ řešení ve tvaru

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}^{\mathrm{P}} + \underbrace{\mathbf{N} \cdot \mathbf{t}}_{=\mathbf{x}^{\mathrm{H}}},$$

kde $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-h}$ je vektor parametrů.

# Báze a řešitelnost soustav lineárních rovnic

## Frobeniova věta

Uvažujme soustavu lin. rovnic

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$. Označme hodnost matice $h := h(\mathbf{A})$.

- Pokud $\mathbf{b} \notin \mathcal{S}(\mathbf{A})$, pak soustava nemá řešení.
- Pokud $\mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $h = n \leq m$ pak redukovaná matice soustavy

  $$\mathbf{R} = \mathbf{I}$$

  a soustava má právě jedno řešení.
- Pokud $\mathbf{b} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ a $h \leq m$ a $h < n$, pak

  $$\widetilde{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{F} \end{pmatrix}$$

  a soustava má $\infty$ řešení, zavádíme $n - h$ parametrů.