

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Západočeská univerzita v Plzni



Interaktivní hry a testy k procvičení integrálního počtu funkcí více proměnných

P. Šarmanová, R. Plch

Obsah

1. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ



Obsah

2. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Petra Šarmanová, Roman Plch

Interaktivní hry a testy k procvičení integrálního počtu funkcí více proměnných

© Šarmanová, Plch, 2011
ISBN

Předmluva

Vážení čtenáři,

text, který se vám dostává do rukou, vzniká v rámci řešení projektu „Matematika pro inženýry 21. století - inovace výuky matematiky na technických školách v nových podmínkách rychle se vyvíjející informační a technické společnosti“. Tento projekt je řešen na Vysoké škole báňské - Technické univerzitě v Ostravě a Západočeské univerzitě v Plzni v období 2009-2012.

Hlavní motivací tohoto projektu je potřeba reagovat na změnu úlohy jednotlivých partií matematiky při řešení praktických problémů, způsobenou zejména velkým pokrokem v matematickém modelování, dramatickým zlepšováním software a rychlým zvyšováním výpočetních kapacit moderních počítačů. Inženýři tak nyní běžně využívají stále se vyvíjející komplikované softwarové produkty založené na matematických pojmech, se kterými se v kurzech matematiky buďto nesetkají vůbec nebo v nevhodné formě. Na druhé straně neodráží z nejruznějších důvodů prezentace některých pojmů v základních kurzech potřeby odborných kateder. Tento stav ztěžuje studentům aktivní používání získaných vědomostí v odborných předmětech i orientaci v rychle se vyvíjejících metodách inženýrské praxe. Cí-

Obsah

3. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

lem projektu je inovace matematických a některých odborných kurzů na technických vysokých školách s cílem získat zájem studentů, zvýšit efektivnost výuky, zpřístupnit prakticky aplikovatelné výsledky moderní matematiky a vytvořit předpoklady pro efektivní výuku inženýrských předmětů. Zkvalitnění výuky matematiky budoucích inženýrů chceme dosáhnout po stránce formální využitím nových informačních technologií přípravy elektronických studijních materiálů a po stránce věcné pečlivým výběrem vyučované látky s důsledným využíváním zavedených pojmů v celém kurzu matematiky s promyšlenou integrací moderního matematického aparátu do vybraných inženýrských předmětů. Metodiku výuky matematiky a její atraktivnost pro studenty chceme zlepšit důrazem na motivaci a důsledným používáním postupu „od problému k řešení“.

V rámci projektu vytváříme 40 nových výukových materiálů z oblastí matematické analýzy, lineární algebry, numerických metod, metod optimalizace, teorie grafů, diskrétní matematiky, statistiky a vybraných odborných kurzů. Všechny hotové výukové materiály budou volně k dispozici na webových stránkách projektu <http://mi21.vsb.cz/>. Autoři předem děkují za všechny podnětné nápady k vylepšení textu a za upozornění na chyby.

V Ostravě 3. 1. 2011

Autoři



Obsah

4. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Obsah

Předmluva	3
1 Co je dobré vědět	6
2 Množiny bodů v prostoru	13
2.1 Kvadriky	14
2.2 Množiny bodů v prostoru	25
2.3 Zkus co umíš — hry Riskuj a Poznej	36
3 Dvojný integrál	37
3.1 Fubiniova věta	38
3.2 Transformace do polárních souřadnic	52
3.3 Zkus co umíš — hry Riskuj a Poznej	63
4 Trojný integrál	64
4.1 Fubiniova věta	65
4.2 Transformace do válcových souřadnic	75
4.3 Transformace do sférických souřadnic — varianta I	91
4.4 Transformace do sférických souřadnic — varianta II	101
4.5 Zkus co umíš — hry Riskuj a Poznej — varianta I	111
4.6 Zkus co umíš — hry Riskuj a Poznej — varianta II	112
Literatura	113



Obsah

5. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Kapitola 1

Co je dobré vědět

Vážení studenti,

připravili jsme pro vás spoustu her a testů na procvičení a pochopení základních pojmů integrálního počtu funkcí více proměnných. Dozvíte se, jaký je geometrický význam dvojného a trojného integrálu, jak vypočítat objem tělesa jednou pomocí dvojného a podruhé pomocí trojného integrálu, kdy zvolíme při výpočtu objemu tělesa transformaci do válcových souřadnic a kdy do sférických souřadnic a mnoho dalšího.

Čekají na vás interaktivní párovací hry s tajenkou, hry typu Riskuj pro jednoho či dva hráče a interaktivní testy s vyhodnocením a ukázkou správných odpovědí. A aby bylo vše maximálně názorné, otázky ilustrujeme interaktivní 3D grafikou.

Obsah

6. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Párovací hry

Párovací hra je interaktivní PDF s doplňovací tajenkou. Cílem hráče je správně spárovat nabízené otázky a odpovědi. Hráč tedy zaklikne políčko u jedné otázky a následně u jedné odpovědi. Při nalezení správného páru se odkryje jedno písmeno v tajence. Při chybě získá hráč trestný bod a pokračuje ve hře.

Hry Riskuj

Hra typu Riskuj je obdobou televizní hry Riskuj. Hráč si vybírá otázky různých témat a obtížnosti. Otázky jsou ohodnoceny 100 body, 200 body, 300 body atd. Při kliknutí na vybrané políčko se zobrazí otázka s výběrem odpovědí. Po zakliknutí odpovědi je otázka vyhodnocena a hráči jsou body buď přičteny nebo odečteny. Celkové skóre je zobrazeno na hracím poli. Zábavnější variantou této hry je varianta určená pro dva hráče. Tehdy se oba hráči pravidelně střídají a soupeří navzájem. Vítězem se pochopitelně stává ten, který získá více bodů.

Testy

Interaktivní testy obsahují otázky s výběrem z předem daných možností, kdy může být správná právě jedna odpověď nebo více odpovědí. U otázek, kde lze volit jen jednu odpověď (test nedovolí zaškrtnout více odpovědí), je správná odpověď bodována počtem bodů uvedených v závorce u zadání a špatná odpověď je bodována 0 body. U otázek, kde lze volit více správných odpovědí, je součet bodů správných odpovědí uveden v závorce u zadání a za každou špatnou odpověď bude odečten jeden bod.

Test zahájíte kliknutím na tlačítko „Zacátek testu“. Následně řešíte jednotlivé testové otázky a test ukončíte kliknutím na tlačítko „Konec testu“. Tím dojde automaticky k vyhod-

Obsah

7. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

nocení testu a zobrazení počtu správně zodpovězených otázek, získaných bodů a procenta úspěšnosti. Opravení testu se provede kliknutím na tlačítko „Výsledky“. Správné odpovědi budou označeny zeleně a chybné odpovědi červeně.

3D grafika

Většina her a testů obsahuje ilustrační 3D grafiku. Všechny 3D obrázky jsou interaktivní, je tedy možno s nimi otáčet a prohlížet si těleso ze všech stran a úhlů. Pro další manipulaci je třeba zobrazit 3D Toolbar (je součástí Adobe Readeru). Toolbar zobrazíme kliknutím pravého tlačítka myši na obrázek a volbou Nástroje – Zobrazit pruh nástrojů (Tools – Show Toolbar). Základní možnosti Toolbaru jsou dynamický zoom, posunutí, natočení, změna osvětlení, změna barvy pozadí či skrytí, zobrazení nebo izolování pouze určitých prvků modelu. Možné je rovněž využití různých zobrazovacích módů (Solid, Transparent, Shaded Illustration atd.). Pro korektní zobrazení interaktivní 3D grafiky je třeba použít Adobe Reader verze minimálně 8.1.1.



Obsah

8. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Jaké transformační rovnice jsou ve sbírce použity?

Připomeňme si základní transformační rovnice při transformaci dvojného integrálu do polárních souřadnic a trojného integrálu do válcových souřadnic a sférických souřadnic. Vzhledem k tomu, že jsou běžně používány dvě varianty transformace do sférických souřadnic, uvádíme zde obě varianty a stejně tak je na každou z variant připraven samostatný test, párovací hra i hra typu Riskuj.

Transformace do polárních souřadnic

Uvažujme bod T v rovině s kartézskými souřadnicemi $[x, y]$. Označme r vzdálenost bodu T od počátku O kartézské soustavy souřadnic a t úhel, který svírá polopřímka OT s kladnou částí osy x .

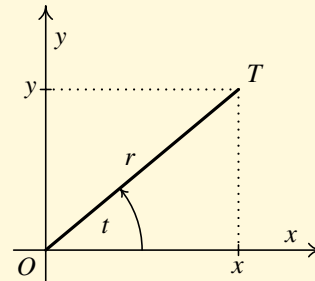
Vztah mezi kartézskými souřadnicemi $[x, y]$ a polárními souřadnicemi $[r, t]$ je dán rovnicemi:

$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t.$$

Jakobián $|J| = r$.

Přitom $r \geq 0$ a t nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ nebo z jiného intervalu délky 2π .



Obsah

9. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Transformace do válcových souřadnic

Uvažujme bod T v prostoru s kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$ a jeho kolmý průmět T' do roviny xy s kartézskými souřadnicemi $[x, y, 0]$. Jak již víme, v rovině lze provést transformaci kartézských souřadnic $[x, y]$ bodu T' do polárních souřadnic $[r, t]$. Nyní využijeme tohoto vyjádření prvních dvou souřadnic bodu T v polárních souřadnicích k zavedení nové transformace kartézských souřadnic $[x, y, z]$ bodu T do tzv. válcových (cylindrických) souřadnic $[r, t, z]$.

Vztah mezi kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$ bodu T a válcovými souřadnicemi $[r, t, z]$ je dán rovnicemi:

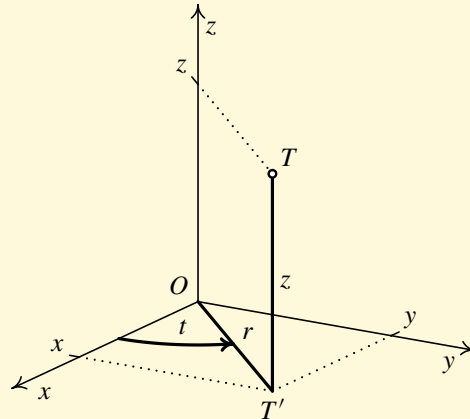
$$x = r \cos t,$$

$$y = r \sin t,$$

$$z = z.$$

Jakobián $|J| = r$.

Přitom $r \geq 0$ a t nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ nebo z jiného intervalu délky 2π .



Obsah

10. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Transformace do sférických souřadnic — varianta I

Uvažujme bod T v prostoru s kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$ a jeho kolmý průmět T' do roviny xy s kartézskými souřadnicemi $[x, y, 0]$. Označme r vzdálenost bodu T od počátku O kartézské soustavy souřadnic a φ úhel, který svírá polopřímka OT' s kladnou částí osy x . Dále označme ϑ úhel, který svírá polopřímka OT s kladnou částí osy z . Polohu bodu T v prostoru pak určíme trojicí čísel $[r, \varphi, \vartheta]$, kterou nazveme sférické souřadnice bodu T .

Vztah mezi kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$ bodu T a sférickými souřadnicemi $[r, \varphi, \vartheta]$ je dán rovnicemi:

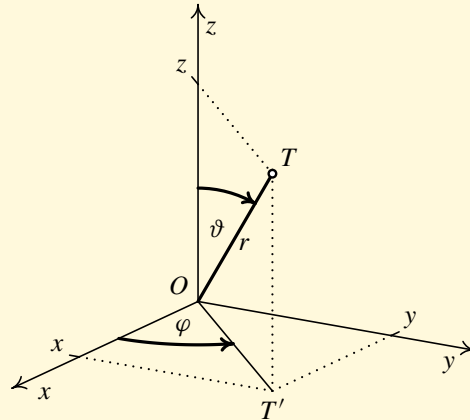
$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta,$$

$$z = r \cos \vartheta.$$

Jakobián $|J| = r^2 \sin \vartheta$.

Přitom $r \geq 0$, úhel φ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ nebo z jiného intervalu délky 2π a úhel ϑ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$.



Obsah

11. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Transformace do sférických souřadnic — varianta II

Uvažujme bod T v prostoru s kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$ a jeho kolmý průmět T' do roviny xy s kartézskými souřadnicemi $[x, y, 0]$. Označme r vzdálenost bodu T od počátku O kartézské soustavy souřadnic a φ úhel, který svírá polopřímka OT' s kladnou částí osy x . Dále označme ϑ úhel, který svírá polopřímka OT s polopřímkou OT' . Polohu bodu T v prostoru pak určíme trojicí čísel $[r, \varphi, \vartheta]$, kterou nazveme sférické souřadnice bodu T .

Vztah mezi kartézskými souřadnicemi $[x, y, z]$ bodu T a sférickými souřadnicemi $[r, \varphi, \vartheta]$ je dán rovnicemi:

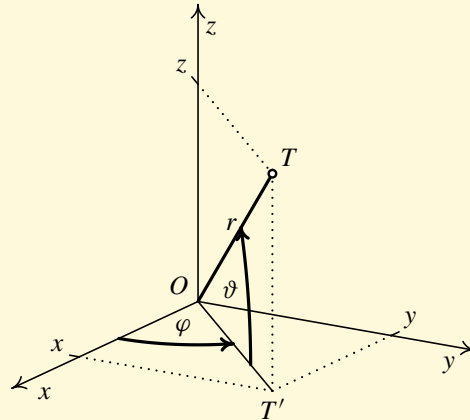
$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta,$$

$$y = r \sin \varphi \cos \vartheta,$$

$$z = r \sin \vartheta.$$

Jakobián $|J| = r^2 \cos \vartheta$.

Přitom $r \geq 0$, úhel φ nabývá hodnot z intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ nebo z jiného intervalu délky 2π a úhel ϑ nabývá hodnot z intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$.



Poděkování

Závěrem bychom rádi poděkovali panu doc. RNDr. J. Kubenovi, CSc. za pečlivé přečtení celé sbírky a pomoc při přípravě metapostových obrázků.

Obsah

12. strana ze 114



Zavřít dokument


Konec


Celá obrazovka / Okno


Kapitola 2

Množiny bodů v prostoru

Tato kapitola slouží k procvičení určování základních kvadrik a těles, které vznikly průnikem dvou nebo více ploch v trojrozměrném prostoru. S podobnými tělesy se setkáte v dalších kapitolách.

 Kvadriky

 Množiny bodů v prostoru

 Zkus co umíš – hry Riskuj a Poznej

Obsah

13. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Kvadriky

1. (10b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

Kvadrika s rovnicí $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $r > 0$ je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Obsah

15. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

2. (10b.) K množině na obrázku přiřadte odpovídající rovnici. Přitom necht $a, b, c, p, q > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$



Obsah

16. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. (10b.) K množině zobrazené na obrázku přiřadte odpovídající rovnici. Přitom $a, b, c, p, q > 0$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$



Obsah

17. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

4. (10b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

Kvadrika s rovnicí $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} = 1$ je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Obsah

18. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5. (10b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

Nechť $a, b > 0$. Kvadrík s rovnicí $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Obsah

19. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

6. (10b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

Kvadrika s rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$, kde $a, b, c > 0$, je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Obsah

20. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

7. (10b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

Kvadrika s rovnicí $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$, kde $p, q > 0$, je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Obsah

21. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (10b.) K množině na obrázku přiřaďte odpovídající rovnici. Přitom $a, b, c, p, q > 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Obsah

22. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

9. (10b.)

(a)

(b)

(c)

(d)

Nechť $a, b, c > 0$. Kvadrika s rovnicí $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ je na obrázku

(a)

(b)

(c)

(d)



Obsah

23. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

24. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

2.2. Množiny bodů v prostoru

Párovací hry:

[illegible]

Spustit


[illegible]

Spustit


Test:


Prüfungsausschuss: Prüfung Integrál, transformace de silových soustav

1. (30%) Dátí integrál vektor transformace $\iint_D f(x,y,z) \, dV$ de silových soustav, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, $z \geq 0$. Měřítko R soustavu se shoduje.



Matematisen
Tutkimuskeskus
Jyväskylän
yliopisto





☒ $\iint_D (f(x, -y, -z)) \, dV$

☐ $\iint_D (f(x, y, -z)) \, dV$


☐ $\iint_D (f(x, -y, z)) \, dV$

☐ $\iint_D (f(x, y, z)) \, dV$

Matematisen Tutkimuskeskus

Matematisen tutkimuskeskus
Jyväskylän yliopisto

Yhteystiedot
Puhelin: 016 3309100
Faksi: 016 3309101
Sähköposti: matematiikka@utu.fi



Matematisen
Tutkimuskeskus
Jyväskylän
yliopisto

Spustit



Obsah

25. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Množiny bodů v prostoru

1. (10b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test8.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 - z^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 - y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$$

Obsah

26. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

2. (10b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

test1.u3d

$$x^2 + y^2 = 1, z = x^2 - y^2, z = 4$$

$$x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 4$$

$$x^2 + y^2 = 1, z = 1 - x^2 - y^2, z = 4$$

$$x^2 - y^2 = 1, z = 1 - x^2 - y^2, z = 4$$



Obsah

27. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. (10b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

test11.u3d

$$x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - x = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Obsah

28. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

4. (10b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku, je li $z \geq 0$

test2.u3d

$$y^2 + z^2 - x^2 = 0, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = -1$$

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 0, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = -1$$

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{2} = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, x^2 + y^2 - z^2 = 1$$



Obsah

29. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

5. (10b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test3.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - z^2 \leq -1, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$$



Obsah

30. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

6. (10b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test4.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: z \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: z \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, x^2 + y^2 - z^2 \leq 3\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: z \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, x^2 + y^2 - z^2 \leq 3\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: z \geq \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$$



Obsah

31. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

7. (10b.) Rozhodněte, kterými plochami je ohraničeno těleso na obrázku

test5.u3d

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 3 - y$$

$$x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 3 - x$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 3 - x$$

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 3 - y$$



Obsah

32. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (10b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test6.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 - y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - z^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq 2\}$$



Obsah

33. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

9. (10b.) Rozhodněte, která z následujících množin je zobrazena na obrázku

test9.u3d

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, y^2 + 2 \leq z \leq 1 - x^2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 - x^2 \leq z \leq y^2 + 2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 + x^2 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 - x^2 \leq z \leq x^2 + y^2\}$$

Obsah

34. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

35. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

2.3. Zkus co umíš — hry Riskuj a Poznej

Hra Riskuj (varianta pro jednoho hráče):

Hra Riskuj (varianta pro dva hráče):

Trojný integrál

© R. Pálek, P. Šestákovi, 2019

Existující síla	Transformace I.	Transformace II.
100	Spustit	300
Spustit	200	200
300	300	300
400	400	Spustit

Body: 300

Spustit

Trojný integrál

© R. Pálek, P. Šestákovi, 2019

Existující síla	Transformace I.	Transformace II.
100	300	Spustit
200	Spustit	200
Spustit	300	300
400	400	Spustit

Body: 100

Body: 300

Spustit

Hra Poznej:

Trojný integrál

© R. Pálek, P. Šestákovi, 2019

A	B	C
1		
2		
3		
4		

Spustit



Obsah

36. strana ze 114



Zavřít dokument


Konec


Celá obrazovka / Okno


Kapitola 3

Dvojný integrál

Cílem této kapitoly je procvičení problematiky dvojných integrálů, především Fubiniovy věty a řešení integrálů pomocí transformace do polárních souřadnic.

 Fubiniova věta

 Transformace do polárních souřadnic

 Zkus co umíš – hry Riskuj a Poznej

Obsah

37. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3.1. Fubiniova věta

Párovací hry:

Pokračení je zmanuálnu životní

Průměr dvojitého integrálu $\iint_R f(x,y) dx dy$ lze vyjádřit pomocí iterací. $p=3$ možnosti, 4 vyjádření na obrázcích.

Obrázky:

Odpovědi:

☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$ ☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$

Instrukce:

Výběr volíte podle tvaru oblasti na řádku, která se v ní nachází. Posti v ní odpovídá tvaru oblasti odpovídá. Za každou řádku odpovídá kliknutím na tlačítko.

Autorka: Alena Štěpánková

Spustit

Náhodnost se střídá

Průměr dvojitého integrálu $\iint_R f(x,y) dx dy$ lze vyjádřit pomocí iterací. $p=3$ možnosti, 4 vyjádření na obrázcích.

Obrázky:

Odpovědi:

☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$ ☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$

Instrukce:

Výběr volíte podle tvaru oblasti na řádku, která se v ní nachází. Posti v ní odpovídá tvaru oblasti odpovídá. Za každou řádku odpovídá kliknutím na tlačítko.

Autorka: Alena Štěpánková

Spustit

Dvojím způsobem lze vyjádřit

Průměr dvojitého integrálu $\iint_R f(x,y) dx dy$ lze vyjádřit pomocí iterací. $p=3$ možnosti, 4 vyjádření na obrázcích.

Obrázky:

Odpovědi:

☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$ ☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$

Instrukce:

Výběr volíte podle tvaru oblasti na řádku, která se v ní nachází. Posti v ní odpovídá tvaru oblasti odpovídá. Za každou řádku odpovídá kliknutím na tlačítko.

Autorka: Alena Štěpánková

Spustit

Tu, kdo má

Průměr dvojitého integrálu $\iint_R f(x,y) dx dy$ lze vyjádřit pomocí iterací. $p=3$ možnosti, 4 vyjádření na obrázcích.

Obrázky:

Odpovědi:

☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$ ☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$

Instrukce:

Výběr volíte podle tvaru oblasti na řádku, která se v ní nachází. Posti v ní odpovídá tvaru oblasti odpovídá. Za každou řádku odpovídá kliknutím na tlačítko.

Autorka: Alena Štěpánková

Spustit

Test:

Průměr dvojitého integrálu $\iint_R f(x,y) dx dy$ lze vyjádřit pomocí iterací. $p=3$ možnosti, 4 vyjádření na obrázcích.

Obrázky:

Odpovědi:

☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$ ☐ $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$ ☐ $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y) dx dy$

Instrukce:

Výběr volíte podle tvaru oblasti na řádku, která se v ní nachází. Posti v ní odpovídá tvaru oblasti odpovídá. Za každou řádku odpovídá kliknutím na tlačítko.

Autorka: Alena Štěpánková

Spustit



Obsah

38. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Dvojný integrál – Fubiniova věta

1. (2b.) Uveďte název věty, která pojednává o převedení vícerozměrného integrálu na integrál vícenásobný.

Fubiniova

Cauchyova

Weierstrassova

Greenova

2. (2b.) Platí $\iint_A f(x, y) \, dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2+\sin x} \frac{y}{3} \, dy \right) dx = \frac{3\pi}{2}$. Rozhodněte, které z následujících tvrzení je pravdivé.

Číslo $\frac{3\pi}{2}$ představuje obsah rovinné oblasti A .

Číslo $\frac{3\pi}{2}$ představuje obsah rovinné oblasti, která je ohraničena funkcemi $z = \frac{y}{3}$ a $z = 2 + \sin x$.

Číslo $\frac{3\pi}{2}$ představuje objem tělesa, které je shora ohraničeno grafem funkce $z = \frac{y}{3}$ a jehož podstava je A .

Číslo $\frac{3\pi}{2}$ představuje objem tělesa, které je ohraničeno grafem funkce $z = 2 + \sin x$ a jehož podstava je A .

Obsah

39. strana ze 114

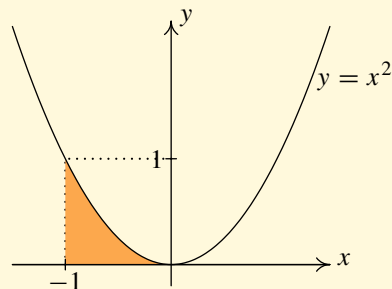


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3. (6b.) Převedte dvojný integrál $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



$$\int_0^{x^2} \left(\int_{-1}^0 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left(\int_0^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

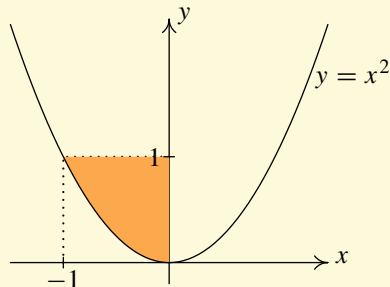
$$\int_1^{x^2} \left(\int_{-1}^0 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

4. (6b.) Převedte dvojný integrál $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



$$\int_0^{x^2} \left(\int_{-1}^0 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left(\int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left(\int_{\sqrt{y}}^0 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-1}^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

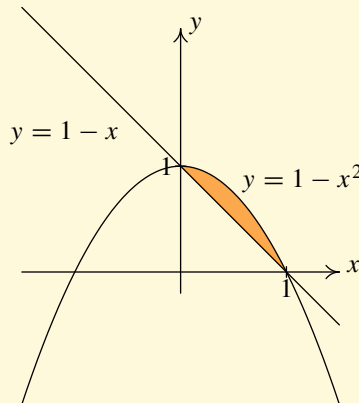
$$\int_{-1}^0 \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left(\int_{x^2}^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^0 \left(\int_{-\sqrt{y}}^1 f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) \, dx \right) dy$$

5. (6b.) Převedte dvojný integrál $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



$$\int_0^1 \left(\int_{1-x^2}^{1-x} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

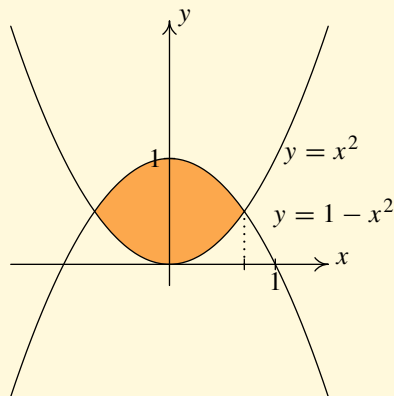
$$\int_0^1 \left(\int_{1-x}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_{1-y}^{-\sqrt{1-y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_{1-y}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) \, dx \right) dy$$

6. (6b.) Převedte dvojný integrál $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$ na dvojnásobný, je-li množina A zvýrazněná na obrázku.



$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_0^1 f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\int_{1-x^2}^{x^2} f(x, y) \, dy \right) dx$$

7. (6b.) U následujícího příkladu vyberte dvojnásobný integrál, který vznikne záměnou pořadí integrace u integrálu: $\int_{-2}^0 \left(\int_{y^2-4}^0 dx \right) dy$.

$$\int_{-2}^0 \left(\int_{-\sqrt{x+4}}^0 dy \right) dx$$

$$\int_{-4}^0 \left(\int_{\sqrt{x+4}}^0 dy \right) dx$$

$$\int_{-2}^0 \left(\int_{-\sqrt{x-4}}^0 dy \right) dx$$

$$\int_{-4}^0 \left(\int_{-\sqrt{x+4}}^0 dy \right) dx$$

Obsah

44. strana ze 114

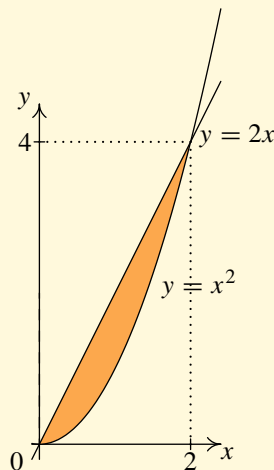


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

8. (6b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem tělesa S ležícího pod paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a nad množinou A v rovině xy ohraničenou přímkou $y = 2x$ a parabolou $y = x^2$. Množina A je zobrazena na obrázku.



$$\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx$$

$$\pi \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)^2 dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\int_{2x}^{x^2} (x^2 + y^2) dy \right) dx$$

9. (6b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem tělesa S ohraničeného plochou $x + y + z = 1$ a souřadnými rovinami xy , xz , yz .

t1-09.u3d

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y + z - 1) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (1 - x) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x + y - 1) dy \right) dx$$

Obsah

46. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

10. (6b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem tělesa S ohraničeného shora eliptickým paraboloidem $z = 8 - 2x^2 - y^2$ a ze zdola rovinou xy .

t1-10.u3d

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-2}^2 (8 - 2x^2 - y^2) dy \right) dx$$

$$\int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} (8 - 2x^2 - y^2) dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{8-2x^2}}^{\sqrt{8-2x^2}} (8 - 2x^2 - y^2) dy \right) dx$$

$$\int_{-2}^2 \left(\int_{-\sqrt{8-2x^2}}^{\sqrt{8-2x^2}} (8 - 2x^2 - y^2) dy \right) dx$$

Obsah

47. strana ze 114

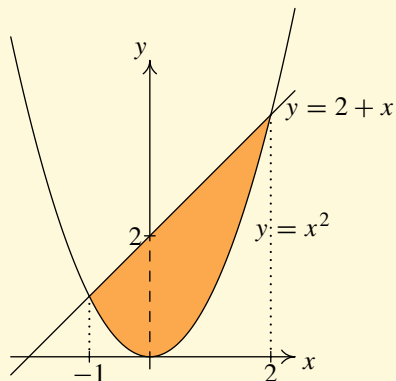


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

11. (6b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme obsah množiny
 $A = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y, y - x \leq 2\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.



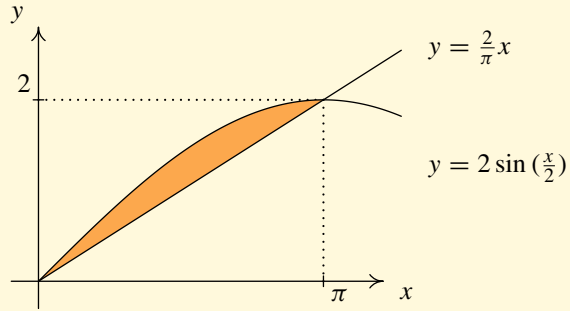
$$\int_{-1}^2 \left(\int_0^{2+x} (x+2-x^2) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\int_0^{2+x} x^2 dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^2 \left(\int_0^{2+x} 1 dy \right) dx$$

$$\int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{2+x} 1 dy \right) dx$$

12. (6b.) Zaměňte pořadí integrace u integrálu $\int_0^\pi \left(\int_{\frac{2}{\pi}x}^{2\sin(\frac{x}{2})} f(x, y) dy \right) dx$. Integrační množina je zobrazena na obrázku.



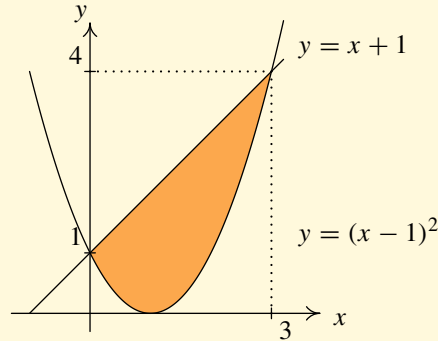
$$\int_0^\pi \left(\int_0^2 f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^2 \left(\int_{\arcsin(\frac{y}{2})}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^2 \left(\int_{2\sin(\frac{y}{2})}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^2 \left(\int_{2\arcsin(\frac{y}{2})}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dx \right) dy$$

13. (6b.) Zaměňte pořadí integrace u integrálu $\int_0^3 \left(\int_{(x-1)^2}^{x+1} f(x, y) dy \right) dx$. Integrační množina je zobrazena na obrázku.



$$\int_0^4 \left(\int_{y-1}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy + \int_1^4 \left(\int_{y-1}^{1+\sqrt{y}} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^4 \left(\int_{x+1}^{(x-1)^2} f(x, y) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-(y-1)^2}^{(y-1)^2} f(x, y) dx \right) dy + \int_1^4 \left(\int_{y+1}^{(y-1)^2} f(x, y) dx \right) dy$$

Obsah

50. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

51. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3.2. Transformace do polárních souřadnic

Párovací hry:

[illegible]

Spustit


[illegible]

Spustit


Test:

1. (10b) (3b) Trojitéj integrál – transformácie do súradných sústáv

1. (10b) (3b) Integrál trojitej transformácie $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$ do súradných sústáv, $y = 4 - x^2 - z^2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $-2 \leq z \leq 2$, $z \geq 0$. Skúste A vyčísliť na obrázku.



**UNIVERZITA
V ŽILINE**



$A =$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$


$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

2. (10b) (3b) Trojitéj integrál – transformácie do súradných sústáv


Skúste odhadnúť hodnotu integrálu: $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$

Hodnotu funkcie: $f(x,y,z) = 1$

Prostora (objektu): V



**UNIVERZITA
V ŽILINE**



$A =$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$


$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

3. (10b) (3b) Trojitéj integrál – transformácie do súradných sústáv


Skúste odhadnúť hodnotu integrálu: $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$

Hodnotu funkcie: $f(x,y,z) = 1$

Prostora (objektu): V



**UNIVERZITA
V ŽILINE**



$A =$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$


$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

4. (10b) (3b) Trojitéj integrál – transformácie do súradných sústáv


Skúste odhadnúť hodnotu integrálu: $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$

Hodnotu funkcie: $f(x,y,z) = 1$

Prostora (objektu): V



**UNIVERZITA
V ŽILINE**



$A =$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$


$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

5. (10b) (3b) Trojitéj integrál – transformácie do súradných sústáv


Skúste odhadnúť hodnotu integrálu: $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$

Hodnotu funkcie: $f(x,y,z) = 1$

Prostora (objektu): V



**UNIVERZITA
V ŽILINE**



$A =$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$


$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

6. (10b) (3b) Trojitéj integrál – transformácie do súradných sústáv


Skúste odhadnúť hodnotu integrálu: $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$

Hodnotu funkcie: $f(x,y,z) = 1$

Prostora (objektu): V



**UNIVERZITA
V ŽILINE**



$A =$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$

$\int_0^2 \int_0^2 \left(\int_{-\sqrt{4-x^2-z^2}}^{\sqrt{4-x^2-z^2}} \right) dx$
</

Spustit



Obsah

52. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Dvojný integrál – transformace do polárních souřadnic

1. (2b.) Určete absolutní hodnotu jakobiánu transformace do polárních souřadnic:

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t$$

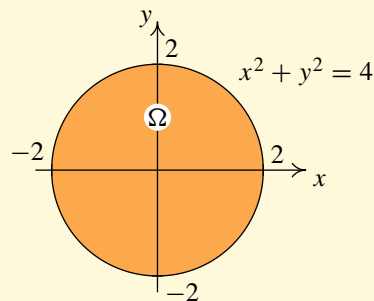
$$r \cos t$$

$$r$$

$$r^2$$

$$r \sin t$$

2. (6b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ do polárních souřadnic, je-li $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$.



$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^2 dr \right) dt$$

$$\int_0^2 r^2 \left(\int_0^{2\pi} dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \sqrt{r^2} dr \right) dt$$

Obsah

53. strana ze 114

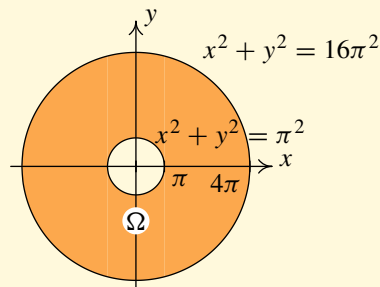


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. (6b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iint_{\Omega} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ do polárních souřadnic, je-li $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq (4\pi)^2\}$.



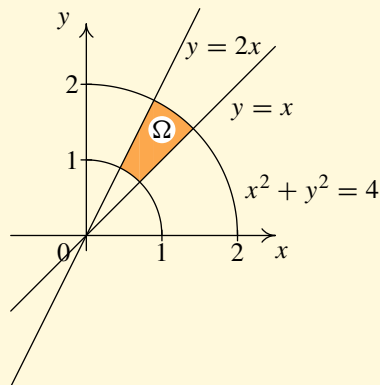
$$\int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi}^{2\pi} \sin r \, dr \right) dt$$

$$\int_0^{4\pi} r^2 \left(\int_0^{2\pi} r \, dt \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi}^{4\pi} r \sin r \, dr \right) dt$$

$$\int_{\pi}^{4\pi} \left(\int_{\pi}^{4\pi} r \sin \sqrt{r^2} \, dr \right) dt$$

4. (6b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$ do polárních souřadnic, je-li $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq y \leq 2x\}$.



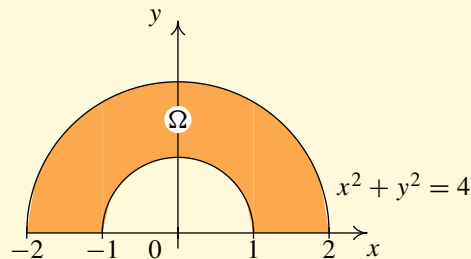
$$\int_1^4 \left(\int_{\pi/4}^{2\pi} r^3 dt \right) dr$$

$$\int_1^2 \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} r^2 dt \right) dr$$

$$\int_1^4 \left(\int_{\pi/4}^{2\pi} r^2 dr \right) dt$$

$$\int_1^2 \left(\int_{\pi/4}^{\arctg 2} r^3 dt \right) dr$$

5. (6b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iint_{\Omega} \frac{\ln(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} dx dy$ do polárních souřadnic, je-li $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0\}$.



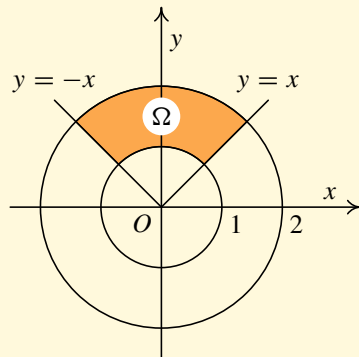
$$\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\ln r^2}{r^2} dt \right) dr$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 \frac{\ln r^2}{r^2} r dt \right) dr$$

$$\int_1^2 \left(\int_0^{\pi} \frac{\ln r^2}{r^2} r dt \right) dr$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 \frac{\ln r^2}{r^2} dt \right) dr$$

6. (6b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem tělesa S ležícího pod kuželovou plochou $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a nad množinou Ω v rovině xy , která je zobrazena na obrázku.



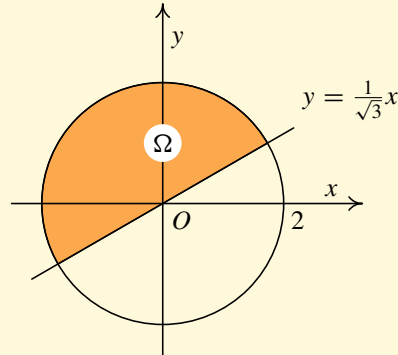
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_1^2 r^2 dr \right) dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^2 r dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} \left(\int_1^2 \sqrt{x^2 + y^2} dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^2 \sqrt{x^2 + y^2} dr \right) dt$$

7. (6b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem tělesa S ležícího pod plochou $z = \cos(x^2 + y^2)$ a nad množinou Ω v rovině xy , která je zobrazena na obrázku.



$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(\int_0^2 \cos r^2 dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{11\pi}{6}} \left(\int_0^2 r \cos r dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \left(\int_0^2 r \cos r^2 dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \left(\int_0^2 r \cos r^2 dr \right) dt$$

Obsah

58. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

8. (6b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem tělesa S , které je ohraničeno rovinou $z = 0$ a paraboloidem $z = 1 - x^2 - y^2$.

np9.u3d

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \, dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r(1 - r^2) \, dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-x^2} (1 - x^2 - y^2) \, dr \right) dt$$

$$\pi \int_0^\pi \left(\int_0^\pi r \, dr \right) dt$$



Obsah

59. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

9. (6b.) Necht $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \wedge y \geq x\}$. Transformujte integrál

$\iint_{\Omega} e^{-x^2-y^2} dx dy$ do polárních souřadnic.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r e^{-r} dr \right) dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r dr \right) dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} e^{-r^2} dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r e^{-r^2} dr \right) dt$$



10. (6b.) Necht $\Omega = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x + y \geq 1\}$. Transformujte integrál

$$\iint_{\Omega} xy \, dx dy \text{ do polárních souřadnic.}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{1}{\sin t + \cos t}}^1 r^3 \cos t \sin t \, dr \right) dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^{\frac{1}{\sin t + \cos t}} r^3 \cos t \sin t \, dr \right) dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^3 \cos t \sin t \, dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{1}{\sin t + \cos t}}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos t \sin t \, dt \right) dr$$



Obsah

61. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

11. (6b.) Transformujte integrál $\int_{-3}^3 \left(\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy \right) dx$ do polárních souřadnic.

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_{-3}^3 r \sin(r^2) dr \right) dt$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_{-3}^3 r \sin(r) dr \right) dt$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^3 r \sin(r^2) dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 r dr \right) dt$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

62. strana ze 114



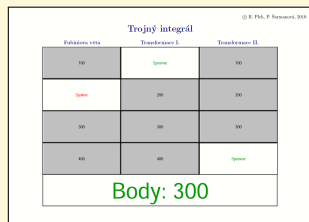
Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

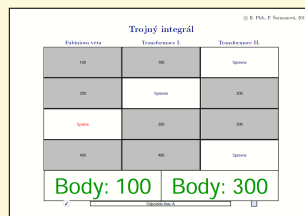
3.3. Zkus co umíš — hry Riskuj a Poznej

Hra Riskuj (varianta pro jednoho hráče):



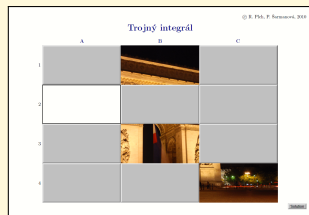
Spustit

Hra Riskuj (varianta pro dva hráče):



Spustit

Hra Poznej:



Spustit



Obsah

63. strana ze 114



Zavřít dokument


Konec


Celá obrazovka / Okno


Kapitola 4


Trojný integrál


Cílem této kapitoly je procvičení problematiky trojných integrálů, především Fubiniovy věty a řešení integrálů pomocí transformace do válcových s sférických souřadnic.


 Fubiniova věta

 Transformace do válcových souřadnic

 Transformace do sférických souřadnic – varianta I

 Transformace do sférických souřadnic – varianta II

 Zkus co umíš – hry Riskuj a Poznej – varianta I

 Zkus co umíš – hry Riskuj a Poznej – varianta II

Obsah

64. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

Trojný integrál — Fubiniova věta

1. (8b.) Necht $I = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 dz \right) dy \right) dx$. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^2 3 dy \right) dx.$$

Pomocí integrálu I spočítáme objem kváдру o stranách 1, 2, 3.

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^3 \left(\int_0^1 dx \right) dz \right) dy.$$

Objem kváдру o stranách 1, 2, 3 je roven obsahu obdélníku o stranách 2, 3.

Obsah

66. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

2. (10b.) Převedte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz$ na trojnásobný. Množina $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 5\}$ je zobrazena:

t1.u3d

$$\begin{aligned} & \int_0^5 \left(\int_0^{5-x} \left(\int_0^{5-x-y} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \\ & \int_0^5 \left(\int_0^5 \left(\int_0^5 f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ & \int_0^5 \left(\int_0^{5-x} \left(\int_0^{5-x-y} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ & \int_0^5 \left(\int_0^5 \left(\int_0^{5-x-y} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$

Obsah

67. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3. (10b.) Převedte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ na trojnásobný. Množina $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1\}$ je zobrazena:

t2.u3d

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_0^{1+x} \left(\int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ & \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \\ & \int_0^1 \left(\int_0^{1+x} \left(\int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) \, dz \right) dx \right) dy \\ & \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2+1} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

Obsah

68. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

4. (10b.) Převedte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz$ na trojnásobný. Množina $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, 2x + y \leq 4, z \leq 4 - x^2\}$ je zobrazena:

t3.u3d

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{4-x^2} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \\ & \int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} \left(\int_0^{4-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ & \int_0^4 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{4-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ & \int_0^2 \left(\int_0^4 \left(\int_0^{4-x^2} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \end{aligned}$$

Obsah

69. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

5. (10b.) Převedte trojný integrál $\iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz$ na trojnásobný. Množina $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y \leq 1, z \leq xy\}$ je zobrazena:

t4.u3d

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{xy} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ & \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^{xy} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx \\ & \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{xy} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \\ & \int_0^{xy} \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^1 f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz \end{aligned}$$

Obsah

70. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

6. (10b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem zobrazeného tělesa
 $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y \leq 4 - 2x, z \leq 6 - x^2\}.$

np6.u3d

$$\int_0^4 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{6-x^2} dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} \left(\int_0^{6-x^2} dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^4 \left(\int_0^{2x} \left(\int_0^{6-x^2} dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\int_0^4 \left(\int_0^{6-x^2} dz \right) dy \right) dx$$

Obsah

71. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

7. (10b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem zobrazeného tělesa
 $\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$

np7.u3d

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1+x} \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dx \right) dy$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1+x} \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} dz \right) dy \right) dx$$

Obsah

72. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (10b.) Určete integrál pomocí něhož spočítáme objem zobrazeného tělesa

$$\Omega = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

np8.u3d

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dx \right) dy \right) dz$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 dz \right) dy \right) dx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (1 - x - y) dy \right) dx$$



Obsah

73. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

9. (8b.) Uvažujme rotační válec o poloměru podstavy r a výšce h . Nechť V značí objem tohoto válce. Rozhodněte, která z následujících tvrzení jsou pravdivá.

$$V = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \left(\int_0^h dz \right) dy \right) dx.$$

$$V = \int_{-r}^r \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} h dy \right) dx.$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi \int_0^h r^2 dx$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah

74. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

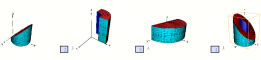
4.2. Transformace do válcových souřadnic

Párovací hra:

Nepřesní způsob čtení: — chybí — — — — —

Radikálně, kromě z adekvátních interpretací spíše výrazu výrazu souřadnic na číselníku.

Otázky



Odpovědi:

<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$	<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$
<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$	<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$
<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$	<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$
<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$	<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$

Interakce:

Všimněte si, že vzhledem k tomu, že r a θ jsou v z nezávislé, musí z být odpovídající souřadnici. Ze těchto čtyř možností odpovídá správně jen jedna.

Uplatnit pravidlo


© 2018 V. Štěpánek, 2018

Spustit

Test:

Test: Transformace do válcových souřadnic

1. (10b.) Jaké integrály vznikají transformací $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$ do válcových souřadnic, je-li $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2, x \geq 0\}$. Množina V je zobrazena na obrázku.



Odpovědi:

<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$	<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$
<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$	<input type="checkbox"/> $\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta \, dz$

Interakce:

Spustit odpovědi:

Získat body:

Převést na text:

Uplatnit pravidlo

© 2018 V. Štěpánek, 2018

Spustit



Obsah

75. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Trojný integrál – transformace do válcových souřadnic

1. (2b.) Vztah mezi kartézskými a válcovými souřadnicemi při použití r , t , z je dán rovnicemi:

$$x = r \sin t, y = r \cos t, z = t$$

$$x = r \cos t, y = r \sin t, z = t$$

$$x = r \cos t, y = r \sin t, z = z$$

$$x = r \sin t, y = r \cos t, z = z$$

2. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do válcových souřadnic při použití r , t , z je:

$$r^2$$

$$r$$

$$r \sin t$$

$$r \cos t$$

Obsah

76. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A 1 \, dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2, x \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tv2.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \left(\int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^2 \left(\int_{-2}^2 \left(\int_0^{\pi} r \, dt \right) dz \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) dt$$



Obsah

77. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

4. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3 - y\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

test5.u3d

$$\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{3-y} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_0^{3-r \sin t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{3-y} r^2 \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{3-r \sin t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

78. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2, x \leq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tv7.u3d

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(\int_1^2 \left(\int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{r \cos t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

79. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

6. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3, x \leq 0, y \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

test8.u3d

$$\int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 \left(\int_0^3 r \, dz \right) dr \right) dt$$
$$\int_0^4 \left(\int_0^3 \left(\int_0^\pi r \, dt \right) dz \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \left(\int_1^4 r \, dz \right) dr \right) dt$$
$$\int_{\pi/2}^\pi \left(\int_1^2 \left(\int_0^3 r \, dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

80. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

7. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq y, 0 \leq z \leq y\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tv1.u3d

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \left(\int_0^y r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^\pi \left(\int_0^3 \left(\int_0^{r \cos t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^\pi \left(\int_0^3 \left(\int_0^{r \sin t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^3 \left(\int_0^y \left(\int_{-\pi}^\pi r \, dt \right) dz \right) dr$$

Obsah

81. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

8. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 4, y - 2 \leq z \leq 2 - y\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tv3.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 \left(\int_{-2}^2 r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^2 \left(\int_{2-r}^{2+r} \left(\int_0^{2\pi} r \, dt \right) dz \right) dr$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_{r \cos t}^{r \sin t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_{r \sin t - 2}^{2 - r \sin t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

82. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, y - 3 \leq z \leq 3 - y, x \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tv4.u3d

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_{r \sin t - 3}^{3 - r \sin t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_{y-3}^{3-y} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \left(\int_{3-r \sin t}^{3-r \cos t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{y-3}^{3-y} r^2 \, dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

83. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

10. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y - 3 \leq z \leq 3 - y, x \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tv6.u3d

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^3 \left(\int_{y-3}^{3-y} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^3 \left(\int_{r \sin t - 3}^{3-r \sin t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_1^3 \left(\int_{y-3}^{3-y} r^2 \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_1^9 \left(\int_{3-r \sin t}^{3-r \cos t} r \, dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

84. strana ze 114

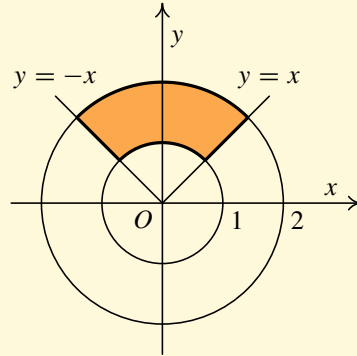


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

11. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 4, y \geq |x|\}$. Průmět množiny A do roviny xy je zobrazen na obrázku.



$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_0^2 r \, dr \right) dt \right) dz$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \left(\int_0^4 r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_1^2 \left(\int_0^4 r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r \, dr \right) dt \right) dz$$

Obsah

85. strana ze 114

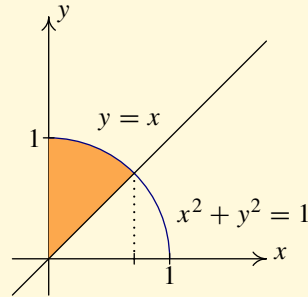


Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

12. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1, 1 \leq z \leq 3, y \geq x, x \geq 0\}$. Průmět množiny A do roviny xy je zobrazen na obrázku.



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^3 \left(\int_0^1 r dr \right) dz \right) dt$$

$$\int_1^3 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_0^1 r dr \right) dt \right) dz$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^3 r dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^3 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r dr \right) dt \right) dz$$

Obsah

86. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

13. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 - y \leq 0, x^2 + y^2 \geq z \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

test10.u3d

$$\int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_0^{r^2} r \, dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{x^2+y^2} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \, dr \right) dt \right) dz$$

$$\int_0^r \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\sin t}^{\cos t} r \, dr \right) dt \right) dz$$

$$\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin t} \left(\int_0^{r^2} r \, dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

87. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

14. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 4z, z \leq 4\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

np14.u3d

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_{\frac{r^2}{16}}^4 r dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^4 r dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_{\frac{r^2}{4}}^4 r dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^4 r dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

88. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

15. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A 3z^2 dx dy dz$ do válcových souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - (x^2 + y^2)\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

np15.u3d

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \left(\int_0^{2-r} 3rz^2 dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2}^{2-r^2} 3rz^2 dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^\pi \left(\int_0^1 \left(\int_0^4 3rz^2 dz \right) dr \right) dt$$

$$\int_0^\pi \left(\int_0^2 \left(\int_0^4 3z^2 r dz \right) dr \right) dt$$

Obsah

89. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:



Obsah

90. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno


4.3. Transformace do sférických souřadnic — varianta I

Párovací hra:

Musíš se trochu učit, abys poznal, že — — — — — vs

Hledáš, které z následujících integrálů spojit s danou oblastí na obrázku.

Obrázky



Odpovědi

<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$
<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$
<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$
<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_1^2 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$

Interakce

Všech otázk provázají klikací prvky, které se v ní nachází. Po kliknutí odpovídá automaticky nastavení odpovědi. Ze každého kliknutí odpovídá kliknutí tlačítka.

Krása videa: Mladý a starší


© D. Pátek, V. Štěpánek, 2018

Spustit

Test:

Test: Integrál - transformace do sférických souřadnic

1. (3b) Jaký integrál vyjadřuje transformaci $\iiint_V f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$ do sférických souřadnic, je-li $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, -2 \leq z \leq 2, x \geq 0\}$. Množina V je zobrazena na obrázku.



Odpovědi

<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$
<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$

Interakce

Spustit odpovědnostní otázku:

Zobrazit řešení:

Provozovat testování:

Ukončit:

Spustit

Spustit

Obsah

91. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Trojný integrál — transformace do sférických souřadnic

1. (2b.) Vztah mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi je při použití r , φ a ϑ dán rovnicemi:

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$$

$$x = r \sin \varphi \sin \vartheta, y = r \cos \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$$

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \sin \varphi$$

$$x = r \sin \varphi \sin \vartheta, y = r \cos \varphi \sin \vartheta, z = r \sin \varphi$$

2. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do sférických souřadnic při použití r , φ a ϑ je:

$$r^2 \sin \vartheta^2 \qquad r \cos \vartheta^2$$

$$r \sin \vartheta \qquad r^2 \sin \vartheta$$

Obsah

92. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

3. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li

$$A = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, R > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

np3.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$



Obsah

93. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

4. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf3.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^4 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin \vartheta \, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Obsah

94. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf1.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Obsah

95. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

6. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0, x \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf2.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Obsah

96. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

7. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 - z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\cos \vartheta}^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Obsah

97. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li:

$$A = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, x \geq 0\}.$$

Množina A je zobrazena na obrázku na další straně.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\cos \vartheta} r^2 dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \end{aligned}$$

Obsah

98. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



tsf4.u3d

Obsah

99. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li

$$A = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2, R > 0\}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2R \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R \cos \vartheta} r^2 dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2R \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah

100. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno


4.4. Transformace do sférických souřadnic — varianta II

Párovací hra:

Musíš se mnoho učít, abys poznal, že ... vs

Hledáček, který v následujících interakcích spojuje různé výrazy s odpovídajícími oblastmi.

Oblasti:



Odpovědi:

<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$
<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$
<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$
<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

Introdukc:

V této hře je cílem spojit výrazy s oblastmi, které jim odpovídají. Proti v ní najdeš mnoho různých oblastí. Je třeba je správně spojit s oblastmi, které jim odpovídají.

Autorka: Miroslav Dvořák


© 2015, Petr Dvořák

Spustit

Test:

Test: Transformace do sférických souřadnic

1. (10b.) Jaký je výsledek transformace $\iiint_V f(\rho, \theta, \phi) \, d\rho \, d\theta \, d\phi$ do sférických souřadnic, jestliže $V = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : \rho^2 \leq 4, -2 \leq \theta \leq 2, \pi \leq \phi \leq 2\pi\}$. Množina V je zobrazena na obrázku.



Odpovědi:

<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$
<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$	<input type="checkbox"/> $\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta \, d\phi$

Introdukc:

V této hře je cílem spojit výrazy s oblastmi, které jim odpovídají. Proti v ní najdeš mnoho různých oblastí. Je třeba je správně spojit s oblastmi, které jim odpovídají.

Autorka: Miroslav Dvořák

© 2015, Petr Dvořák

Spustit

Obsah

101. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Trojný integrál — transformace do sférických souřadnic

1. (2b.) Vztah mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi je při použití r , φ a ϑ dán rovnicemi:

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta, y = r \sin \varphi \cos \vartheta, z = r \sin \vartheta$$

$$x = r \sin \varphi \sin \vartheta, y = r \cos \varphi \sin \vartheta, z = r \cos \vartheta$$

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta, y = r \sin \varphi \sin \vartheta, z = r \sin \varphi$$

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta, y = r \cos \varphi \sin \vartheta, z = r \sin \varphi$$

2. (2b.) Absolutní hodnota jakobiánu transformace do sférických souřadnic při použití r , φ a ϑ je:

$$r^2 \sin \vartheta^2 \qquad r \cos \vartheta^2$$

$$r \sin \vartheta \qquad r^2 \cos \vartheta$$

Obsah

102. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

3. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li

$$A = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, R > 0, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$



Obsah

103. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \sin \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

4. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf3.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^4 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Obsah

104. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

5. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf1.u3d

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_1^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Obsah

105. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

6. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2 + y^2, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0, x \geq 0\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

tsf2.u3d

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Obsah

106. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

7. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li $A = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 - z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z\}$. Množina A je zobrazena na obrázku.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\cos \vartheta}^{2 \cos \vartheta} r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Obsah

107. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

8. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li:

$$A = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 4, x \geq 0\}.$$

Množina A je zobrazena na obrázku na další straně.

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{4 \sin \vartheta} r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\cos \vartheta} r^2 dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2 \cos \vartheta} r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \end{aligned}$$

Obsah

108. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno



tsf4.u3d

Obsah

109 strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

9. (10b.) Jaký integrál vznikne transformací integrálu $\iiint_A dx dy dz$ do sférických souřadnic, je-li

$$A = \{[x, y, z] : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2, R > 0\}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2R \sin \vartheta} r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{R \sin \vartheta} r^2 dr \right) d\varphi \right) d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2R \sin \vartheta} r^2 \cos \vartheta dr \right) d\varphi \right) d\vartheta$$

Správně zodpovězené otázky:

Získané body:

Procento úspěšnosti:

Obsah

110 strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

4.5. Zkus co umíš — hry Riskuj a Poznej — varianta I

Hra Riskuj (varianta pro jednoho hráče): Hra Riskuj (varianta pro dva hráče):

Trojný integrál

© R. Pálek, P. Šestákovi, 2019

Polohová síla	Transformace I	Transformace II
100	Spusťte	300
Spusťte	200	200
300	300	300
400	400	Spusťte

Body: 300

Spustit

Trojný integrál

© R. Pálek, P. Šestákovi, 2019

Polohová síla	Transformace I	Transformace II
100	300	Spusťte
200	Spusťte	200
Spusťte	300	300
400	400	Spusťte

Body: 100 Body: 300

Spustit

Hra Poznej:

Trojný integrál

© R. Pálek, P. Šestákovi, 2019

A	B	C
1		
2		
3		
4		

Spustit



Obsah

111. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno

Literatura

- [1] GRAHN, Alexander. CTAN [online]. 2009 [cit. 2010-01-10]. *The movie15 package*. Dostupné z WWW: <<http://www.ctan.org/tex-archive/help/Catalogue/entries/movie15.html>>.
- [2] JALOVÁ, Nela. *Testy z Integrálního počtu funkcí více proměnných*. Brno, 2008. 39 s. Bakalářská práce. MU Brno. Dostupné z WWW: <<http://www.math.muni.cz/~plch/diplomky/jalova.pdf>>.
- [3] HOŠKOVÁ, Šárka; KUBEN, Jaromír; RAČKOVÁ, Pavlína. *Integrální počet funkcí více proměnných*. 1. vydání. Brno: Vojenská akademie v Brně, 2005. 140 s. Skriptum. ISBN 80-7231-031-3.
- [4] MAŘÍK, Robert. CTAN [online]. 2004 [cit. 2010-03-17]. *The jeopardy package*. Dostupné z WWW: <<http://www.ctan.org/tex-archive/help/Catalogue/entries/jeopardy.html>>.
- [5] PAVLAS, Jan. *Interaktivní hry a testy pro výuku předmětu Matematická analýza I*. Ostrava, 2010. 43 s. Bakalářská práce. FEI VŠB-TUO.

Obsah

113. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

- [6] PLCH, Roman; ŠARMANOVÁ, Petra. *Interaktivní 3D grafika v HTML a PDF dokumentech*. Zpravodaj Československého sdružení uživatelů T_EXu, Praha, Československé sdružení uživatelů T_EXu. 2008, vol. 18, no. 1-2, s. 76-92, ISSN 1211-6661 (tištěná verze), ISSN 1213-8185 (online verze).
- [7] PLCH, Roman; ŠARMANOVÁ, Petra. *An Interactive Presentation of Maple 3D Graphics in PDF Documents*. Electronic Journal of Mathematics and Technology, Mathematics and Technology, LLC, Blacksburg, 2008, vol. 2, no. 3, s. 281-290, ISSN 1933-2823.
- [8] PLCH, Roman; ŠARMANOVÁ, Petra; SOJKA, Petr. *Integrální počet funkcí více proměnných*. /Elportál/ [online]. 2009 [cit. 2009-09-16]. Brno: Masarykova univerzita, Vyd. 16. září 2009. Dostupné z WWW: <<http://is.muni.cz/elportal/?id=845824>>. ISSN 1802-128X.
- [9] STORY, Donald. CTAN [online]. 2010 [cit. 2010-04-21]. *AcroT_EX*. Dostupné z WWW: <<http://ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/acrotex/>>.
- [10] STORY, Donald. CTAN [online]. 2006 [cit. 2010-05-12]. *Dps*. Dostupné z WWW: <<http://www.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/dps/>>.

Obsah

114. strana ze 114



Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka / Okno