

# Lineární algebra — 2. přednáška: Gaussova eliminace



Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky  
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

<http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1>



Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni



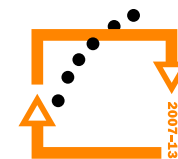
evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

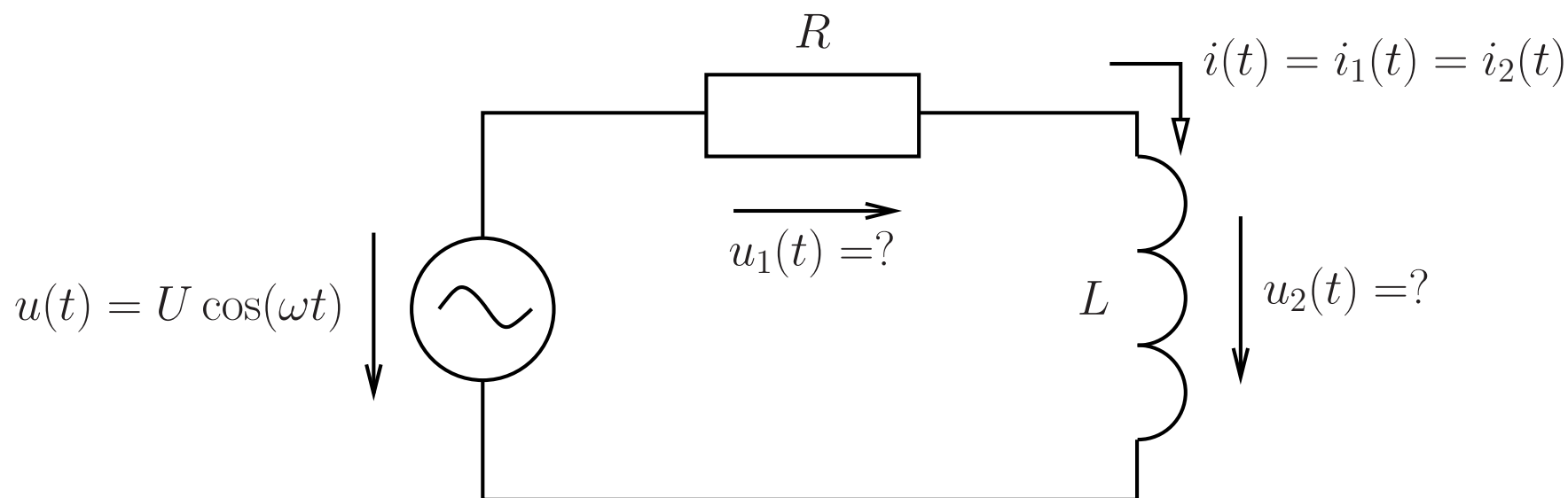


OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# Komplexní čísla v analýze obvodů

## Střídavý elektrický obvod



## Kirchhoffovy zákony, Ohmův a Faradayův zákon

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{ll} u_1(t) + u_2(t) = U \cos(\omega t), & u_1(t) = R i_1(t) = R I \cos(\omega t + \varphi), \\ i_1(t) - i_2(t) = 0, & u_2(t) = L i_2'(t) = \omega L I (-\sin(\omega t + \varphi)) \end{array}$$

# Komplexní čísla v analýze obvodů

## Řešení bez komplexních čísel

$\forall t \in \mathbb{R} :$

$$u_1(t) + u_2(t) = U \cos(\omega t)$$

$$RI \cos(\omega t + \varphi) - \omega LI \sin(\omega t + \varphi) = U \cos(\omega t)$$

$$RI \cos(\omega t + \varphi) - \omega LI \cos(\omega t + \varphi - \pi/2) = U \cos(\omega t)$$

$$RI (\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)) - \omega LI (\sin(\omega t) \cos(\varphi) + \cos(\omega t) \sin(\varphi)) = U \cos(\omega t)$$

Definujme kosinovou a sinovou složku proudu

$$I^c := I \cos(\varphi), \quad I^s := I \sin(\varphi),$$

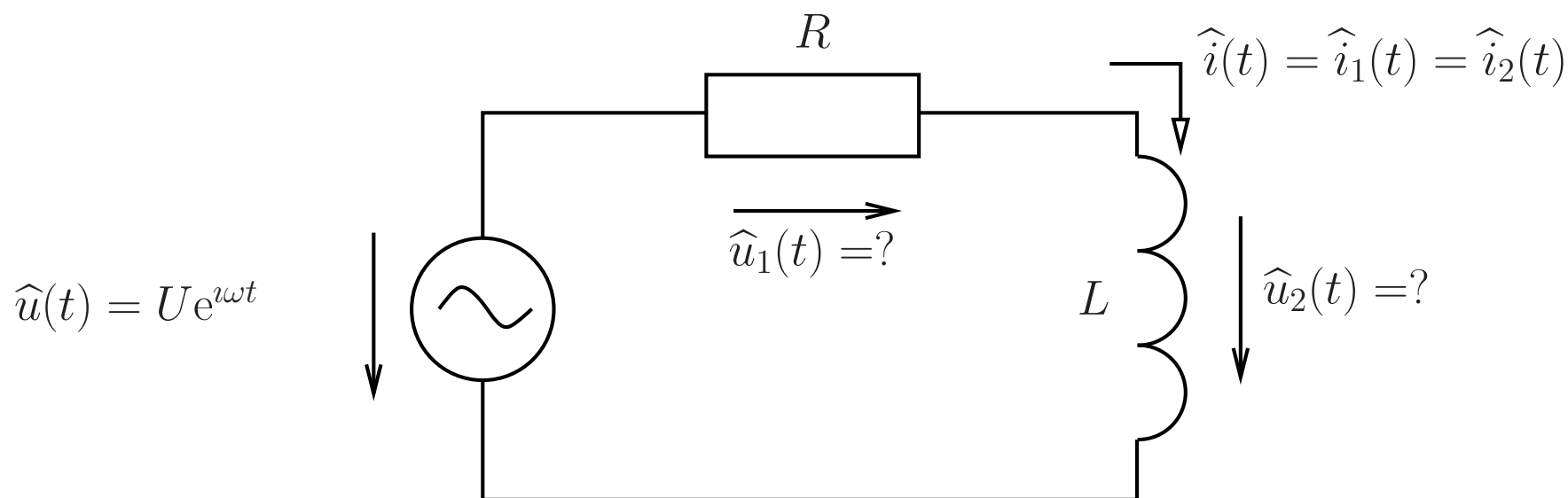
pak zbývá vyřešit dvě lineární rovnice o dvou neznámých, nebo jednu komplexní:

$$\begin{array}{l} RI^c - \omega LI^s = U \\ -RI^s - \omega LI^c = 0 \end{array} \quad / \cdot (-i) \quad \iff \quad \boxed{(R + i\omega L) \underbrace{(I^c + iI^s)}_{=: \hat{I}} = U}$$

Násobení komplexním číslem  $i$  realizuje rotaci o  $\pi/2$ .

# Komplexní čísla v analýze obvodů

## Střídavý elektrický obvod



## Kirchhoffovy zákony, Ohmův a Faradayův zákon

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{l} \hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) = U e^{j\omega t}, \\ \hat{I}_1 e^{j\omega t} - \hat{I}_2 e^{j\omega t} = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \hat{u}_1(t) = R \hat{i}_1(t) = R \hat{I} e^{j\omega t}, \\ \hat{u}_2(t) = L \hat{i}'_2(t) = j\omega L \hat{I} e^{j\omega t} \end{array}$$

# Komplexní čísla v analýze obvodů

## Řešení s komplexními čísly

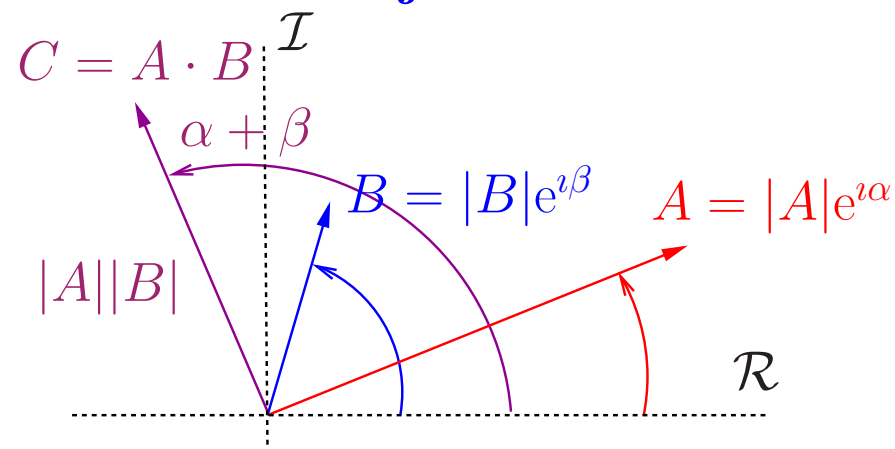
$\forall t \in \mathbb{R} :$

$$\hat{u}_1(t) + \hat{u}_2(t) = U e^{i\omega t}$$

$$R\hat{I} e^{i\omega t} + i\omega L\hat{I} e^{i\omega t} = U e^{i\omega t}$$

$$\boxed{(R + i\omega L) \hat{I} = U}$$

Násobení komplexním číslem realizuje násobení modulů a rotaci



# Gaussova eliminace

## Soustava 2x2: středoškolské řešení

Vyjádříme první proměnnou z první rovnice a dosadíme do druhé.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x_1 = 1 - x_2 \\ (1 - x_2) - x_2 = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x_1 = 1 - x_2 \\ -2x_2 = -1 \end{array}$$

## Soustava 2x2: vysokoškolské řešení

Odečteme první rovnici od druhé; říkáme tomu **Gaussova eliminace**.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ (x_1 - x_1) + (-x_2 - x_2) = (0 - 1) \end{array} \iff \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ -2x_2 = -1 \end{array}$$

## Soustava 2x2: ještě vysokoškolštější řešení

Gaussovu eliminaci provádíme pouze na rozšířené matici soustavy.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ (1-1) & (-1-1) & (0-1) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminace

## Krok 1. Gaussova eliminace

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ (1-1) & (-1-1) & (0-1) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

## Krok 2. Zpětné dosazování

Z druhé rovnice vypočteme

$$x_2 = \frac{1}{2},$$

zpětně dosadíme do první rovnice a dopočteme

$$x_1 = 1 - x_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Vektor řešení je

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

# Gaussova eliminace

## Soustava 3x3: středoškolské řešení

1.1. Eliminace  $x_1$ : Vyjádříme  $x_1$  z první rovnice a dosadíme do druhé a třetí.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 = 1 & & x_1 = 1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 & \iff & -2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 & & x_2 - 2x_3 = -1 \end{array}$$

1.2. Eliminace  $x_2$ : Vyjádříme  $x_2$  z druhé rovnice a dosadíme do třetí.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 & = & (-2 - x_3)/(-2) \\ & - & (3/2)x_3 = -2 \end{array}$$

2. Zpětné dosazování: Vypočteme  $x_3$  ze třetí rovnice, dosadíme ...

$$x_3 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = (-2 - x_3)/(-2) = -\frac{10}{3}/(-2) = \frac{5}{3}, \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = -2.$$



# Gaussova eliminace

## Krok 1. Gaussova eliminace

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

Ekvivalentními úpravami rozšířené matice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3:=\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2:=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3:=2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

dostáváme jednodušší soustavu rovnic, která má stejné řešení jako ta původní.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\- 2x_2 + x_3 &= -2 \\- 3x_3 &= -4\end{aligned}$$

Prvky  $\boxed{1}$  a  $\boxed{-2}$  nazýváme **pivoty**. Pomocí pivotů nulujeme sloupec pod nimi.

# Gaussova eliminace

## Krok 2. Zpětné dosazování

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 + x_3 &= -2 \\ -3x_3 &= -4\end{aligned}$$

Vypočteme  $x_3$  ze třetí rovnice

$$x_3 = \frac{4}{3}.$$

Dosadíme  $x_3$  do druhé rovnice a vypočteme  $x_2$

$$x_2 = \frac{-2 - x_3}{-2} = \frac{-2 - \frac{4}{3}}{-2} = \frac{5}{3}.$$

Dosadíme  $x_2$  a  $x_3$  do první rovnice a vypočteme  $x_1$

$$x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = -2.$$

Vektor řešení je  $\mathbf{x} = (-2, 5/3, 4/3)$ .

# Gaussova eliminace

## Algoritmus

1. Eliminace prvního sloupce pomocí prvního pivotu

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \boxed{\times} & \times & \dots & \times & \times & \times \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ \times & \times & \dots & \times & \times & \times \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_n := \alpha_{n1} \mathbf{r}_n + \beta_{n1} \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \alpha_{21} \mathbf{r}_2 + \beta_{21} \mathbf{r}_1, \dots,} \approx (n-1)^2 \text{ násobení}$$

2. Eliminace druhého sloupce pomocí druhého pivotu

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \boxed{\times} & \dots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_n := \alpha_{n2} \mathbf{r}_n + \beta_{n1} \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_3 := \alpha_{32} \mathbf{r}_3 + \beta_{32} \mathbf{r}_2, \dots,} \approx (n-2)^2 \text{ násobení}$$

...

# Gaussova eliminace

## Algoritmus

$(n - 1)$ . Eliminace předposledního sloupce pomocí předposledního pivotu

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boxed{\times} & \times & \times \\ 0 & 0 & \dots & \times & \times & \times \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_n := \alpha_{n,n-1} \mathbf{r}_n + \beta_{n,n-1} \mathbf{r}_{n-1}} \approx 1^2 \text{ násobení}$$

Ekvivalentní rozšířená matice soustavy v horním trojúhelníkovém tvaru:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} \times & \times & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \times & \times \end{array} \right)$$

Celkový počet aritmetických operací (násobení)  $\approx \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \approx \int_1^{n-1} x^2 dx = O(n^3)$

# Gaussova eliminace

## Elementární řádkové úpravy

- Přenásobení řádku nenulovým číslem,
- přičtení jednoho řádku k jinému,
- záměna (permutace) dvou řádků.

## Gaussova eliminace se záměnou řádků

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \end{array} \right) \dots$$

## Gaussova eliminace — lze šipku nahradit rovnítkem?

Minule: matice krát sloupec = sloupec

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \left( \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1^s \ \mathbf{a}_2^s \ \cdots \ \mathbf{a}_n^s) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \\ &:= x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \\ &\qquad\qquad\qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{lineární kombinace sloupců}} \end{aligned}$$

To lze spočítat i pomocí skalárního součinu vektorů  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_{i=1}^n u_i v_i$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^r \cdot \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^r \cdot \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

## Gaussova eliminace — lze šipku nahradit rovnítkem?

Podobně: řádek krát matice = řádek

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} &= (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m) \cdot \begin{pmatrix} (a_{1,1} \ a_{1,2} \ \dots \ a_{1,n}) \\ (a_{2,1} \ a_{2,2} \ \dots \ a_{2,n}) \\ \vdots \\ (a_{m,1} \ a_{m,2} \ \dots \ a_{m,n}) \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^r \\ \mathbf{a}_2^r \\ \dots \\ \mathbf{a}_m^r \end{pmatrix} := \\ &:= \underbrace{v_1 (a_{1,1} \ a_{1,2} \ \dots \ a_{1,n}) + v_2 (a_{2,1} \ a_{2,2} \ \dots \ a_{2,n}) + \dots + v_m (a_{m,1} \ a_{m,2} \ \dots \ a_{m,n})}_{\text{lineární kombinace řádků}} \end{aligned}$$

To lze spočítat pomocí skalárního součinu vektorů takto:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1^s, \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2^s, \dots, \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_n^s)$$

## Gaussova eliminace — lze šipku nahradit rovnítkem?

### Soustava 2x2

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

### Zápis elementárních úprav do vektorů a matice

$$\mathbf{r}_1 := 1 \mathbf{r}_1 + 0 \mathbf{r}_2 : \quad (1 \ 0) \cdot \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = 1 (1 \ 1 | 1) + 0 (1 \ -1 | 0) = (1 \ 1 | 1)$$

$$\mathbf{r}_2 := -1 \mathbf{r}_1 + 1 \mathbf{r}_2 : \quad (-1 \ 1) \cdot \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) = -1 (1 \ 1 | 1) + 1 (1 \ -1 | 0) = (0 \ -2 | -1)$$

$$\mathbf{E}_{21} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \text{Nuluje prvek } a_{21}.$$



## Gaussova eliminace — lze šipku nahradit rovnítkem?

### Soustava 2x2

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 - x_2 = 0$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) := \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_1 := \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right) =: (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

Ano, lze pomocí násobení matic.

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} : \quad \mathbf{E}_{21} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

Násobení matic:

$$\mathbf{E}_{21} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right) := \left( \begin{array}{cc|c} 1(1, 1|1) + 0(1, -1|0) \\ -1(1, 1|1) + 1(1, -1|0) \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{array} \right) = (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

# Gaussova eliminace

## Gaussova eliminace pomocí násobení matic

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := 2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{E}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_{32} \cdot \left\{ \mathbf{E}_{31} \cdot \left[ \mathbf{E}_{21} \cdot \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \right] \right\} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{array} \right)$$

## Gaussova eliminace

Násobení matic je asociativní — nezáleží na uzávorkování

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{32} \cdot \{\mathbf{E}_{31} \cdot [\mathbf{E}_{21} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b})]\} &= (\mathbf{U}|\mathbf{c}) \\ \underbrace{\{\mathbf{E}_{32} \cdot [\mathbf{E}_{31} \cdot \mathbf{E}_{21}]\}}_{=:\tilde{\mathbf{L}}} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) &= (\mathbf{U}|\mathbf{c})\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}} &= \mathbf{E}_{32} \cdot \{\mathbf{E}_{31} \cdot \mathbf{E}_{21}\} = \mathbf{E}_{32} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \mathbf{E}_{32} \cdot \begin{pmatrix} 1(1,0,0) + 0(-1,1,0) + 0(0,0,1) \\ 0(1,0,0) + 1(-1,1,0) + 0(0,0,1) \\ -1(1,0,0) + 0(-1,1,0) + 1(0,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1(1,0,0) + 0(-1,1,0) + 0(-1,0,1) \\ 0(1,0,0) + 1(-1,1,0) + 0(-1,0,1) \\ 0(1,0,0) + 1(-1,1,0) + 2(-1,0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

# Gaussova eliminace

## Gaussova eliminace = LU rozklad

Ekvivalentní úpravy

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \longrightarrow (\mathbf{U}|\mathbf{c})$$

lze zapsat do matice  $\tilde{\mathbf{L}}$  tak, že

$$\tilde{\mathbf{L}} \cdot (\mathbf{A}|\mathbf{b}) = (\mathbf{U}|\mathbf{c}).$$

Pokud jsme během Gaussovy eliminace neprováděli záměnu řádků, pak

$$\tilde{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \times & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \times & \times & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \times & \times & \dots & \times & 0 \\ \times & \times & \dots & \times & \times \end{pmatrix} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \times & \times & \dots & \times & \times \\ 0 & \times & \dots & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \times & \times \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \times \end{pmatrix}$$

jsou **dolní** (lower), resp. **horní** (upper) **trojúhelníková matice**.

# Gaussova eliminace

0 řešení

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right)$$

Soustava nemá řešení, viz druhá rovnice:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -2.$$

## Gaussova eliminace

∞ řešení

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\x_1 + 3x_2 &= 3\end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1]{\mathbf{r}_2 := \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_3 := \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\-2x_2 + x_3 &= -2\end{aligned}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení.

# Gaussova eliminace

∞ řešení: parametrizace, zpětné dosazování

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_2 + x_3 &= -2\end{aligned}$$

Za přebytečné neznámé zavedeme parametry

$$x_3 =: t \in \mathbb{R}$$

a provedeme zpětné dosazování

$$x_2 = (-2 - x_3)/(-2) = 1 + \frac{1}{2}t, \quad x_1 = 1 - x_2 - x_3 = 1 - (1 + t/2) - t = -\frac{3}{2}t.$$

Vektor řešení je

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Jedná se o (parametrickou) rovnici přímky v  $\mathbb{R}^3$ .

# Gaussova eliminace

## 2x2 soustava s komplexními čísly

$$\begin{aligned}ix_1 - (1 + i)x_2 &= 1 - i \\x_1 - ix_2 &= i\end{aligned}$$

### Krok 1. Gaussova eliminace

$$\left( \begin{array}{cc|c} i & -1 - i & 1 - i \\ 1 & -i & i \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{r}_2 := i\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1} \left( \begin{array}{cc|c} i & -1 - i & 1 - i \\ 0 & 2 + i & -2 + i \end{array} \right)$$

kde

$$i(-i) - (-1 - i) = 1 + 1 + i = 2 + i, \quad ii - (1 - i) = -1 - 1 + i = -2 + i.$$

### Krok 2. Zpětné dosazování

$$x_2 = \frac{-2 + i}{2 + i} \cdot \frac{2 - i}{2 - i} = \frac{-4 + 1 + 2i + 2i}{4 + 1} = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$x_1 = \frac{1 - i + (1 + i)(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i)}{i} = \frac{5 - 5i + (-3 - 4 - 3i + 4i)}{5i} = \frac{-2 - 4i}{5i} \cdot \frac{i}{i} = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i.$$