(1) $M(t,y) + N(t,y)\cdot y' = 0$

$M: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ N = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D_M = D_N = \Omega \subset \mathbb{R}^2$

(2) $y(t_0) = y_0$, $(t_0, y_0) \in \Omega$

(1) je exaktní $\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ (M,N) je potenciální $\Leftrightarrow$

$\exists V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: grad $V = (M,N)$.

<u>Věta</u> M, N spoj. diferencovatelné a (1) je exaktní, pak nutně: $\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y} = \underline{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t}$

<u>Věta</u> Nechť M, N jsou spojitě diferencovatelné funkce na jednoduše souvislé oblasti Ω. Nechť navíc $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ na Ω. Pak (1) je exaktní ODR.

<u>Poznámka</u> Nechť φ je řeš. (1),(2) na $J \subset \mathbb{R}$. Pak na J

$M(t,\varphi(t)) + N(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = 0$, $\varphi(t_0) = y_0$

$V(t,\varphi(t)) = V(t_0, y_0)$, protože

$\left(V(t,\varphi(t))\right)' = \frac{\partial V}{\partial t}(t,\varphi(t))\cdot 1 + \frac{\partial V}{\partial y}(t,\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = 0$

Věta Nechť M, N jsou spojité funkce definované na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(t_0, y_0) \in \Omega$ a (1) je exaktní ODR, přičemž $V: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je na Ω potenciálem (M, N). Pak platí:

(1) Nechť φ je libovolná dif. funkce definovaná na otevřeném intervalu J, přičemž $\varphi(t_0) = y_0$. Pak φ je řešením C. úlohy (1), (2) na J právě když

$$\forall t \in J: \quad V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0).$$

(2) Předpokládejme navíc, že $\forall (t, y) \in \Omega$:

$$N(t, y) \neq 0.$$

Pak C. úloha (1), (2) má právě jedno maximální řešení.

Poznámka

$$h(t) + g(y) \cdot y' = 0,$$

$h \in C(I)$, $g \in C(J)$

$$V(t, y) = \int h(t)\,dt + \int g(y)\,dy, \text{ na } I \times J.$$

Pozn. $\quad V(t, y) = V(t_0, y_0)$,

$$y(t_0) = y_0.$$