Lineární algebra — 1. přednáška: Soustavy lineárních rovnic

Dalibor Lukáš

Katedra aplikované matematiky
FEI VŠB–Technická univerzita Ostrava

email: dalibor.lukas@vsb.cz

http://www.am.vsb.cz/lukas/LA1

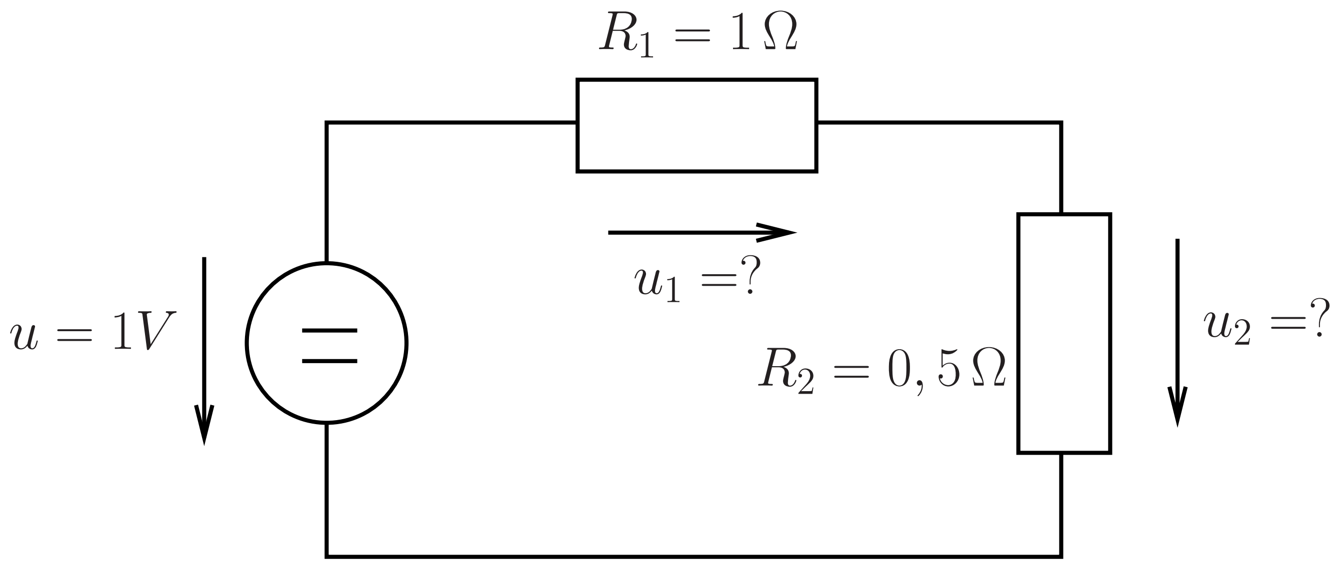
Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Soustavy lineárních rovnic

Stejnosměrný elektrický obvod



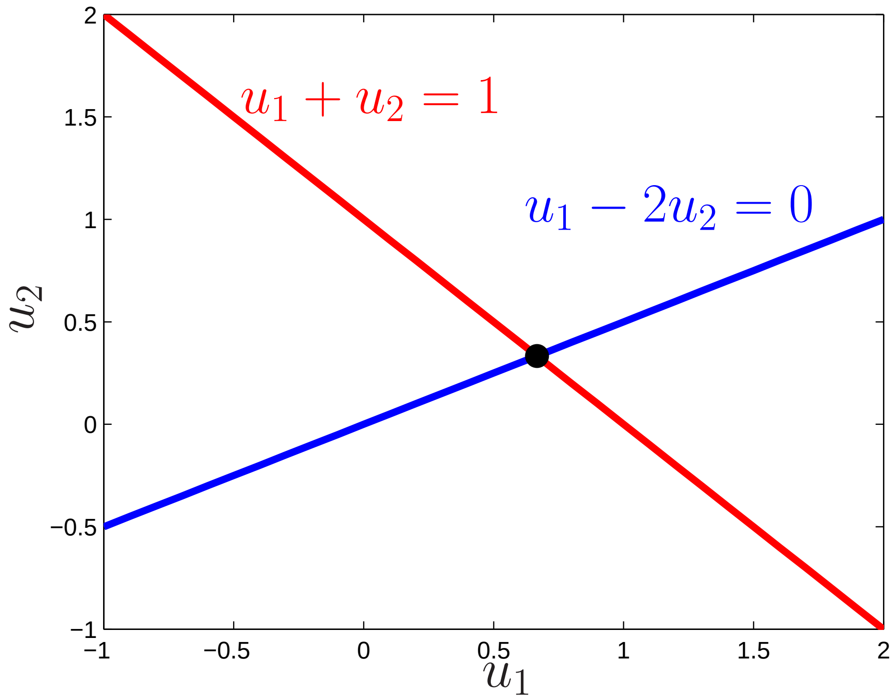
Kirchhoffovy zákony

$$\begin{array}{rcl} \sum_{\text{smyčka}} \text{napětí} & = & 0 \\ \sum_{\text{uzel}} \text{proudy} & = & 0 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcrcl} u_1 & + & u_2 & = & u \\ \frac{1}{R_1} u_1 & - & \frac{1}{R_2} u_2 & = & 0 \end{array}$$

Soustavy lineárních rovnic

Pohled po řádcích: mimoběžky — právě jedno řešení

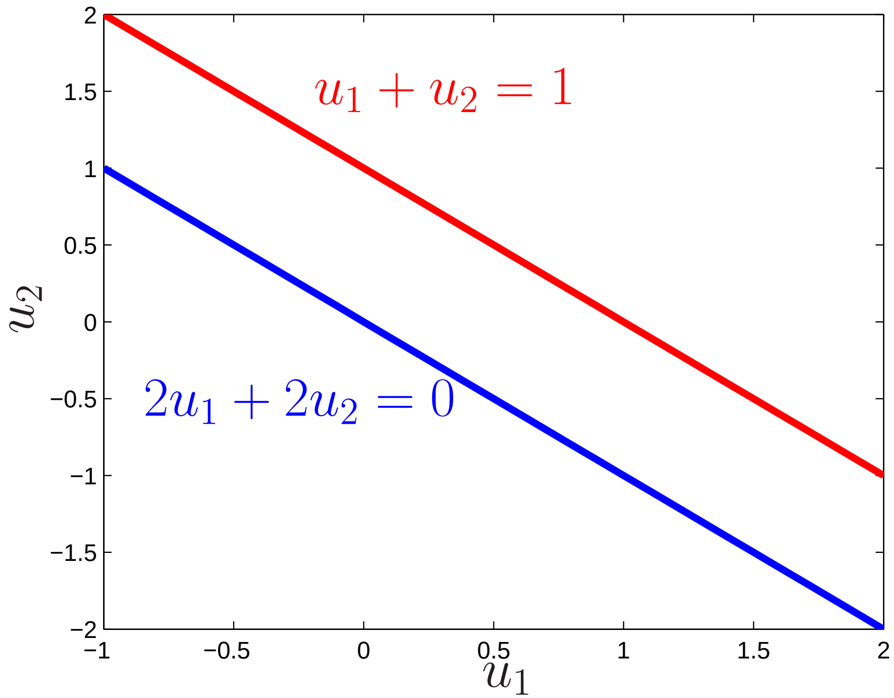
$$\begin{aligned} u_1 &+ \, u_2 &= 1 \\ u_1 &+ (-2)\, u_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{řešení}: \; u_1 = \frac{2}{3}, \; u_2 = \frac{1}{3}$$



Soustavy lineárních rovnic

Pohled po řádcích: rovnoběžky — žádné řešení nebo ...

$$\begin{array}{rcrcl} u_1 & + & u_2 & = & 1 \\ 2\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & 0 \end{array} \qquad \text{nemá řešení}$$

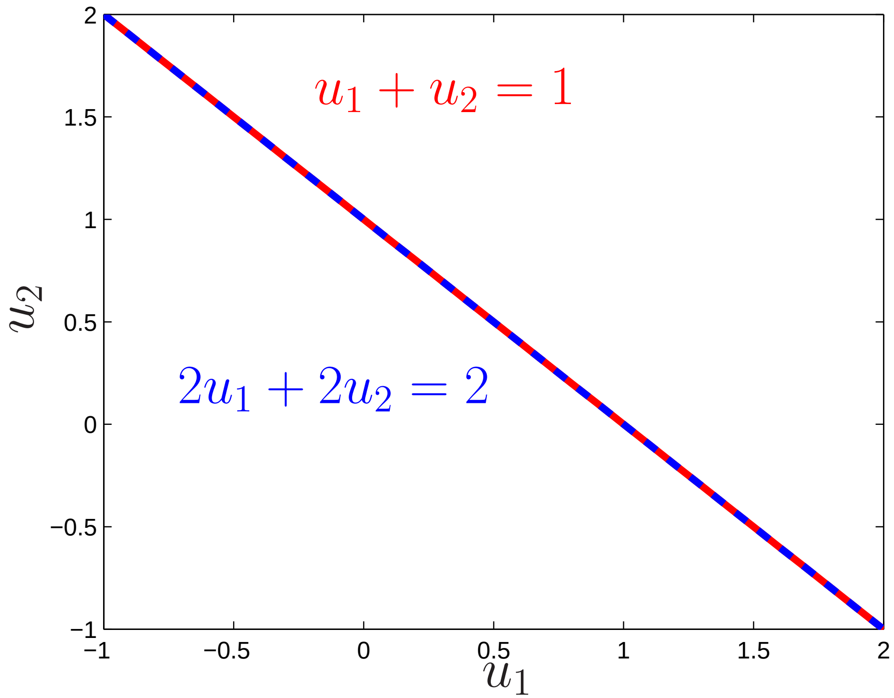


Soustavy lineárních rovnic

Pohled po řádcích: rovnoběžky — . . . nebo nekonečně mnoho řešení

$$\begin{array}{rcrcl} u_1 & + & u_2 & = & 1 \\ 2\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & 2 \end{array}$$

nekonečně mnoho řešení

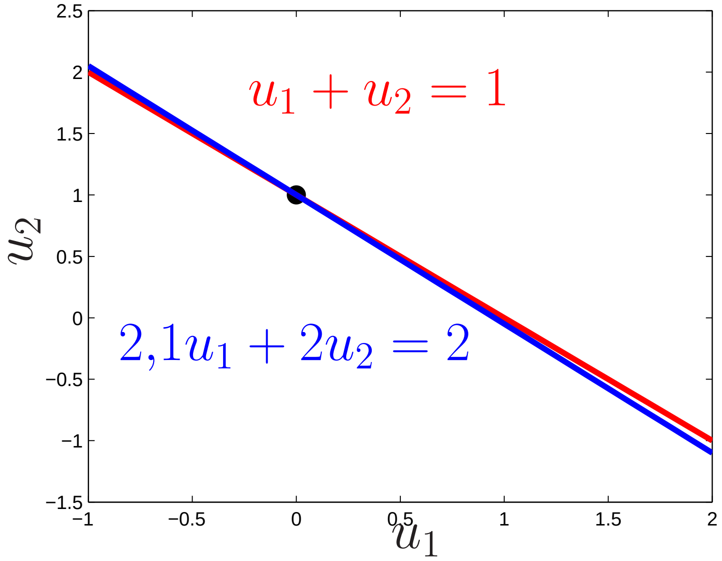


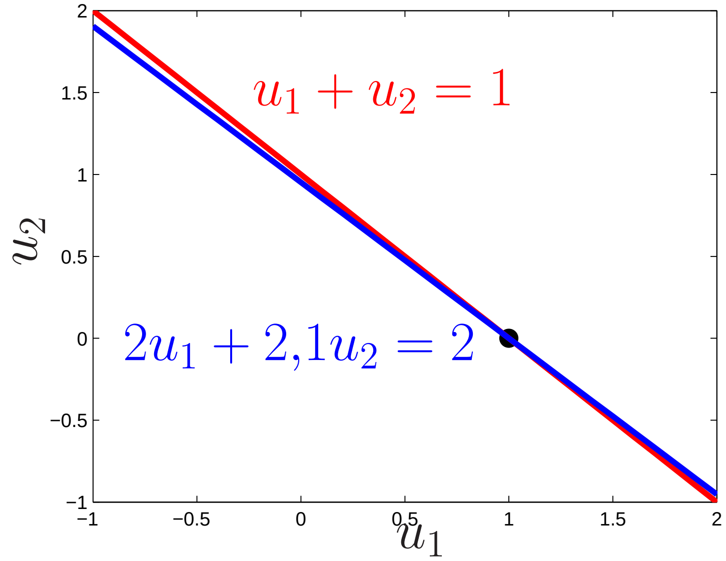
Soustavy lineárních rovnic

Pohled po řádcích: téměř rovnoběžky — nestabilní řešení

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 \\ 2{,}1\,u_1 + 2\,u_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_1 &= 0 \\ u_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= 1 \\ 2\,u_1 + 2{,}1\,u_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 0 \end{aligned}$$





Soustavy lineárních rovnic

Maticový zápis

$$\begin{aligned} 1\,u_1 &+ \quad 1\,u_2 &= 1 \\ 1\,u_1 &+ (-2)\,u_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{vektorový zápis: } \begin{pmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - 2\,u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matice soustavy $\mathbf{A}$, vektor pravých stran $\mathbf{b}$, vektor neznámých $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Zavedeme-li následující násobení matice krát vektor:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,u_1 + 1\,u_2 \\ 1\,u_1 + (-2)\,u_2 \end{pmatrix},$$

dostáváme maticový zápis soustavy

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

Soustavy lineárních rovnic

Násobení dvou vektorů (skalární součin)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \ldots, v_n) := u_1\, v_1 + u_2\, v_2 + \ldots u_n\, v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i$$

Násobení matice krát vektor: po řádcích

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} (a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n}) \\ (a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{\mathrm{r}} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u} := \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{u} \\ \mathbf{a}_2^{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{\mathrm{r}} \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Soustavy lineárních rovnic

Násobení matice krát vektor: po sloupcích

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{u} = \left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \left(\mathbf{a}_1^{\mathrm{s}} \ \ \mathbf{a}_2^{\mathrm{s}} \ \ \ldots \ \ \mathbf{a}_n^{\mathrm{s}} \right) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} :=$$

$$:= \underbrace{u_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + u_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}}_{\text{lineární kombinace sloupců}}$$

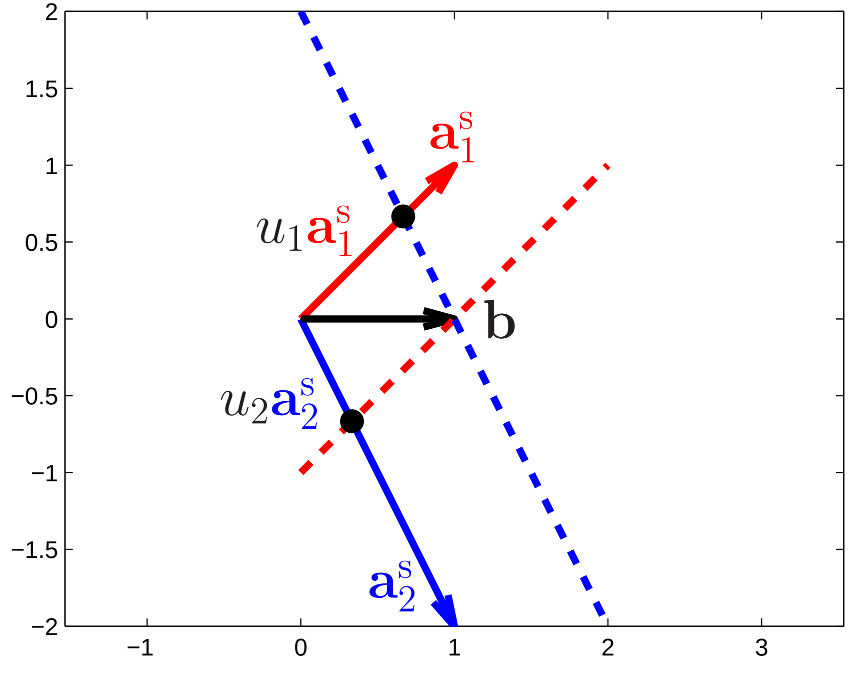
Lineární kombinace a soustavy

$$\begin{array}{rcrcl} u_1 & + & u_2 & = & 1 \\ u_1 & - & 2\,u_2 & = & 0 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soustavy lineárních rovnic

Pohled po sloupcích: „lineárně nezávislé” sloupce — právě jedno řešení

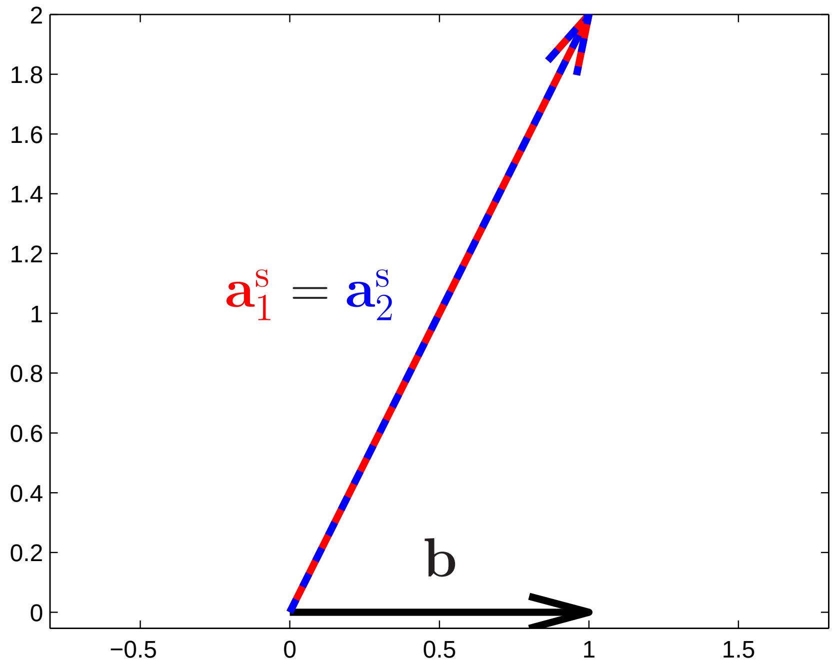
$$\begin{array}{rcrcl} u_1 & + & u_2 & = & 1 \\ u_1 & - & 2\,u_2 & = & 0 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{u_1}_{=2/3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{u_2}_{=1/3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Soustavy lineárních rovnic

Pohled po sloupcích: „lineárně závislé” sloupce — žádné nebo ...

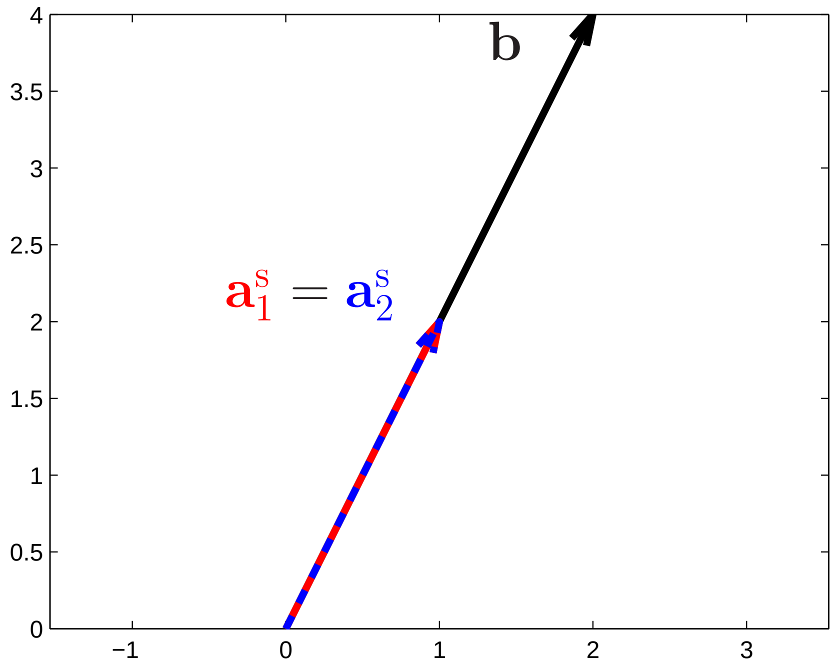
$$\begin{array}{rcrcl} u_1 & + & u_2 & = & 1 \\ 2\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & 0 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Soustavy lineárních rovnic

Pohled po sloupcích: „lineárně závislé” sloupce — . . . mnoho řešení

$$\begin{array}{rcrcl} u_1 & + & u_2 & = & 2 \\ 2\,u_1 & + & 2\,u_2 & = & 4 \end{array} \qquad \Leftrightarrow \qquad u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Soustavy lineárních rovnic

Soustava 3x3, pohled po řádcích

Geometrickým řešením je průsečík tří rovin.

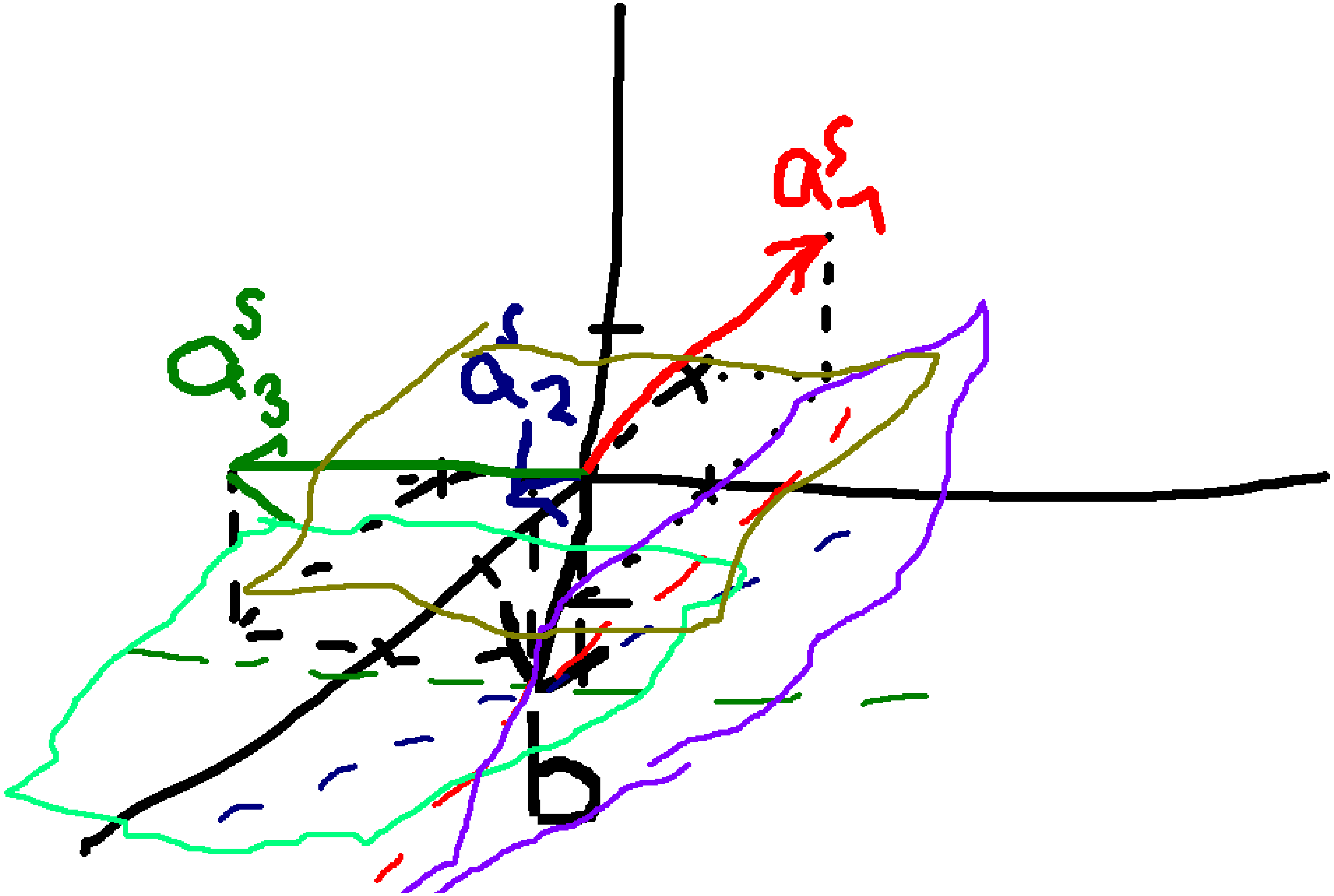
$$\begin{array}{rcrcrcl} u_1 & + & u_2 & - & u_3 & = & 1 \\ -u_1 & + & 2\,u_2 & + & 2\,u_3 & = & 2 \\ u_1 & - & u_2 & + & u_3 & = & 0 \end{array}$$

Soustava 3x3, pohled po sloupcích

Geometrickým řešením je průsečík rovnoběžnostěnu se sloupcovými vektory.

$$\underbrace{u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{lineární kombinace}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tady (má) geometrická představivost končí . . .



. . . a začíná abstrakce a počítání.