

$$(1) \quad M(t, y) + N(t, y) \cdot y' = 0$$

$$M: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, N: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, D_M = D_N = \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$(2) \quad y(t_0) = y_0, \quad (t_0, y_0) \in \Omega$$

(1) je exaktní $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (M, N)$ je potenciální \Leftrightarrow

$$\exists V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \text{grad } V = (M, N).$$

Věta M, N spoj. diferencovatelné a (1) je exaktní,

pak nutně:
$$\frac{\partial^2 V}{\partial t \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t}$$

Věta Nechtě M, N jsou spojitě diferencovatelné

funkce na jednoduše souvislé oblasti Ω . Nechtě

navíc $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ na Ω . Pak (1) je exaktní ODR.

Poznámka Nechtě φ je řeš. (1)/(2) na $J \subset \mathbb{R}$. Pak na J

$$M(t, \varphi(t)) + N(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0, \quad \varphi(t_0) = y_0$$

$$V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0), \quad \text{protože}$$

$$(V(t, \varphi(t)))' = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi(t)) \cdot 1 + \frac{\partial V}{\partial y}(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 0$$

Věta Nechtě M, N jsou spojité funkce definované na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $(t_0, y_0) \in \Omega$ a (1) je exaktní ODR, přičemž $V: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je na Ω potenciálem (M, N) . Pak platí:

(1) Nechtě φ je libovolná dif. funkce definovaná na otevřeném intervalu J , přičemž $\varphi(t_0) = y_0$. Pak φ je řešením C. úlohy (1), (2) na J právě když $\forall t \in J: V(t, \varphi(t)) = V(t_0, y_0)$.

(2) Předpokládejme navíc, že $\forall (t, y) \in \Omega:$

$$N(t, y) \neq 0.$$

Pak C. úloha (1), (2) má právě jedno maximální řešení.

Poznámka

$$h(t) + g(y) \cdot y' = 0,$$

$$h \in C(I), g \in C(J)$$

$$V(t, y) = \int h(t) dt + \int g(y) dy, \text{ na } I \times J.$$

Pozn.

$$V(t, y) = V(t_0, y_0),$$

$$y(t_0) = y_0.$$