Lineární algebra — 4. přednáška: Vektorové prostory

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1

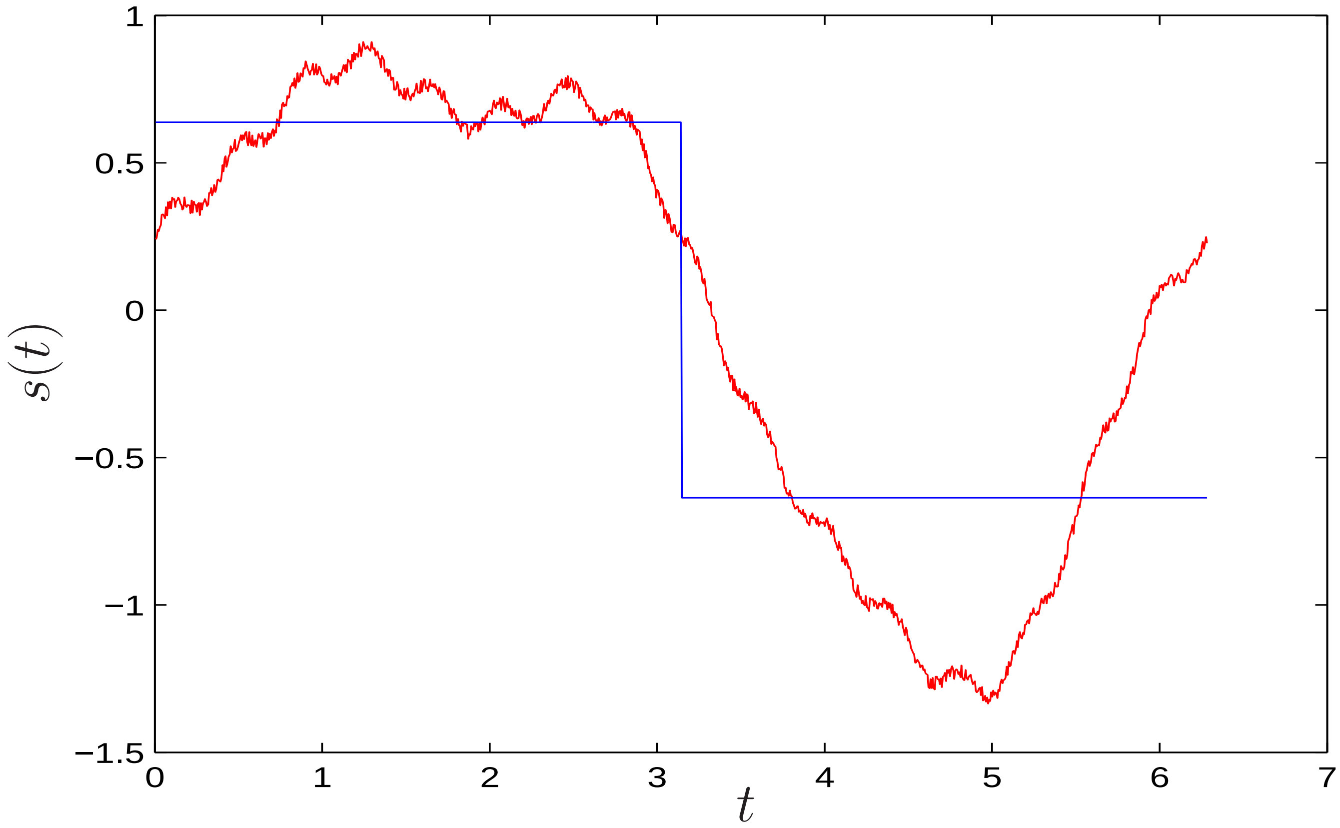
Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

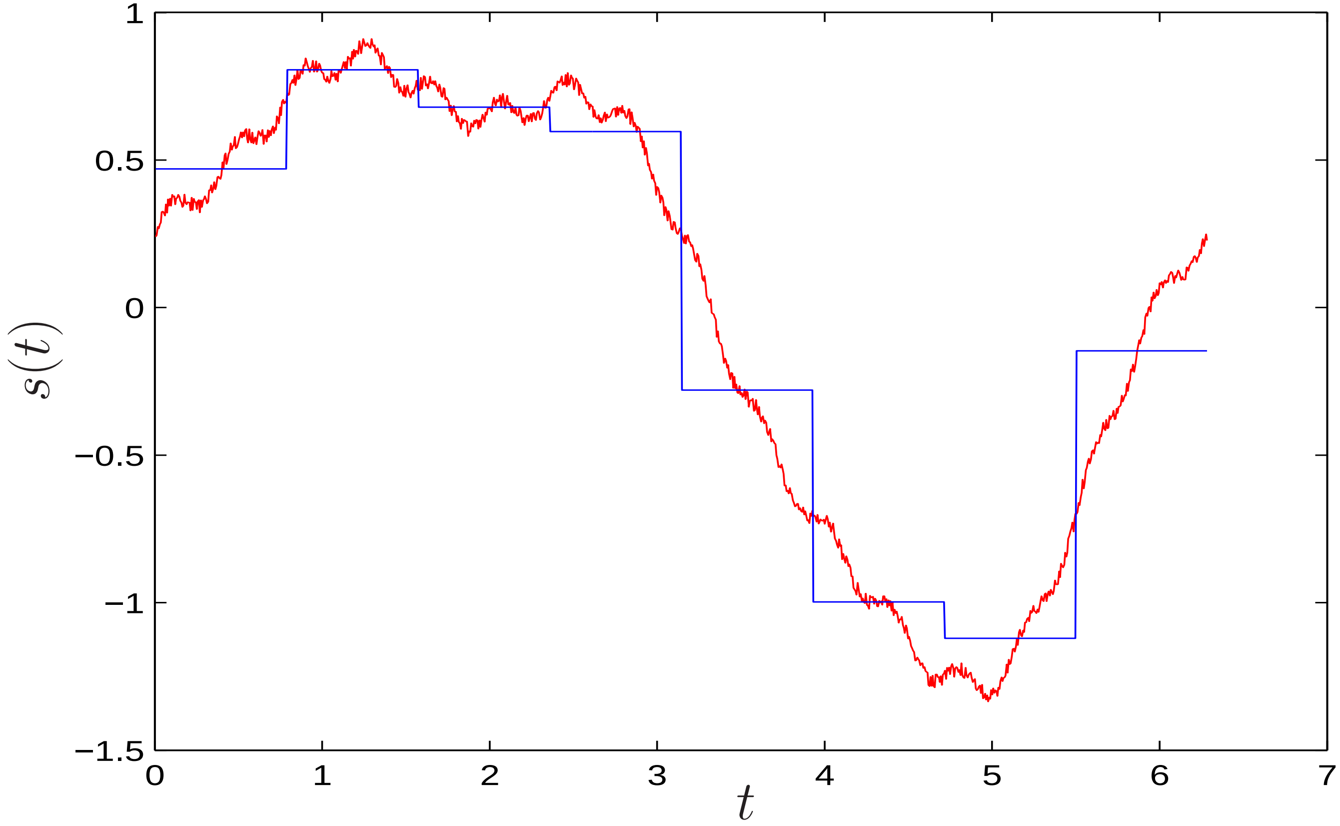
Motivace

Komprese signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 0.2%



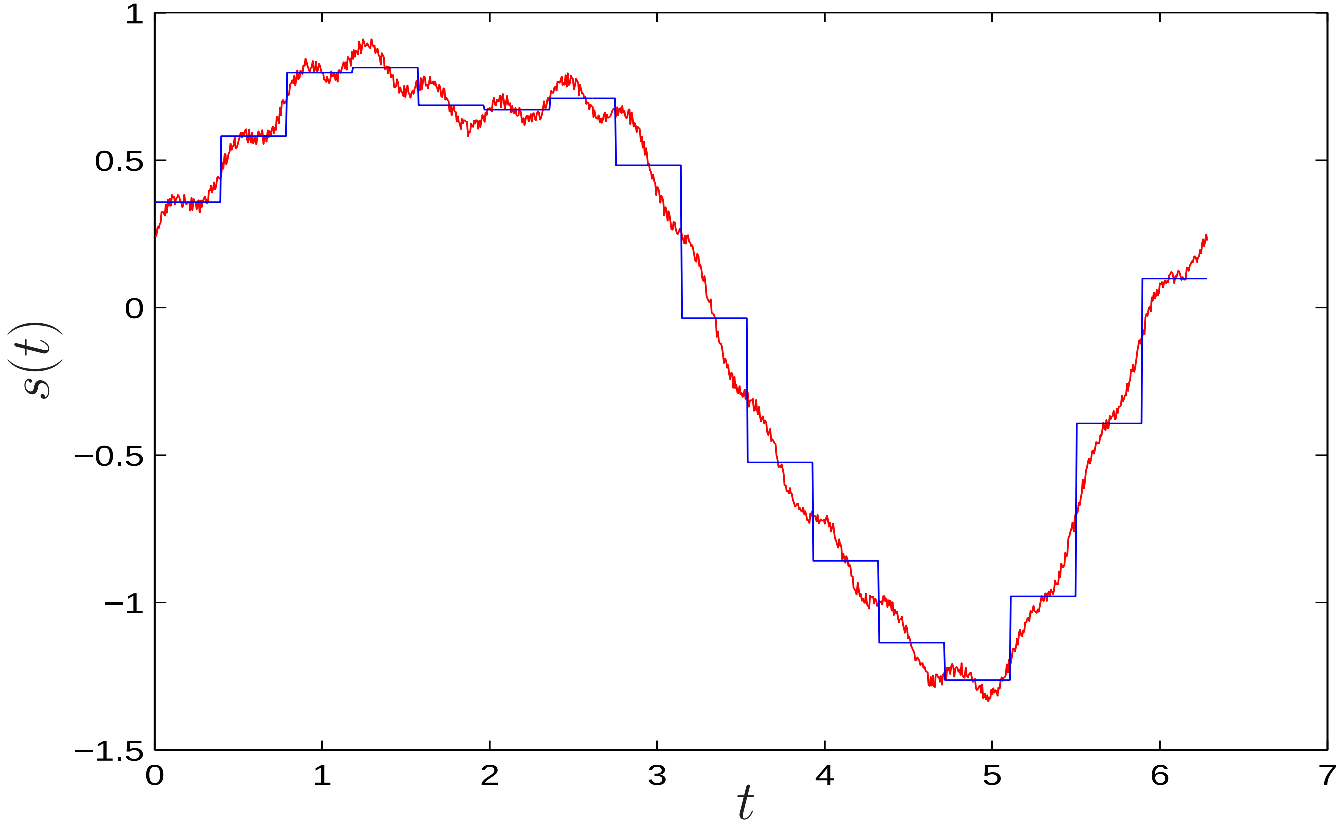
Motivace

Komprese signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 0.8%



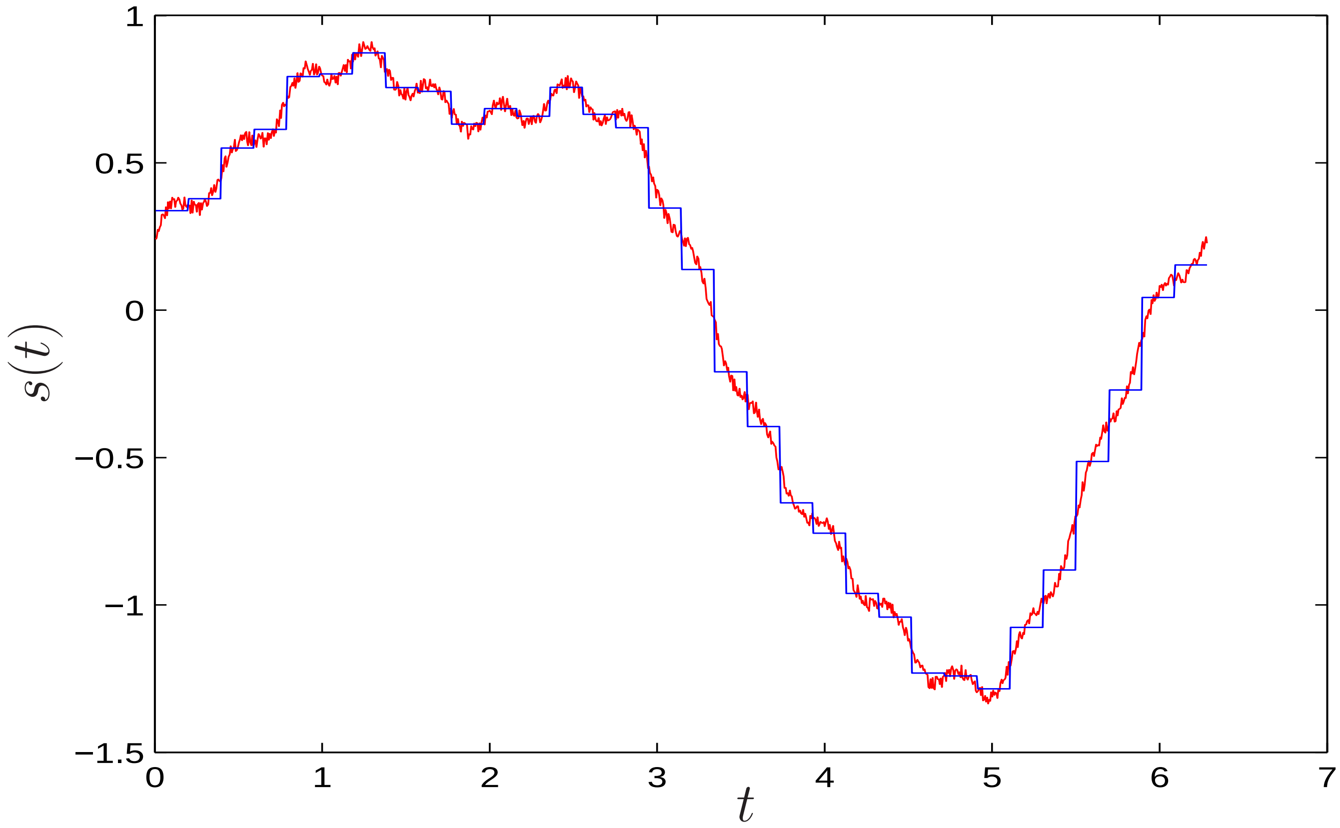
Motivace

Komprese signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 1.6%



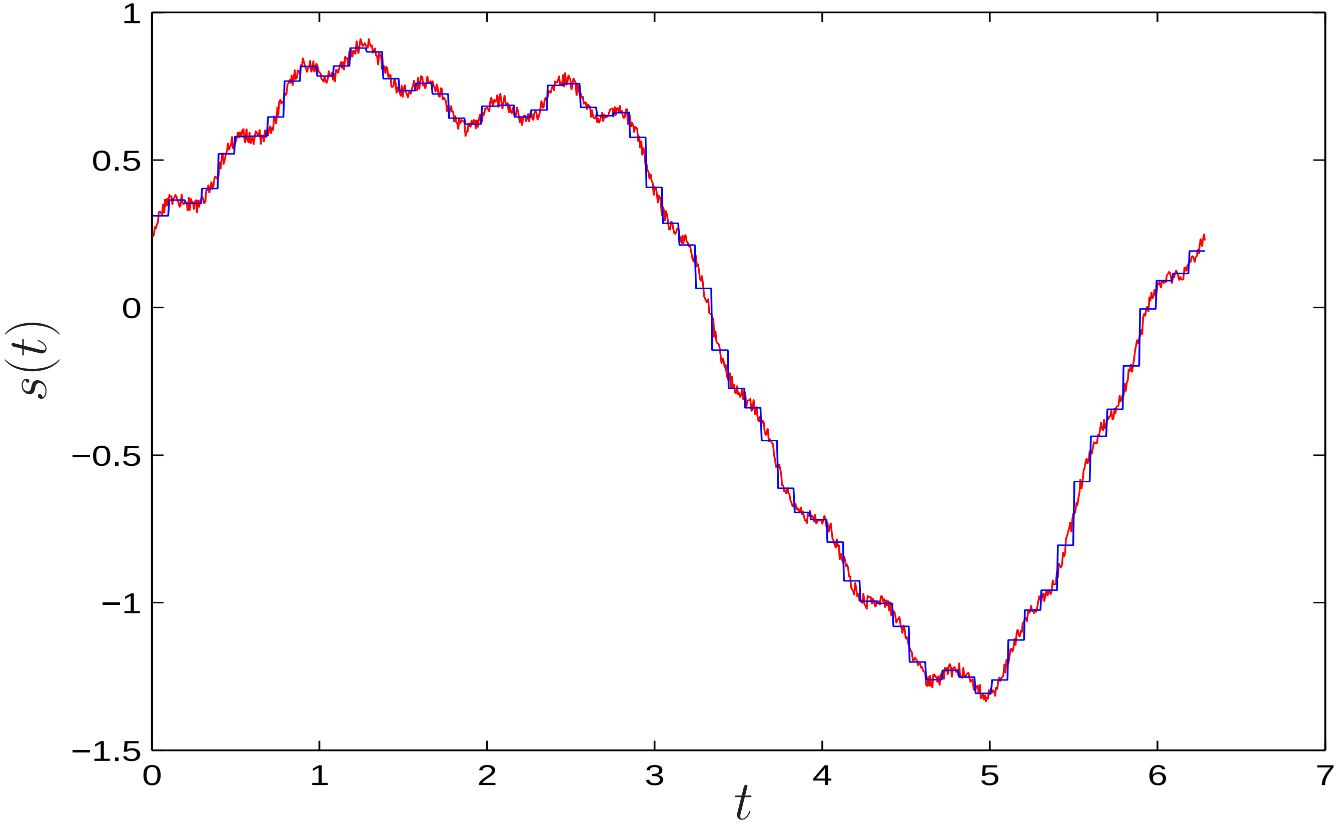
Motivace

Komprese signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 3.1%



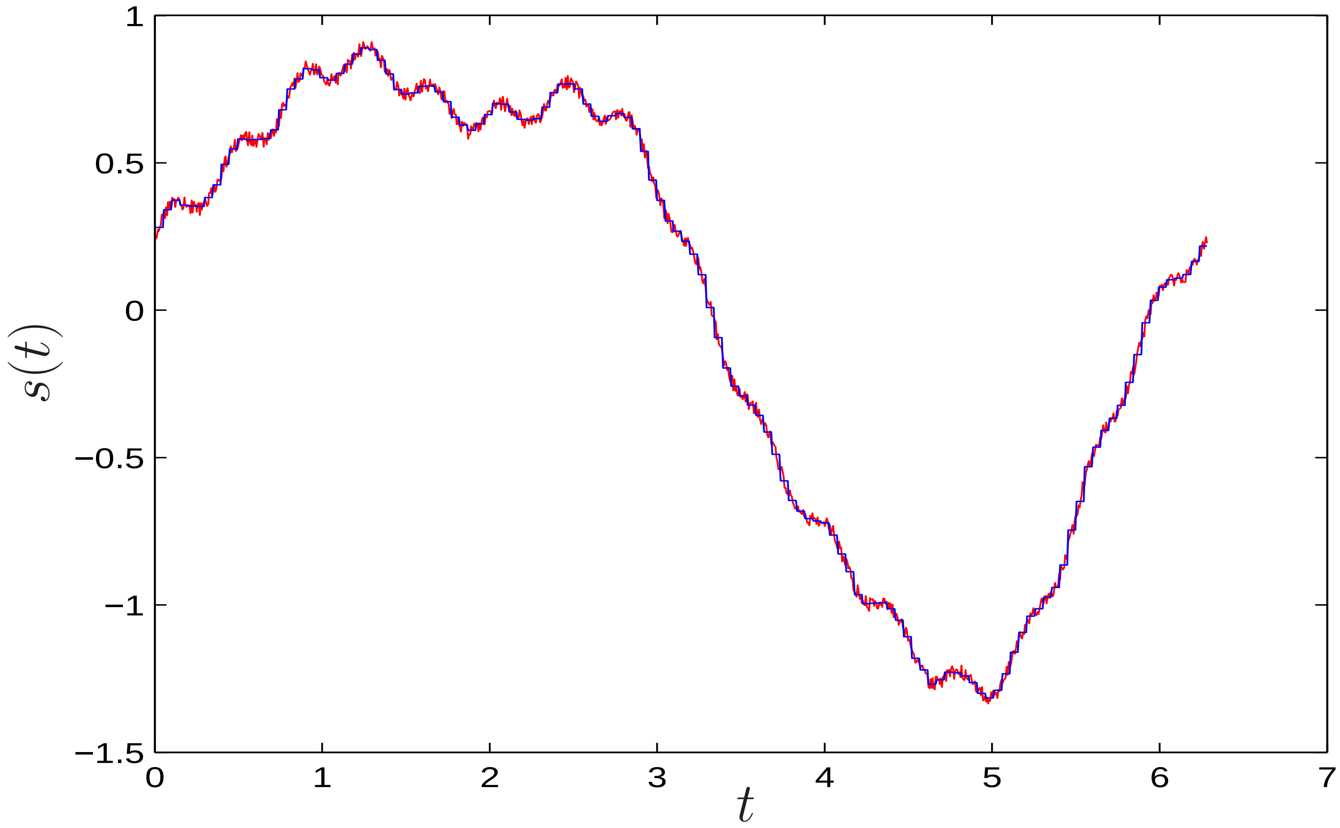
Motivace

Komprese signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 6.3%



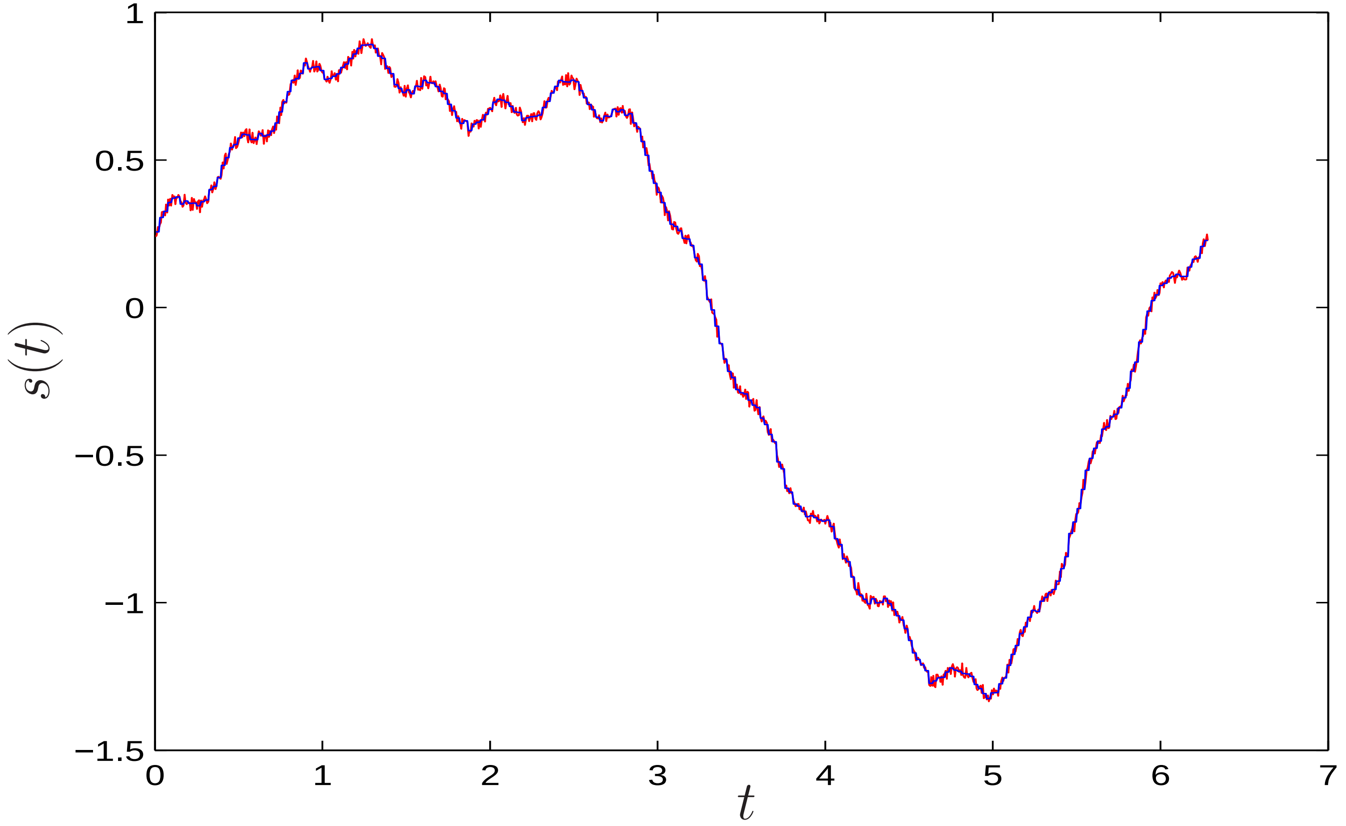
Motivace

Komprese signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 12.5%



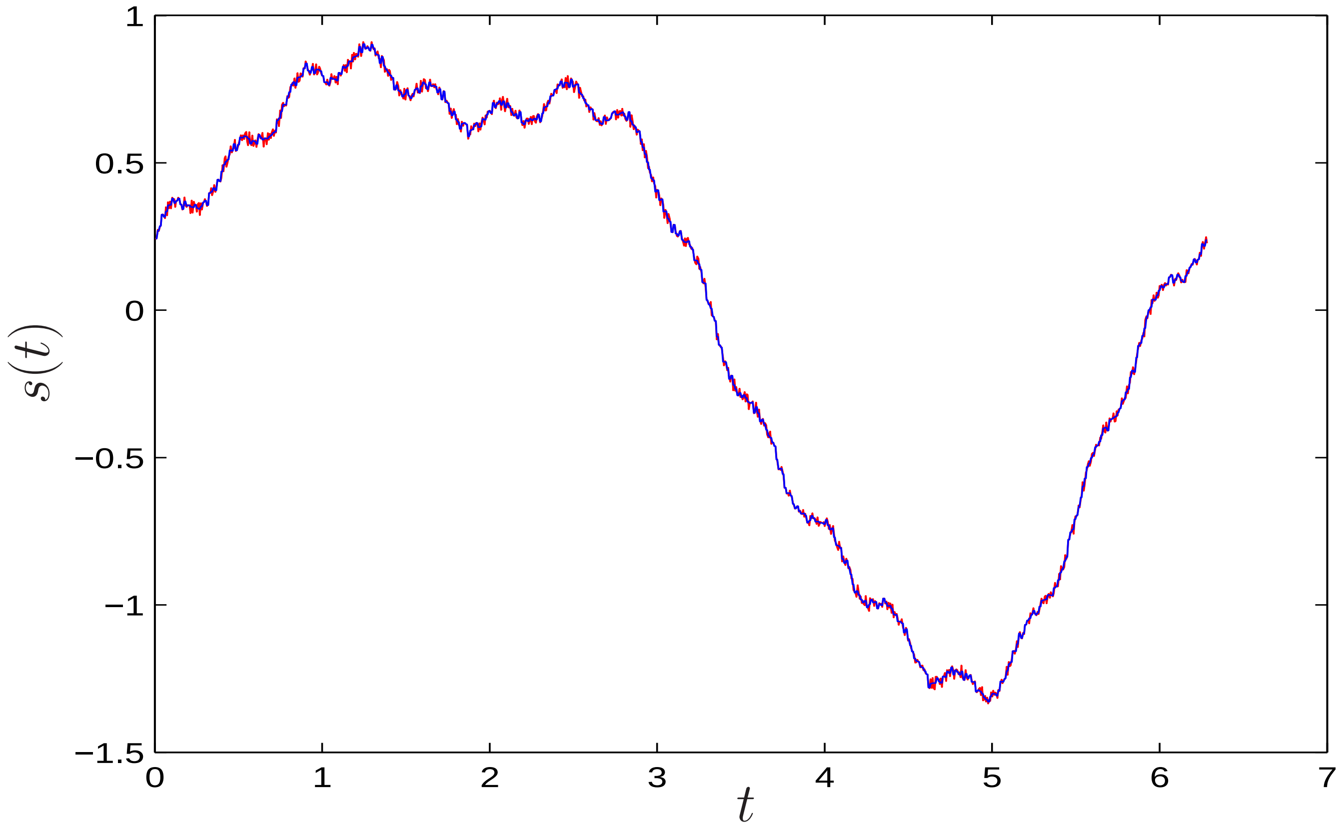
Motivace

Komprese signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 25%



Motivace

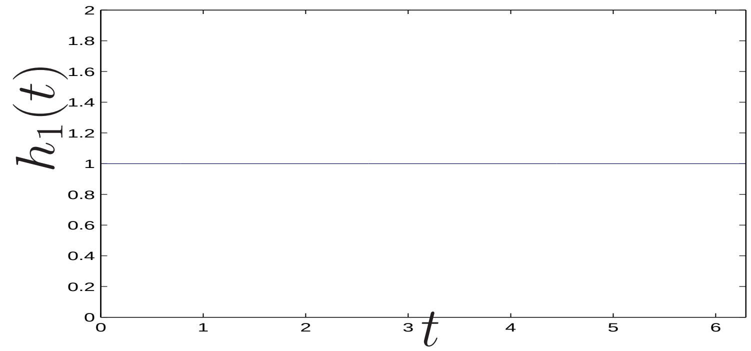
Komprese signálu $s(t)$ Haarovou (waveletovou) bází: 50%



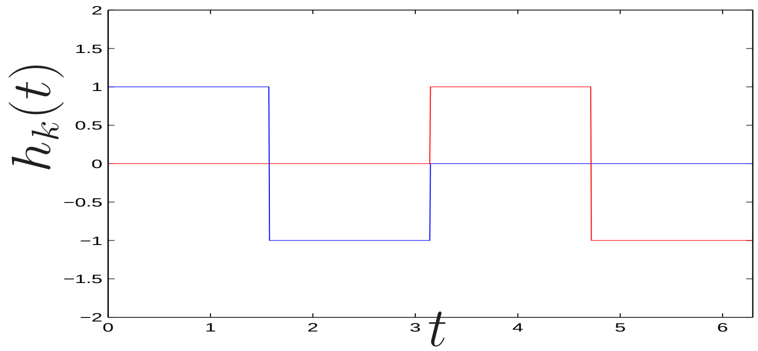
Motivace

Haarova (waveletová) báze: $h_k(t)$**,** $k = 1, 2, \ldots$

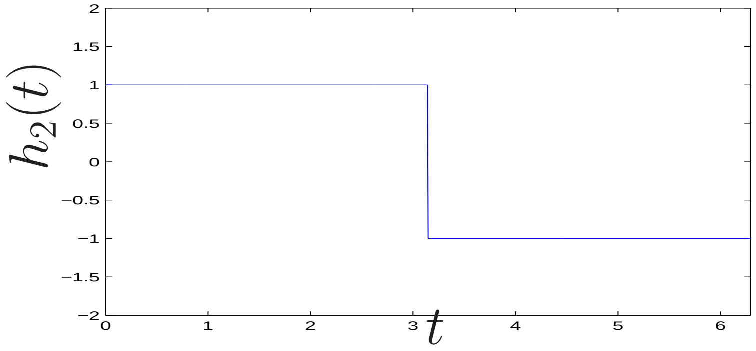
$k = 1$:



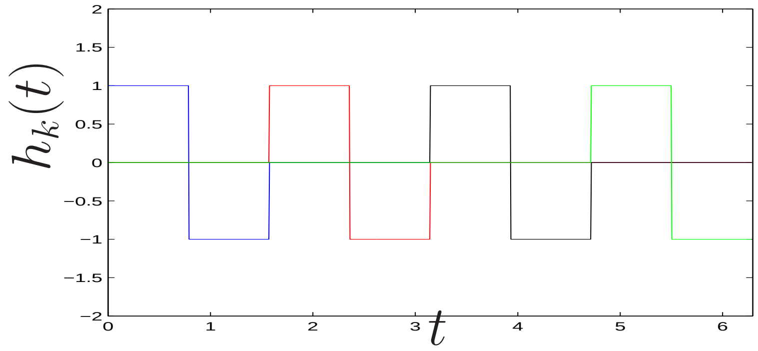
$k = 3, 4$:



$k = 2$:



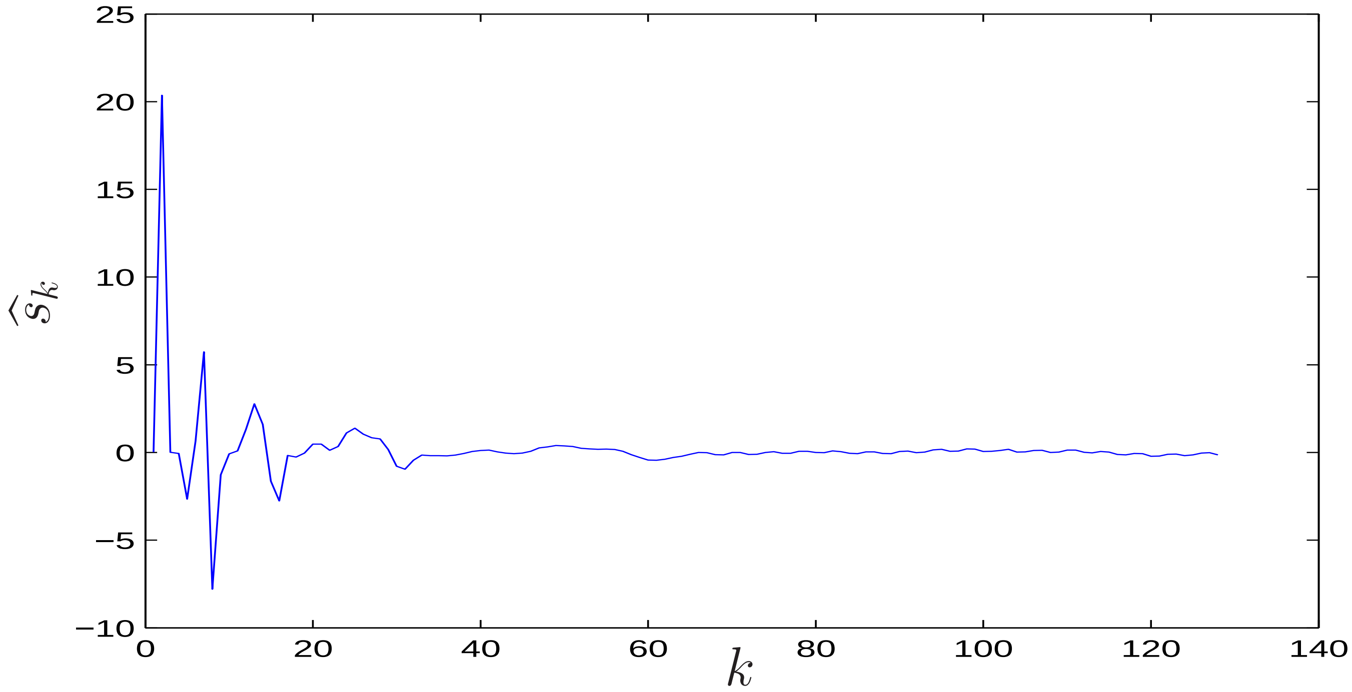
$k = 5, 6, 7, 8$:



Motivace

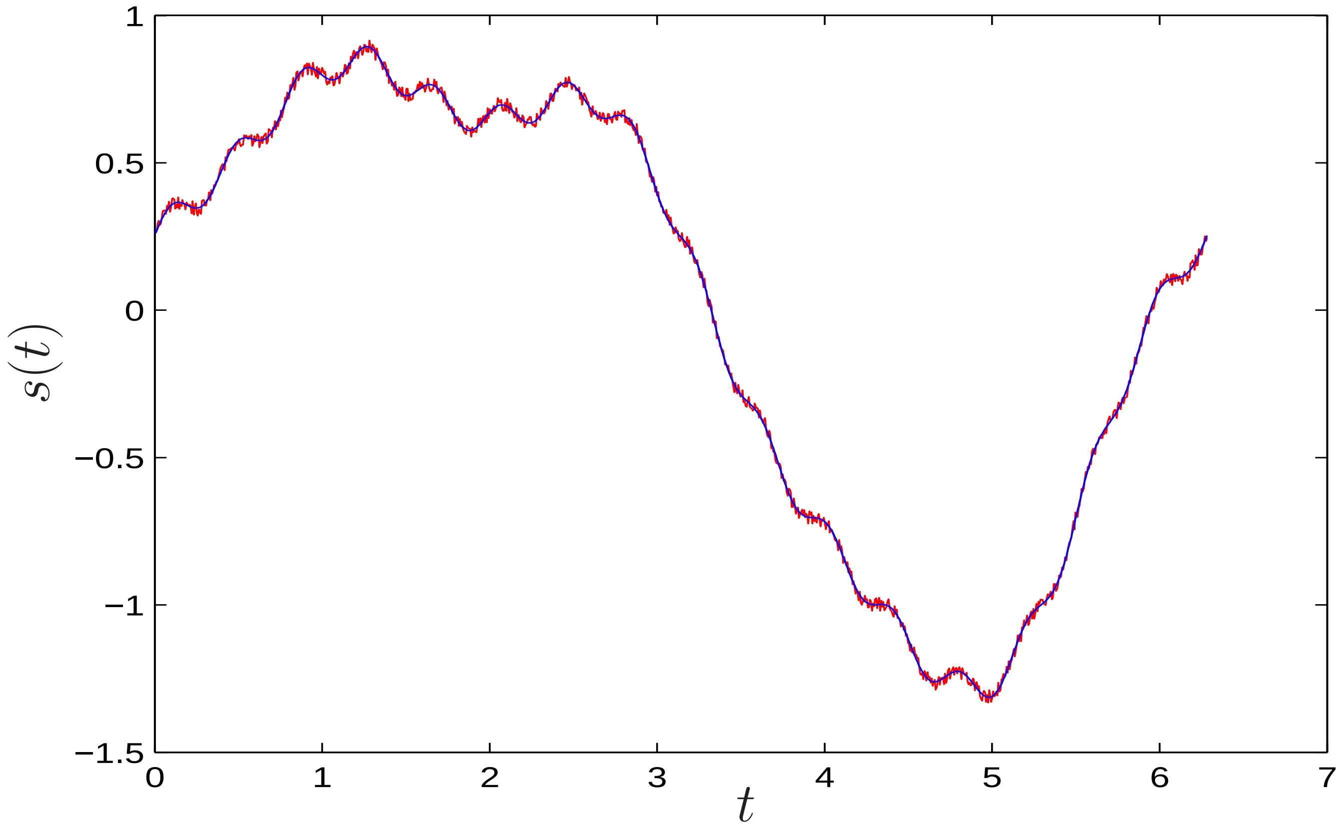
Reprezentace signálu Haarovými (waveletovými) souřadnicemi $\widehat{w}_k$

$$s(t) = \sum_{k=1}^{n} \widehat{w}_k \, h_k(t)$$



Motivace

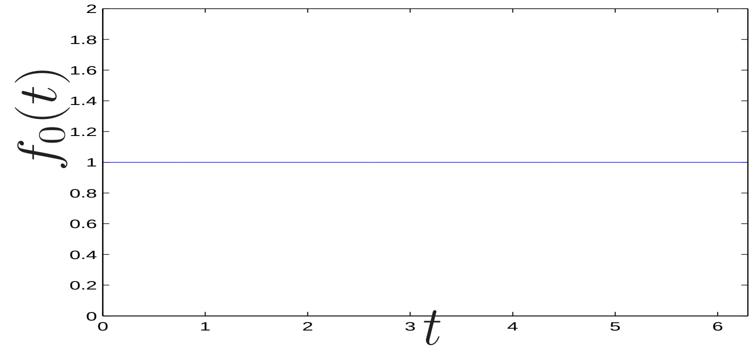
Komprese signálu $s(t)$ Fourierovou bází (jpeg): 3%



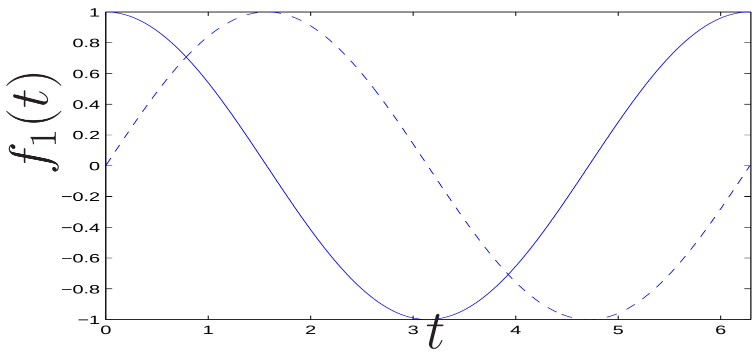
Motivace

Fourierova báze: $f_k(t) := \mathrm{e}^{\imath k\omega t}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

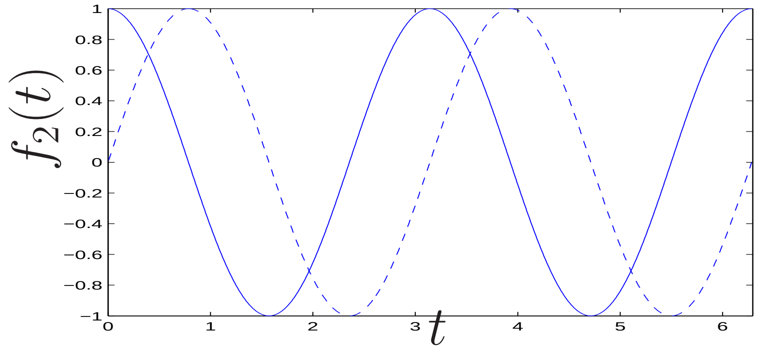
$k = 0$:



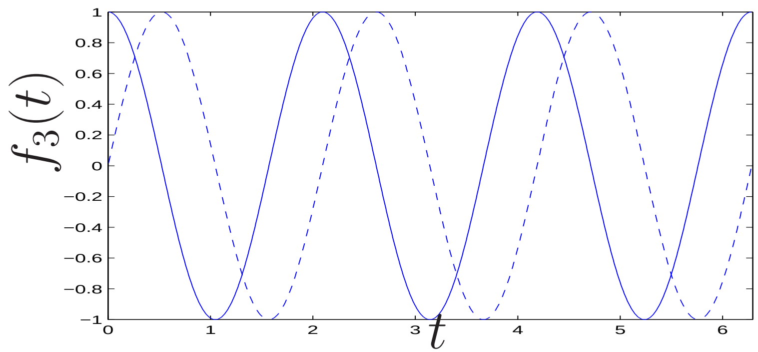
$k = 1$:



$k = 2$:



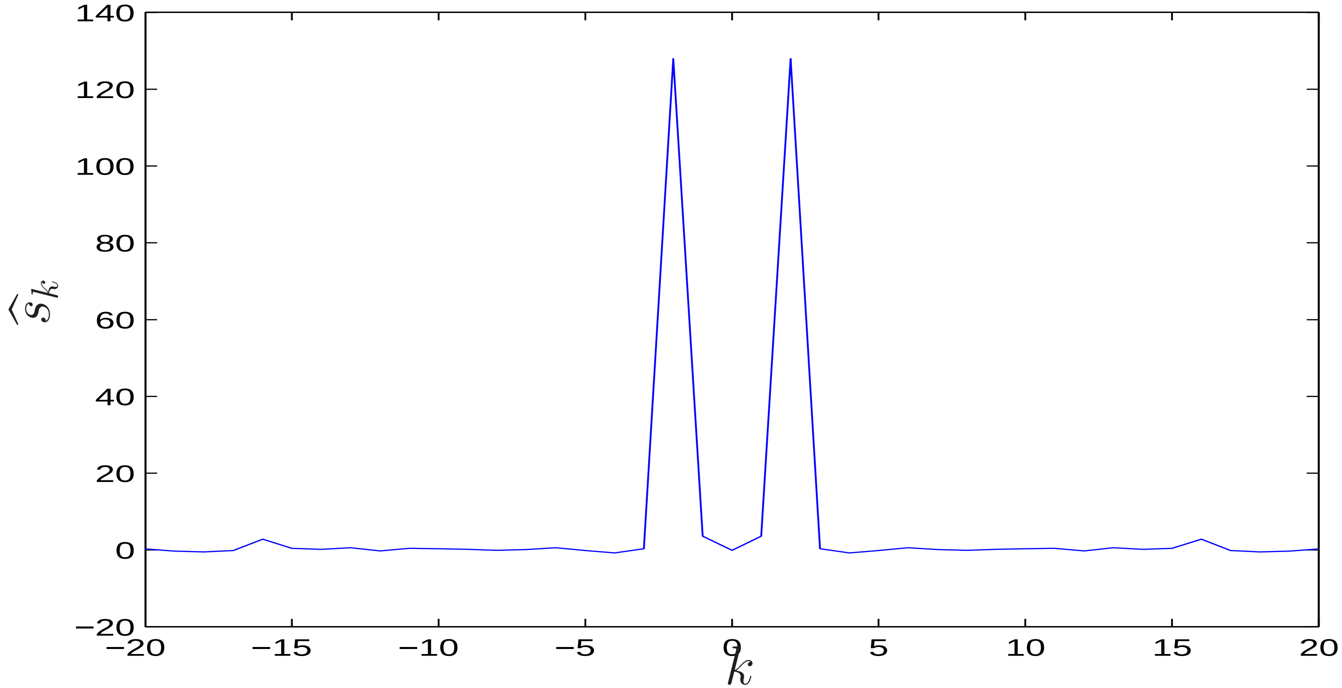
$k = 3$:



Motivace

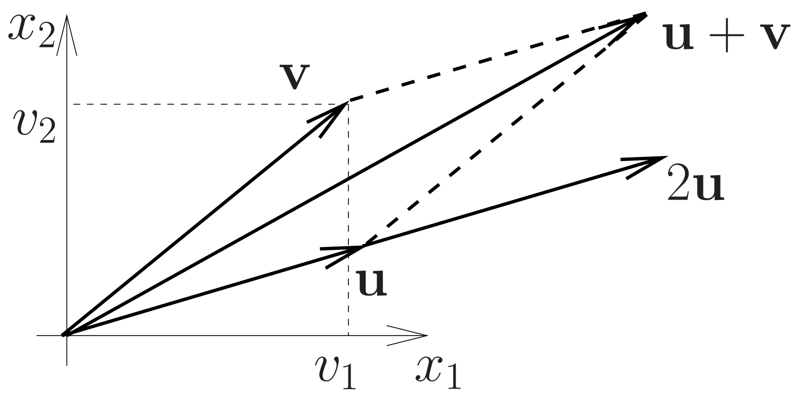
Reprezentace signálu Fourierovými souřadnicemi $\widehat{s}_k$

$$s(t) = \mathcal{R}\left\{\sum_{k=-n/2}^{n/2} \widehat{s}_k \exp(\imath k \omega t)\right\}, \text{ kde } \omega := 2\pi/n$$



Vektorové prostory

Zobecnění 2d geometrických vektorů na aritmetické

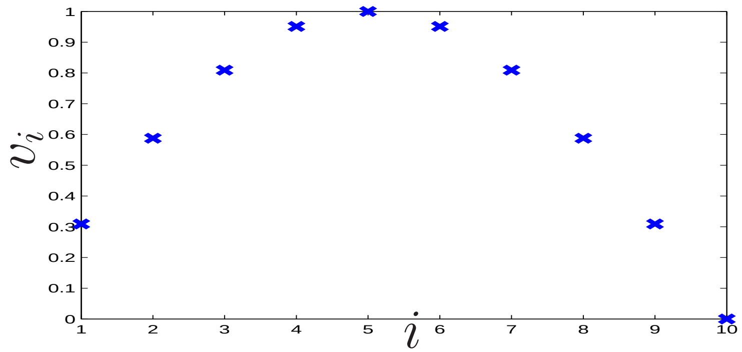


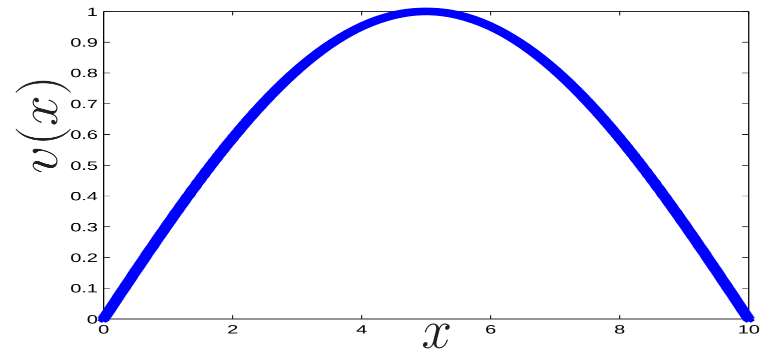
$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})_i := u_i + v_i$$

$$(\alpha \mathbf{u})_i := \alpha u_i$$

Zobecnění aritmetických vektorů na funkce

$$v_i := \sin(i\pi/10),\ i \in \{1, 2, \ldots, 10\}, \qquad v(x) := \sin(x\pi),\ x \in \langle 0, 10 \rangle$$





Vektorové prostory

Zobecnění aritmetických vektorů na funkce

Sčítání vektorů $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a násobení skalárem $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ jsme definovali pomocí číselného sčítání $+$ a násobení $\cdot$ takto:

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}:\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}:\ (\mathbf{u}+\mathbf{v})_i := u_i + v_i,\ (\alpha\cdot\mathbf{v})_i := \alpha \cdot v_i.$$

Definici lze analogicky rozšířit i pro funkce

$$\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\},$$

a to $+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$, $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$,

$$f, g \in \mathcal{F},\ \alpha \in \mathbb{R}:\ \forall x \in \mathbb{R}:\ (f+g)(x) := f(x) + g(x),\ (\alpha\cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x).$$

Pojem vektorového prostoru

Oba případy (a nejen tyto) lze shrnout do abstraktního pojmu vektorový prostor.

Vektorové prostory

Pojem vektorového prostoru

Reálný vektorový (též lineární) prostor je množina $\mathcal{V}$ s operacemi $+ : \mathcal{V}\times\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ a $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, které splňují následující axiomy:

$$
\begin{aligned}
\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}: &\quad \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \qquad \textit{(asociativita sčítání)} \\
\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}: &\quad \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \qquad \textit{(komutativita sčítání)} \\
\exists \mathbf{o} \in \mathcal{V} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: &\quad \mathbf{v} + \mathbf{o} = \mathbf{v}, \qquad \textit{(existence nulového vektoru)} \\
\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \exists (-\mathbf{v}) \in \mathcal{V}: &\quad \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{o}, \qquad \textit{(existence záporných vektorů)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}: &\quad \alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}, \\
\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: &\quad (\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}, \\
\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: &\quad \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{v}, \\
\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: &\quad 1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}.
\end{aligned}
$$

Prvky z $\mathcal{V}$ se nazývají **vektory**, prvky z $\mathbb{R}$ jsou **skaláry** (mohou být i komplexní).
Konvence: $\alpha\mathbf{v} := \alpha \cdot \mathbf{v}$.

Vektorové prostory

Další vlastnosti

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}: \quad 0\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \alpha \mathbf{o} = \mathbf{o}, \quad (-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}.$$

Příklady vektorových prostorů

- $\mathbb{R}^n$ (nebo $\mathbb{C}^n$) reálné (nebo komplexní) aritmetické vektory,
- $\mathbb{R}^{m\times n}$ (nebo $\mathbb{C}^{m\times n}$) reálné (nebo komplexní) matice,
- $\mathcal{F}$ reálné funkce jedné reálné proměnné s operacemi

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\alpha \cdot f)(x) := \alpha f(x),$$

- $\mathcal{S}$ reálné posloupnosti s operacemi

$$(a_n)_{n=1}^{\infty} + (b_n)_{n=1}^{\infty} := (a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha \cdot (a_n)_{n=1}^{\infty} := (\alpha a_n)_{n=1}^{\infty}.$$

- Jejich libovolný vektorový podprostor, viz dále.

Vektorové prostory

Pojem vektorový podprostor

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. Řekneme, že $\mathcal{U}$ je **vektorový podprostor** $\mathcal{V}$ (a zároveň dalším vektorovým prostorem), pokud

0. $\emptyset \neq \mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ ($\mathcal{U}$ je neprázdná podmnožina $\mathcal{V}$),
1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}: \quad \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ je uzavřená vůči sčítání),
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}: \quad \alpha \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ je uzavřená vůči násobení skalárem).

Příklad: přímka v $\mathbb{R}^2$ procházející počátkem je vekt. prostor

$\mathcal{U} := \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : \; u_1 + u_2 = 0\right\}$ je vektorovým podprostorem $\mathcal{V} := \mathbb{R}^2$.

Ad 0. $\mathcal{U} \neq \emptyset$, neboť $\mathbf{u} := \mathbf{o} = (0,0) \in \mathcal{U}$, viz $u_1 + u_2 = 0 + 0 = 0$. $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, viz zadání.

Ad 1. Mějme $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{U}$, tj. $u_1 + u_2 = 0$ a $v_1 + v_2 = 0$. Pak $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathcal{U}$, neboť $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = 0 + 0 = 0$.

Ad 2. Mějme $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, tj. $u_1 + u_2 = 0$. Pak $\alpha \mathbf{u} \in \mathcal{U}$, neboť $\alpha u_1 + \alpha u_2 = \alpha(u_1 + u_2) = \alpha 0 = 0$.

Vektorové prostory

Příklad: přímka v $\mathbb{R}^2$ neprocházející počátkem není vekt. prostor

$\mathcal{U} := \left\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 :\ u_1 + u_2 = 1\right\}$ není vektorovým podprostorem $\mathcal{V} := \mathbb{R}^2$.

Např. $\mathcal{U}$ nemá nulový prvek, viz $\mathbf{u} := \mathbf{o} \notin \mathcal{U}$, neboť $u_1 + u_2 = 0 + 0 = 0 \neq 1$.

Podprostory $\mathbb{R}^2$

- triviální podprostory

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{U} := \mathbb{R}^2,$$

- přímky procházející počátkem

$$\mathcal{U} := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 :\ a_1x_1 + a_2x_2 = 0,\ \text{kde } a_1 \neq 0 \text{ nebo } a_2 \neq 0\right\}.$$

Vektorové prostory

Podprostory $\mathbb{R}^3$

- triviální podprostory $\mathcal{U} := \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{U} := \mathbb{R}^3$,
- roviny procházející počátkem

$$\mathcal{U} := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}, \ \text{kde } \mathbf{o} \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\right\},$$

- přímky procházející počátkem

$$\mathcal{U} := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}, \ \text{kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 3}, \ \mathbf{A} \text{ má hodnost } 2\right\}.$$

Vektorové prostory

Prostor mnohočlenů $\mathcal{P}_n$

Pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\mathcal{P}_n := \{p(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in \mathcal{F} : \; a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

je vektorový podprostor $\mathcal{F}$.

Ad 0. $\mathcal{P}_n \neq \emptyset$, neboť $o(x) := 0 \in \mathcal{P}_n$. $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{F}$, neboť mnohočleny jsou funkce.

Ad 1. Mějme $p, q \in \mathcal{P}_n$, tj. $p(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ a $q(x) := \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$. Pak $p + q \in \mathcal{P}_n$, neboť $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$, kde $a_i + b_i \in \mathbb{R}$.

Ad 2. Mějme $\alpha \in \mathbb{R}$ a $p \in \mathcal{P}_n$, tj. $p(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$. Pak $\alpha p \in \mathcal{P}_n$, neboť $(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \sum_{i=0}^{n} (\alpha a_i) x^i$, kde $\alpha a_i \in \mathbb{R}$.

Vektorové prostory

Příklady vektorových prostorů

- **Nulový prostor matice**

$$\mathcal{U} := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{o}, \ \text{kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}\right\}$$

- $\mathcal{U} := \left\{p(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathcal{P}_n : \ \mathbf{A} \cdot (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T = \mathbf{o}, \ \text{kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}\right\}$ je podprostor $\mathcal{P}_n$.

- **Sloupcový prostor matice**

$$\mathcal{U} := \left\{\mathbf{x} := \mathbf{A}\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \ \text{kde } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ a } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

- **Lineární obal**

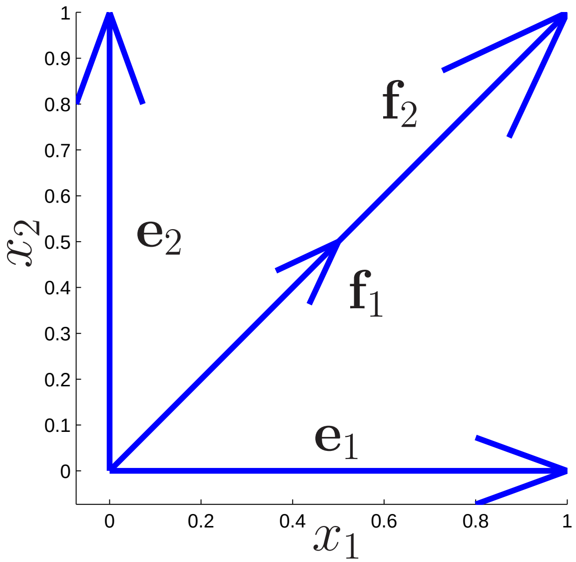
$$\mathcal{U} := \left\{p(x) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(x) \in \mathcal{P}_m : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ a } p_1(x), \ldots, p_n(x) \in \mathcal{P}_m\right\}$$

je podprostor $\mathcal{P}_m$.

Vektorové prostory

Hledá se reprezentace vektorů — tzv. báze

generující jednoznačně celý prostor $\mathcal{V}$, a tedy žádný z vektorů není zbytečný.



- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou fajn, neboť jsou nenulové a generují $\mathbb{R}^2$ jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

- $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ nejsou fajn, neboť negenerují $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2$ nejsou fajn, neboť generují $\mathbb{R}^2$ nejednoznačně (jeden z nich je zbytečný):

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{f}_2.$$

- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2$ jsou fajn, neboť jsou nenulové a generují $\mathbb{R}^2$ jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathbf{x} = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{f}_2.$$

Lineární nezávislost

Lineární nezávislost — žádný vektor není zbytečný

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. Nenulové **vektory** $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$ jsou **lineárně nezávislé**, pokud rovnice

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{o}$$

má pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Jinak má soustava nekonečně mnoho řešení a **vektory** jsou **lineárně závislé**.

Příklad: $\mathbf{e}_1 := (1, 0)$ a $\mathbf{f}_2 := (1, 1)$ jsou lineárně nezávislé

$$\text{Hledáme } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : \quad \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 = \mathbf{o} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(1, 0) + \alpha_2(1, 1) = (0, 0).$$

To vede na soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 1\alpha_1 \; + \; 1\alpha_2 &= 0, \\ 0\alpha_1 \; + \; 1\alpha_2 &= 0, \end{aligned}$$

která má pouze triviální řešení $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Lineární nezávislost

$1, x, x^2$ jsou lineárně nezávislé

Hledáme $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in \mathbb{R}: \;\; \alpha 1 + \beta x + \gamma x^2 = 0.$$

Speciálně pro $x \in \{-1, 0, 1\}$ dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0, \\ \alpha & & & & & = & 0, \\ \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0, \end{array}$$

která má pouze triviální řešení $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
To je ale zároveň řešením původní úlohy, a tedy musí být jejím jediným řešením.

Lineární nezávislost

Příklad: $1 - x + x^2$, $2 + x - 2x^2$ a $1 + 2x - 3x^2$ jsou lineárně závislé

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \alpha_1(1 - x + x^2) + \alpha_2(2 + x - 2x^2) + \alpha_3(1 + 2x - 3x^2) = 0,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad 1(\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) + x(-\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3) + x^2(\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0.$$

Díky lineární nezávislosti 1, x a x^2 dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0, \\ -\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0, \\ \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & -+ & 3\alpha_3 & = & 0. \end{array}$$

Soustava je homogenní, tj. má nulovou pravou stranu, kterou při řešení neopisujeme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := -\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := 4\mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení je nekonečně mnoho.

Lineární kombinace

Lineární kombinace — nový vektor by byl zbytečný

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$ a nenulové vektory $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$. Řekneme, že $\mathbf{v}$ je lineární kombinací $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, pokud existuje alespoň jedno řešení $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ rovnice

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{v}.$$

Příklad: $\mathbf{v} := (1,1)$ je lineární kombinací $\mathbf{v}_1 := (1,-2)$ a $\mathbf{v}_2 := (2,1)$

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1(1,-2) + \alpha_2(2,1) = (1,1)$$

To vede na soustavu

$$\begin{array}{rrcr} 1\alpha_1 & +2\alpha_2 & = & 1 \\ -2\alpha_1 & +1\alpha_2 & = & 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_2]{} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

která má řešení $\alpha_1 = -1/5$, $\alpha_2 = 3/5$.

Lineární kombinace

Příklad: $(1, 2, -1)$ **je lineární kombinací** $(1, 1, 1)$ **a** $(0, 1, -2)$ **a** $(2, 1, 4)$

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3+2\mathbf{r}_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dostáváme nekonečně mnoho řešení.

Lineární kombinace

Příklad: $1 - x$ **není lineární kombinací** $1 + x$ **a** $2 + 2x$

Hledáme $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad \alpha_1(1 + x) + \alpha_2(2 + 2x) = 1 - x.$$

Díky lineární nezávislosti 1 a x stačí řešit soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

která však nemá řešení.

Báze vektorového prostoru

Báze — reprezentace vektorů je fajn

Mějme vektorový prostor $\mathcal{V}$. Uspořádaná množina nenulových vektorů $F := (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n)$ tvoří **bázi vektorového prostoru** $\mathcal{V}$, pokud

1. $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$,
2. $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ jsou lineárně nezávislé,
3. libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ je lineární kombinací $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, tj.

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \ldots \alpha_n \mathbf{f}_n = \mathbf{v}.$$

Souřadnice vektoru v bázi, dimenze

Platí, že lineární kombinace je pro bázi vždy jednoznačná. Výsledné koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nazýváme **souřadnice vektoru v v bázi** F a značíme $[\mathbf{v}]_F := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Platí, že počet bázových vektorů n vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je vždy stejný, říkáme mu **dimenze** $\mathcal{V}$ a značíme $\dim \mathcal{V} := n$.

Báze vektorového prostoru

Kanonické báze

- Sloupce/řádky jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ tvoří **kanonickou bázi** $\mathbb{R}^n$, tj.

$$E := \{\mathbf{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots \mathbf{e}_n := (0, \ldots, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^n.$$

  $\mathbb{R}^n$ má dimenzi n, tj. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

- Monomiály x^k, $k \in \mathbb{N}_0$, tvoří kanonickou bázi $\mathcal{P}_n$, tj.

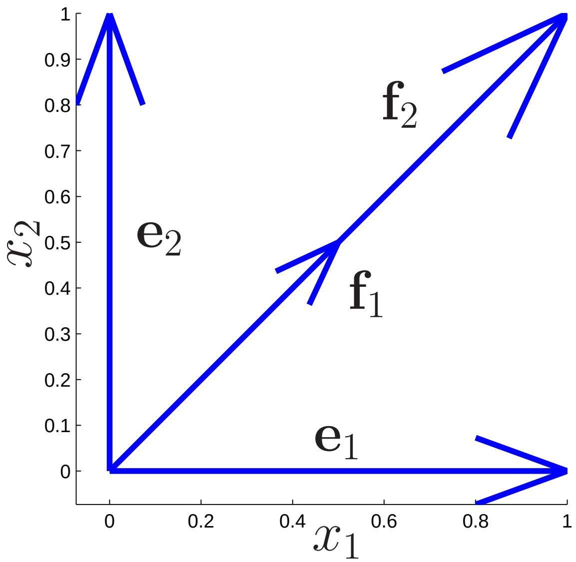
$$E := \left\{e_1(x) := 1, e_2(x) := x, e_3(x) := x^2, \ldots, e_{n+1}(x) := x^n\right\}.$$

  $\mathcal{P}_n$ má dimenzi $n + 1$, tj. $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

Báze vektorového prostoru

Hledá se reprezentace vektorů — tzv. báze

generující jednoznačně celý prostor $\mathcal{V}$, a tedy žádný z vektorů není zbytečný.



- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$, a tedy generují $\mathbb{R}^2$ jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2.$$

- $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ netvoří bázi $\mathbb{R}^2$, nesplňují 2. ani 3.
- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_2$ netvoří bázi $\mathbb{R}^2$, nejsou lin. nezávislé:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; \mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{f}_2.$$

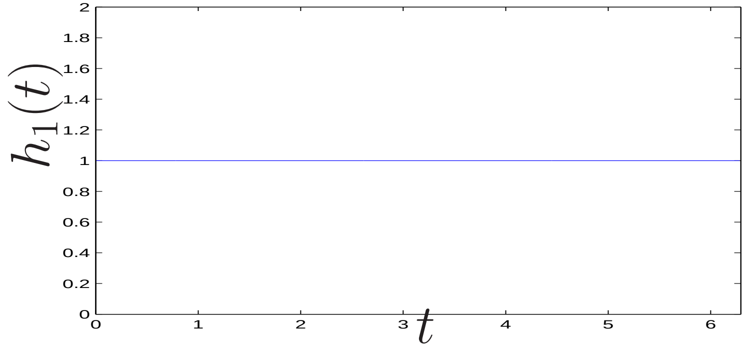
- $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{f}_2$ tvoří bázi $\mathbb{R}^2$, a tedy generují $\mathbb{R}^2$ jednoznačně:

$$\forall \mathbf{x} := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \; \mathbf{x} = (x_1 - x_2)\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{f}_2.$$

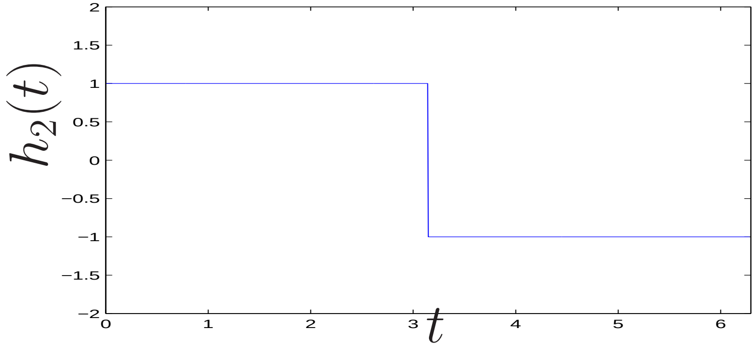
Zpět k motivaci

Haarova (waveletová) báze prostoru $\mathcal{F}$: $h_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$

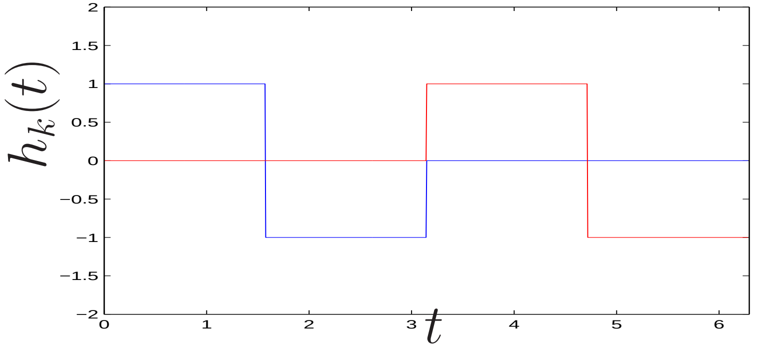
$k = 1$:



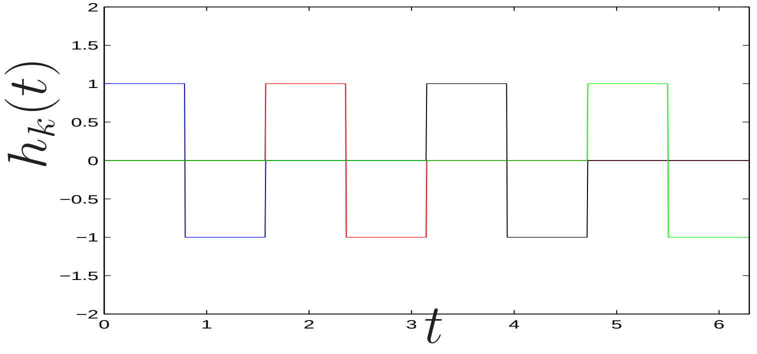
$k = 2$:



$k = 3, 4$:



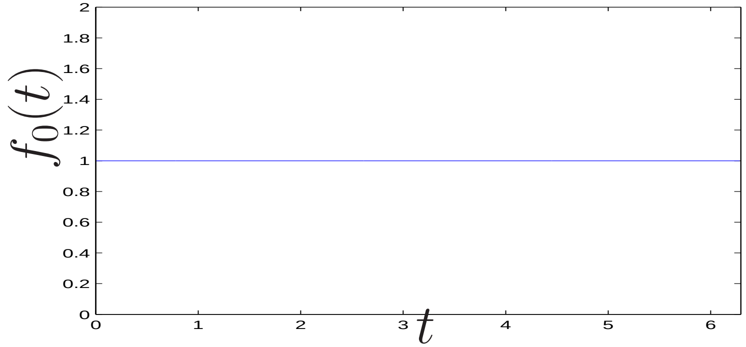
$k = 5, 6, 7, 8$:



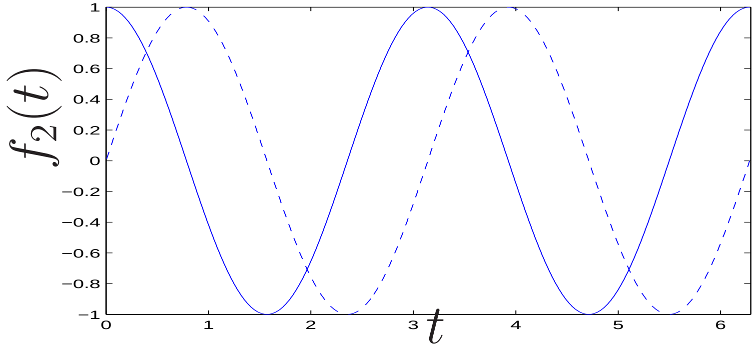
Zpět k motivaci

Fourierova báze prostoru $\mathcal{F}$: $f_k(t) := \mathrm{e}^{\imath k\omega t}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

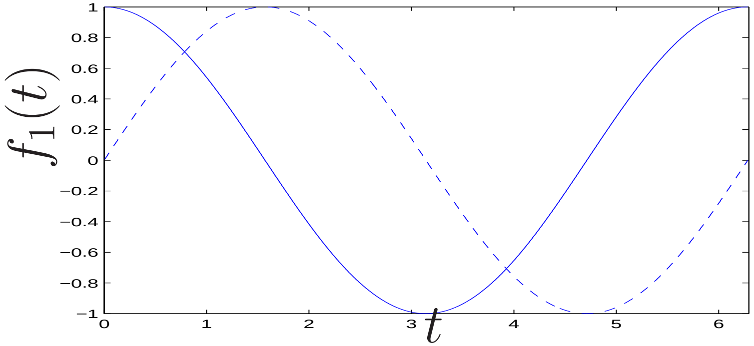
$k = 0$:



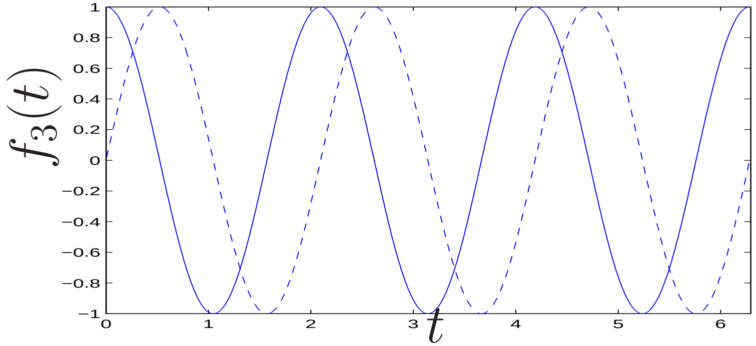
$k = 2$:



$k = 1$:



$k = 3$:



Zpět k motivaci

Reprezentace signálu $s(t) \in \mathcal{F}$ Fourierovými souřadnicemi $\widehat{s}_k$

$\widehat{\mathbf{s}} := [s(t)]_F$