Funkce komplexní proměnné a integrální transformace

Fourierovy řady I.
Autotest

Marek Lampart

Text byl vytvořen v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Nápověda

- Test zahájíte kliknutím na tlačítko "Zacatek testu".
- U každého příkladu je správná pouze jediná odpověď, správně zodpovězená otázka je hodnocena jedním bodem.
- Test ukončíme kliknutím na tlačítko "Konec testu". Ve vedlejším rámečku se zobrazí počet získaných bodů v daném testu.
- Kliknutím na tlačítko "Oprava" se provede opravení testu. Správně zodpovězené otázky budou označeny zeleně, chybné odpovědi budou vyznačeny červeně.

Zacatek testu

1. Periodická funkce je definována jako funkce $f(t)$ reálné proměnné t, pro kterou existuje $T \in \mathbb{R}$ kladné takové, že pro každé t z definičního oboru platí

- ☐ $f(T) = f(t)$
- ☐ $f(t + T) = f(t)$
- ☐ $f(t + T) = f(T)$
- ☐ $f(t \cdot T) = f(t)$

2. Z nabízených možností vyberte funkci, která není na svém definičním oboru periodická.

- ☐ $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$
- ☐ $\sin(x) \cdot \cos(x)$
- ☐ $\sin(x) + \cos(x)$
- ☐ $\sin(\exp x)$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Jednoduchý harmonický kmit je dán obecnou sinovou funkcí $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Co v tomto předpisu označuje proměnná A?

- [ ] amplitudu
- [ ] fázi kmitu
- [ ] kruhovou frekvenci
- [ ] periodu

2. Jak se nazývá konstanta ω uvedená ve výše uvedeném předpisu?

- [ ] amplituda
- [ ] fáze kmitu
- [ ] kruhová frekvence
- [ ] počáteční fáze

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Fourierova řada funkce $f(t)$ je dána vzorcem $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$. Vyberte správný vzorec pro výpočet koeficientu a_0.

☐ $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \, \mathrm{d}\, t$

☐ $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{d}\, t$

☐ $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{d}\, t$

☐ $a_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(t) \, \mathrm{d}\, t$

2. Fourierův koeficient a_n funce $f(t)$ je dán vzorcem

☐ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}\, t.$

☐ $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}\, t.$

☐ $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, \mathrm{d}\, t.$

☐ $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, \mathrm{d}\, t.$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Fourierův koeficient b_n funkce $f(t)$ je dán vzorcem

- [ ] $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$
- [ ] $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t$
- [ ] $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$
- [ ] $b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t$

2. V Dirichletově větě se hovoří o tzv. Dirichletových podmínkách. Z nabízených možností vyberte tu, která mezi Dirichletovy podmínky nepatří.

- [ ] Funkce $f(t)$ je periodická.
- [ ] Funkce $f(t)$ má na intervalu periodicity spočetně mnoho extrémů.
- [ ] Funkce $f(t)$ má v intervalu periodicity jen konečný počet nespojitostí 1. druhu.
- [ ] Funkce $f(t)$ má v intervalu periodicity po částech spojitou derivaci.

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Komplexní zápis Fourierovy řady funkce $f(t)$ má tvar

- $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}nt},\ n \in \mathbb{Z}$
- $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}nt},\ n \in \mathbb{Z}$
- $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}t},\ n \in \mathbb{Z}$
- $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}n} t,\ n \in \mathbb{Z}$

2. Komplexní Fourierovy koeficienty c_n jsou dány vzorcem

- $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}\, t,\ n \in \mathbb{Z}$
- $c_n = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}\, t,\ n \in \mathbb{Z}$
- $c_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}\, t,\ n \in \mathbb{Z}$
- $c_n = \dfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\mathrm{i}nt} \,\mathrm{d}\, t,\ n \in \mathbb{Z}$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Jednostranné amplitudové spektrum $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definováno vzorci

- [ ] $A_0 = \dfrac{a_0}{2} = c_0, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2c_n, \; n = 1, 2, \ldots .$
- [ ] $A_0 = \left|\dfrac{a_0}{2}\right| = |c_0|, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |c_n|, \; n = 1, 2, \ldots .$
- [ ] $A_0 = \left|\dfrac{a_0}{2}\right| = 2|c_0|, \quad A_n = a_n^2 + b_n^2 = |c_n|, \; n = 1, 2, \ldots .$
- [ ] $A_0 = \left|\dfrac{a_0}{3}\right| = |c_0|, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = 2c_n, \; n = 1, 2, \ldots .$

2. Jednostranné fázové spektrum $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definováno vztahem

- [ ] $\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi], \; n = 1, 2, \ldots .$
- [ ] $\varphi_n = -\arg c_n \in [-\pi, \pi], \; n = 1, 2, \ldots .$
- [ ] $\varphi_n = \arg c_n \in (-\pi, \pi], \; n = 1, 2, \ldots .$
- [ ] $\varphi_n = \arg c_n \in [-\pi, \pi], \; n = 1, 2, \ldots .$

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Dvoustranné fázové spektrum $\{\varphi_{\pm n}\}_{n=1}^{\infty}$ je definováno vztahem

- ☐ $\varphi_n = \arg c_n \in [-\pi, \pi],\ \ n = 1, 2, 3 \ldots .$
- ☐ $\varphi_n = \arg c_n \in (-\pi, \pi],\ \ n = 1, 2, 3 \ldots .$
- ☐ $\varphi_n = -\arg c_n \in [-\pi, \pi],\ \ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots .$
- ☐ $\varphi_n = -\arg c_n \in (-\pi, \pi],\ \ n = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots .$

2. Z následujích možností vyberte správné tvrzení.

- ☐ Hodnota fáze φ_0 je 0.
- ☐ Hodnota fáze φ_0 je π.
- ☐ Hodnota fáze φ_0 je $-\pi$.
- ☐ Fáze φ_0 není definována.

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Z následujích možností vyberte správné tvrzení.

- [ ] Amplitudové spektrum je sudé a fázové spektrum je liché.
- [ ] Amplitudové spektrum je sudé a fázové spektrum není liché.
- [ ] Amplitudové spektrum není sudé a fázové spektrum je liché.
- [ ] Amplitudové spektrum není sudé a fázové spektrum není liché.
- [ ] Amplitudové spektrum je liché a fázové spektrum je sudé.
- [ ] Amplitudové spektrum je liché a fázové spektrum není sudé.
- [ ] Amplitudové spektrum není liché a fázové spektrum je sudé.
- [ ] Amplitudové spektrum není liché a fázové spektrum není sudé.

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Zabývejme se harmonickou analýzou periodické funkce definované na základním intervalu periodicity

$$g(t) = \begin{cases} -3e^{-3t}, & t \in [0,2), \\ 0, & t \in [2,3). \end{cases}$$

Hodnota Fourierova koeficientu a_3 je rovna

- ☐ 0
- ☐ $1,2$
- ☐ $-1,3$
- ☐ $-0,123$

2. Hodnota Fourierova koeficientu b_2 je rovna

- ☐ 0
- ☐ $-0,314$
- ☐ $0,45$
- ☐ $-0,234$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Zabývejme se dále harmonickou analýzou periodické funkce $g(t)$ z předešlého testu. Hodnota A_4 je rovna

- ☐ 0
- ☐ $0,315$
- ☐ $-0,423$
- ☐ $0,543$

2. Hodnota φ_2 je rovna

- ☐ $-1,571$
- ☐ $1,345$
- ☐ $-0,321$
- ☐ $0,453$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Buď $f(t)$ po částech spojitá funkce na intervalu $(0, l]$. Liché periodické prodloužení funkce $f(t)$ se základním intervalem periodicity $(-l, l]$ je funkce $g(t)$ definovaná předpisem

☐ $g(t) = \begin{cases} f(t), \text{pro } t \in [0, l], \\ -f(t), \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases}$

☐ $g(t) = \begin{cases} f(t), \text{pro } t \in (0, l), \\ -f(t), \text{pro } t \in [-l, 0]. \end{cases}$

☐ $g(t) = \begin{cases} f(t), \text{pro } t \in [0, l], \\ -f(-t), \text{pro } t \in (-l, 0). \end{cases}$

☐ $g(t) = \begin{cases} f(t), \text{pro } t \in (0, l), \\ -f(-t), \text{pro } t \in [-l, 0]. \end{cases}$

Konec testu

Oprava

Zacatek testu

1. Sinova Fourierova řada funkce $f(t)$ je dána vzorcem

- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(t)$
- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$
- ☐ $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(t)$
- ☐ $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$

2. Cosinova Fourierova řada funkce $f(f)$ je dána vzorcem

- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$
- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(t)$
- ☐ $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt)$
- ☐ $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(t)$

Konec testu | Oprava

Zacatek testu

1. Nechť $f(t)$ je funkce zadaná předpisem $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 2), \\ 2, & t \in [2, 4) \end{cases}$

Určete periodu a kruhovou frekvenci této funkce.

- ☐ $T = 2, \quad \omega = \pi$
- ☐ $T = 4, \quad \omega = \dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $T = 4, \quad \omega = \dfrac{2}{\pi}$
- ☐ $T = 2, \quad \omega = \dfrac{\pi}{4}$

2. Fourierův koeficient a_0 této funkce je roven

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ π

Konec testu

Opravit

Zacatek testu

1. Nechť $f(t)$ je funkce zadaná předpisem $f(t) = t + \pi, \quad t \in [-\pi, \pi)$. Určete Fourierův koeficient a_n této funkce.

- ☐ $a_n = 0$
- ☐ $a_n = n\pi$
- ☐ $a_n = \dfrac{1}{n^2\pi}$
- ☐ $a_n = n^2\pi$

2. Určete Fourierův koeficient b_n výše zadané funkce.

- ☐ $b_n = 0$
- ☐ $b_n = \dfrac{2}{n}$
- ☐ $b_n = -\dfrac{2}{n}$
- ☐ $b_n = \dfrac{2}{n}(-1)^{n+1}$

Konec testu | | Oprava

Zacatek testu

1. Spočtěte Fourierovy koeficienty funkce $f(f) = 1 - t$ se základním intervalem periodicity $[0, 2)$.

- ☐ $a_0 = 0,\ a_n = \dfrac{2}{k^2\pi^2},\ b_n = 0$
- ☐ $a_0 = 1,\ a_n = \dfrac{2}{n\pi},\ b_n = 0$
- ☐ $a_0 = 0,\ a_n = 0,\ b_n = \dfrac{2}{n\pi}$
- ☐ $a_0 = 1,\ a_n = 2n\pi,\ b_n = \dfrac{2}{n\pi}$

2. Najděte Fourierovu řadu výše zadané funkce.

- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n\pi} \sin(n\pi t)$
- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n\pi} \cos(n\pi t)$
- ☐ $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\pi} \sin(n\pi t)$
- ☐ $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\pi} \cos(n\pi t)$

Konec testu Oprava

Zacatek testu

1. Určete sinovu Fourierovu řadu funkce definované předpisem

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ 2-t, & t \in [1,2) \end{cases}$$

- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n\pi} + \frac{2}{n^2\pi^2} \sin(n\frac{\pi}{2}) \right] \sin(n\frac{\pi}{2} t)$
- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n\pi} + \frac{4}{n^2\pi^2} \sin(n\frac{\pi}{2}) \right] \sin(n\frac{\pi}{2} t)$
- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} + \frac{2}{n\pi^2} \sin(n\frac{\pi}{2}) \right] \sin(n\pi t)$
- ☐ $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi} \sin(n\frac{\pi}{2}) \right] \sin(n\frac{2}{\pi} t)$

2. Najděte cosinovu řadu výše zadané funkce.

- ☐ $f(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \left[\cos(n\frac{\pi}{2}) - (-1)^n \right] \cos(n\frac{\pi}{2} t$
- ☐ $f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi^2} \left[\cos(n\frac{\pi}{2}) + (-1)^n \right] \cos(n\frac{\pi}{2} t$
- ☐ $f(t) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \left[\cos(n\frac{\pi}{2}) - (-1)^n \right] \cos(n\frac{\pi}{2} t)$
- ☐ $f(t) = -\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \left[\cos(n\frac{\pi}{2}) + (-1)^n \right] \cos(n\frac{\pi}{2} t$

Konec testu | | Oprava