

# Trojný integrál – varianta I

Fubiniova věta

Transformace I.

Transformace II.

Převeďte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  na trojnásobný, je-li množina  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 5\}$  zvýrazněná na obrázku.

t1.u3d

$$\int_0^5 \left( \int_0^{5-x} \left( \int_0^{5-x-y} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^5 \left( \int_0^5 \left( \int_0^5 f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^5 \left( \int_0^{5-x} \left( \int_0^{5-x-y} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^5 \left( \int_0^5 \left( \int_0^{5-x-y} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

Převeďte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz$  na trojnásobný, je-li množina  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}$  zvýrazněná na obrázku.

t2.u3d

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1+x} \left( \int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1+x} \left( \int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) \, dz \right) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

Převeďte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz$  na trojnásobný, je-li množina  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + y \leq 4, z \leq 4 - x^2\}$  zvýrazněná na obrázku.

t3.u3d

$$\int_0^4 \left( \int_0^{2x} \left( \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^2 \left( \int_0^{4-2x} \left( \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^4 \left( \int_0^{2x} \left( \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left( \int_0^4 \left( \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

Převeďte trojný integrál  $\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz$  na trojnásobný, je-li množina  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \leq 1, z \leq xy\}$  zvýrazněná na obrázku.

t4.u3d

$$\int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{xy} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^x \left( \int_0^{xy} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 \left( \int_0^{xy} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^{xy} \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^1 f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$$

Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

test6.u3d

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_0^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^\pi \left( \int_0^3 \left( \int_0^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^3 \left( \int_0^3 \left( \int_0^2 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^3 \left( \int_0^2 \left( \int_0^{2\pi} r \, d\varphi \right) dz \right) dr$$

Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

test8.u3d

$$\int_0^{\pi/2} \left( \int_1^2 \left( \int_0^3 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^3 \left( \int_1^4 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^4 \left( \int_0^3 \left( \int_0^\pi r \, d\varphi \right) dz \right) dr$$

$$\int_{\pi/2}^\pi \left( \int_1^2 \left( \int_0^3 r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3 - y\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

test5.u3d

$$\int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{3-y} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_1^2 \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{3-y} r^2 \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 \left( \int_0^{3-r \sin \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 \left( \int_0^{3-r \sin \varphi} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$



Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do válcových souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 - y \leq 0, x^2 + y^2 \geq z \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

test10.u3d

$$\int_0^{x^2+y^2} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r \, dr \right) d\varphi \right) dz$$
$$\int_0^\pi \left( \int_0^{\sin \varphi} \left( \int_0^{r^2} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$

$$\int_0^\pi \left( \int_0^1 \left( \int_0^{r^2} r \, dz \right) dr \right) d\varphi$$
$$\int_0^r \left( \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\sin \varphi}^{\cos \varphi} r \, dr \right) d\varphi \right) dz$$

Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tsf1.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon z^2 \geq x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0, x \geq 0\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tsf2.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Jaký integrál vznikne transformací  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li  $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 - z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$ . Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_{\cos \vartheta}^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Jaký integrál vznikne transformací integrálu  $\iiint_A dx dy dz$  do sférických souřadnic, je-li:

$$A = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, x \geq 0\}.$$

Množina  $A$  je zobrazena na obrázku.

tsf4.u3d

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\pi} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{4 \cos \theta} r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\cos \theta} r^2 \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \end{aligned}$$