

$$(1) \quad y' = f(t, y), \quad f: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(2) \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in \mathbb{R}^n$$

Věta (Peanova)

Nechť $f: \mathbb{R}^{1+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce definovaná na otevřené množině Ω . Nechť bod $(t_0, y_0) \in \Omega$. Pak (1), (2) má alespoň jedno maximální řešení.

Věta (Existenci a jednoznačnosti)

Nechť navíc jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_n}$

spojité na Ω . Pak Cauchyova úloha (1), (2) má právě jedno maximální řešení.

Př.

$$\begin{aligned} y_1' &= 3\sqrt[3]{y_1^2 + y_2^2}, & y_1(0) &= 0 \\ y_2' &= 0, & y_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f = (f_1, f_2)$$

$$f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(t, y_1, y_2) = 3\sqrt[3]{y_1^2 + y_2^2}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}(t, y_1, y_2) = \frac{2y_1}{\sqrt[3]{y_1^2 + y_2^2}} \text{ není}$$

spojitá v $(0, 0, 0)$.

$$\varphi(t) = (0, 0),$$

$$\psi(t) = (t^3, 0).$$