Nalezení složek tenzoru napjatosti pro případ rovinné úlohy s povrchem zatíženým kontaktním tlakem dle Hertzovy teorie

Přednášející: Ing. Michal Šofer
Ing. Oldřich Vlach, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

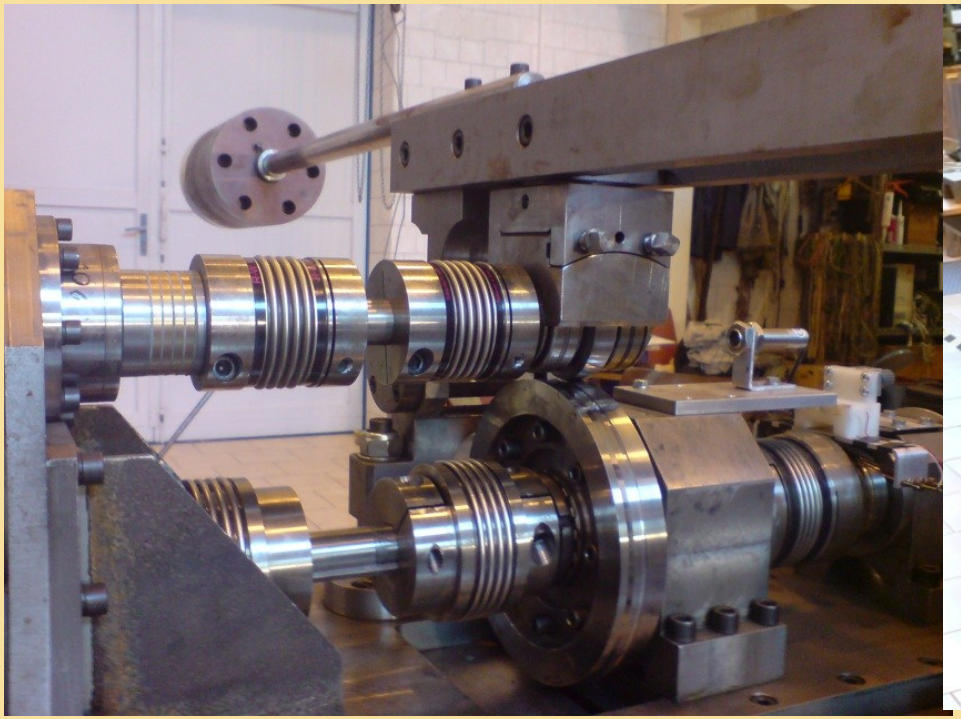
ÚVODEM

- Oblast aplikace – kontaktní únava

- Zdroj fotografií: www.google.com

ÚVODEM

- Oblast aplikace – kontaktní únava
- Bližší zaměření – predikce opotřebení u liniového kontaktu



OBSAH PŘEDNÁŠKY

1. Airyova funkce napětí pro kartézský SS
2. Airyova funkce napětí pro polární SS
3. Flamantova úloha
4. Aplikace získaných složek tenzoru napjatosti

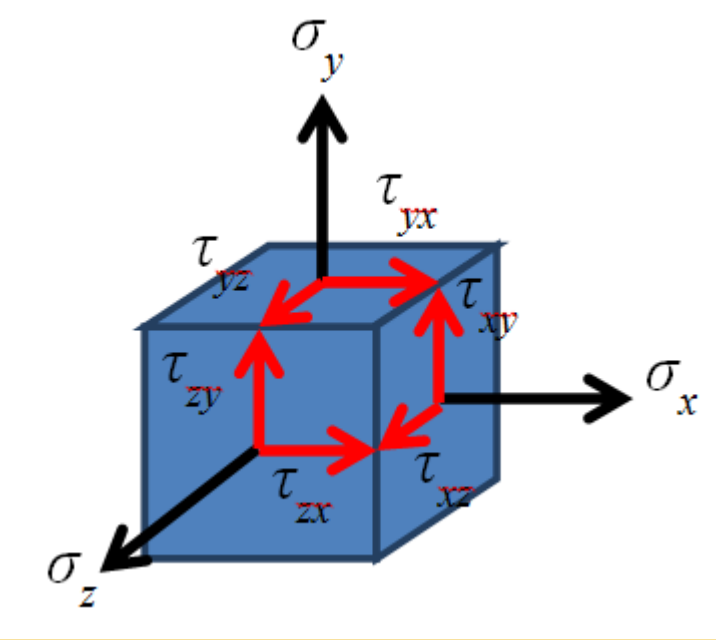
1. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

- Úprava rovnic rovnováhy pro případ rovinné napjatosti

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$



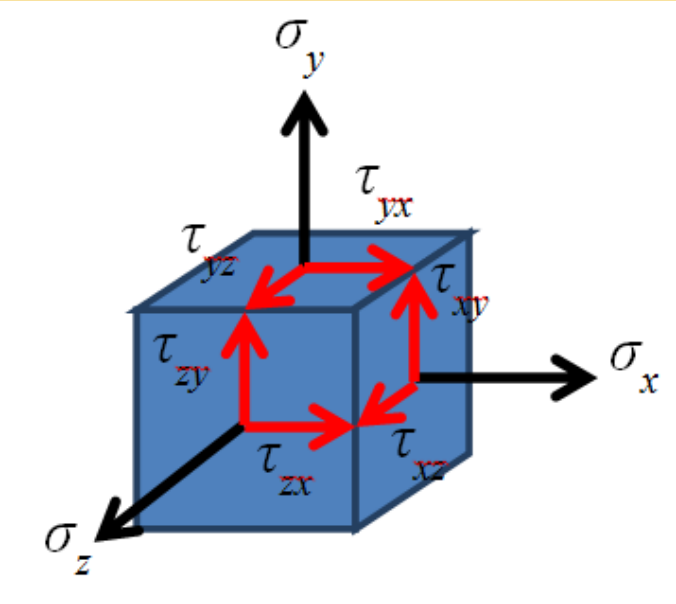
- Rovinná napjatost: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$

1. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

- Úpravou dostáváme:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

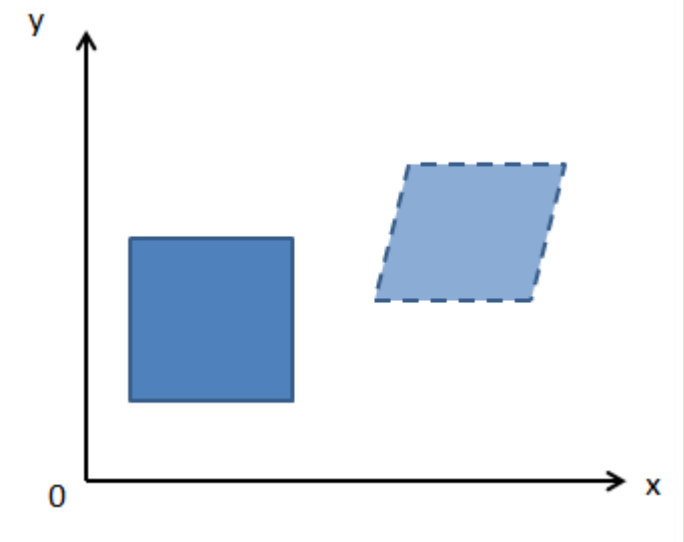
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \qquad (5)$$



- Geometricko-deformační rovnice pro případ rovinné napjatosti:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (6) \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad (7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (8)$$



1. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

- Rovnici kompatibility, zaručující spojitost posuvů, vyjádříme vztahem:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (9)$$

- Hookův zákon pro rovinnou napjatost:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y \right] \qquad (10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x \right] \qquad (11)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{xy} \qquad (12)$$

1. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

- K dispozici máme:

Rovnice

rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

geometricko-deformační

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

kompatibility

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Hookův zákon

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \mu)}{E} \cdot \tau_{xy}$$

1. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

Nyní je nutné upravit rovnici kompatibility tak, aby byla vyjádřena prostřednictvím složek tenzoru napjatosti.

- 1. krok: Dosazení Hookova zákona do rovnice kompatibility

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_x - \mu \cdot \sigma_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot \left[\sigma_y - \mu \cdot \sigma_x\right] \longrightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1+\mu)}{E} \cdot \tau_{xy}$$

$$\frac{1}{E} \cdot \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \cdot \cancel{\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \cdot \cancel{\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}}\right] = \frac{2 \cdot (1+\mu)}{E} \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (13)$$

1. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

Nyní je nutné upravit rovnici kompatibility tak, aby byla vyjádřena prostřednictvím složek tenzoru napjatosti.

- 2. krok: Derivace rovnic rovnováhy podle příslušných proměnných a jejich následné sečtení

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0 \Big/ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \Big/ \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{součet}} 2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \qquad (14)$$

1. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

Nyní je nutné upravit rovnici kompatibility tak, aby byla vyjádřena prostřednictvím složek tenzoru napjatosti.

- 3. krok: Dosazení rovnice (14) do (13):

$$\boxed{2 \cdot \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \qquad (14)$$

$$\frac{1}{E} \cdot \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right] = \frac{\boxed{2} \cdot (1+\mu)}{E} \cdot \boxed{\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}} \qquad (13)$$

<u>Lévyho podmínka</u>

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y \right) = 0 \qquad (15)$$

1. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

- Řešení elastické úlohy ve 2D pro případ rovinné napjatosti nyní spočívá:
- 1. v nalezení řešení rovnice (17) - $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0$
- 2. ve splnění podmínek rovnováhy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0$$

- 3. ve splnění okrajových podmínek

2. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO KARTÉZSKÝ SS

- Předpoklad: Podmínkám rovnic rovnováhy vyhovíme, zavedeme-li funkci napětí $\varphi = \varphi(x, y)$ takovou, aby byla svázána se složkami napětí následovně:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (16) \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad (17) \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad (18)$$

- Krom splnění rovnic rovnováhy musí takto definované složky napětí vyhovovat Lévyho podmínce, poté:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) = 0 \quad (19)$$

- Nebo-li:

$$\boxed{\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad \textbf{BIHARMONICKÁ ROVNICE}} \quad (20)$$

2. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO POLÁRNÍ SS

Odvození biharmonické rovnice pro polární SS

Ing. Oldřich Vlach Ph.D.

2. AIRYOVA FUNKCE NAPĚTÍ PRO POLÁRNÍ SS

- Biharmonická rovnice pro polární SS je v následujícím tvaru:

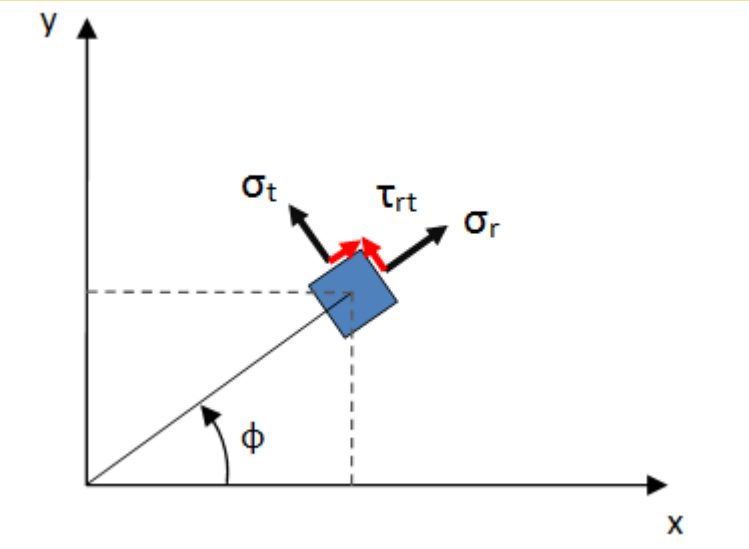
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial \phi^2}\right)=0 \qquad (21)$$

- Přičemž pro jednotlivé složky napětí platí:

$$\sigma_t=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \qquad (22)$$

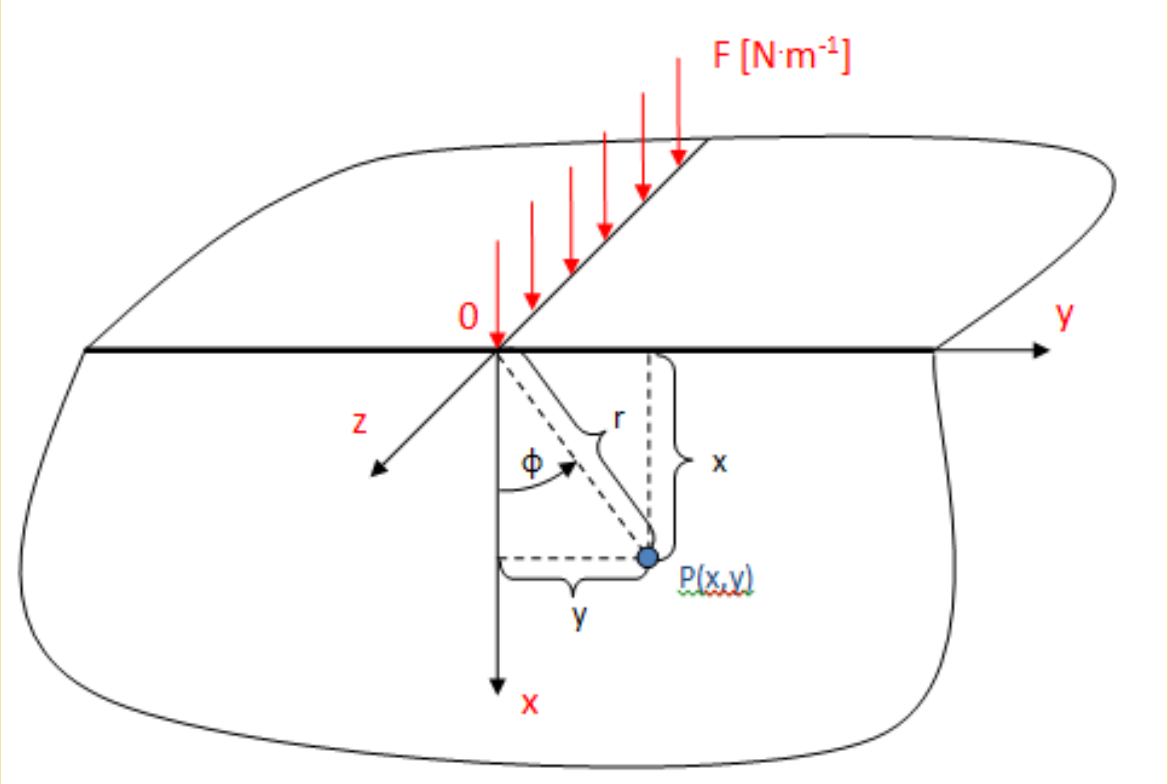
$$\sigma_r=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} \qquad (23)$$

$$\tau_{rt}=-\frac{\partial}{\partial r}\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\right) \qquad (24)$$



3. FLAMANTOVA ÚLOHA

- Předmětem řešení je nalezení složek tenzoru napjatosti pro případ působení liniové síly kolmo na hranici pružného poloprostoru



3. FLAMANTOVA ÚLOHA

- Funkce, která vyhovuje biharmonické rovnici a okrajovým podmínkám je následujícího tvaru:

$$\varphi = -\frac{F}{\pi} \cdot r \cdot \phi \cdot \sin\phi \tag{25}$$

- Dosazením funkce napětí do vztahů pro složky napětí v polárních souřadnicích dostáváme:

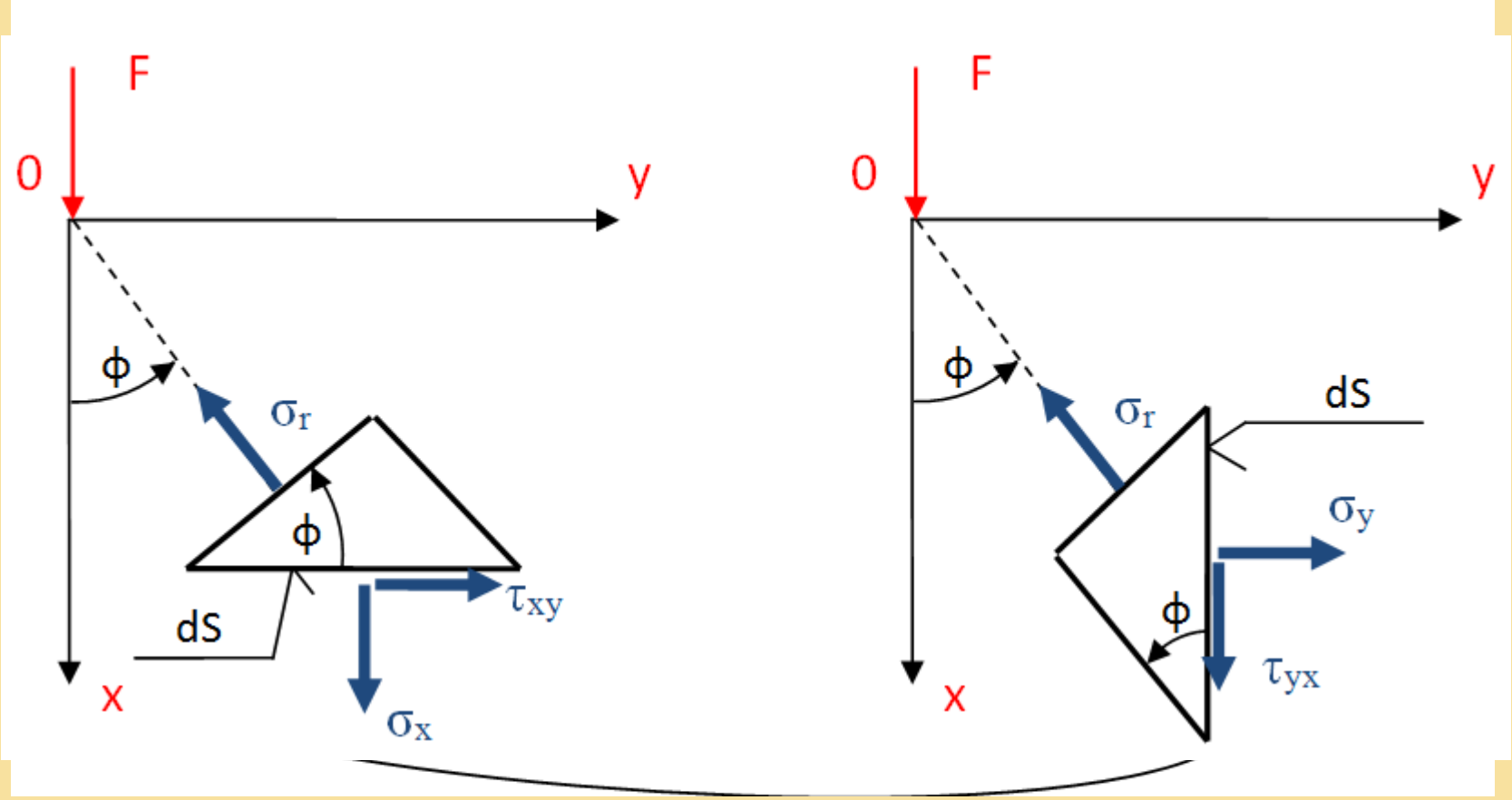
$$\sigma_t = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \quad => \quad \sigma_t = 0 \tag{26}$$

$$\varphi = -\frac{F}{\pi} \cdot r \cdot \phi \cdot \sin\phi \quad \sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad => \quad \sigma_r = -\frac{2 \cdot F}{\pi} \cdot \frac{\cos\phi}{r} \tag{27}$$

$$\tau_{rt} = -\frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) \quad => \quad \tau_{rt} = 0 \tag{28}$$

3. FLAMANTOVA ÚLOHA

- V dalším kroku je nutné vyjádřit složky napětí v kartézských souřadnicích pomocí radiálního napětí σ_r.



3. FLAMANTOVA ÚLOHA

- V dalším kroku je nutné vyjádřit složky napětí v kartézských souřadnicích pomocí radiálního napětí σ_r.

$$\sigma_x = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{x^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{29}$$

$$\sigma_y = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{x \cdot y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{30}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2F}{\pi} \cdot \frac{x^2 \cdot y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{31}$$

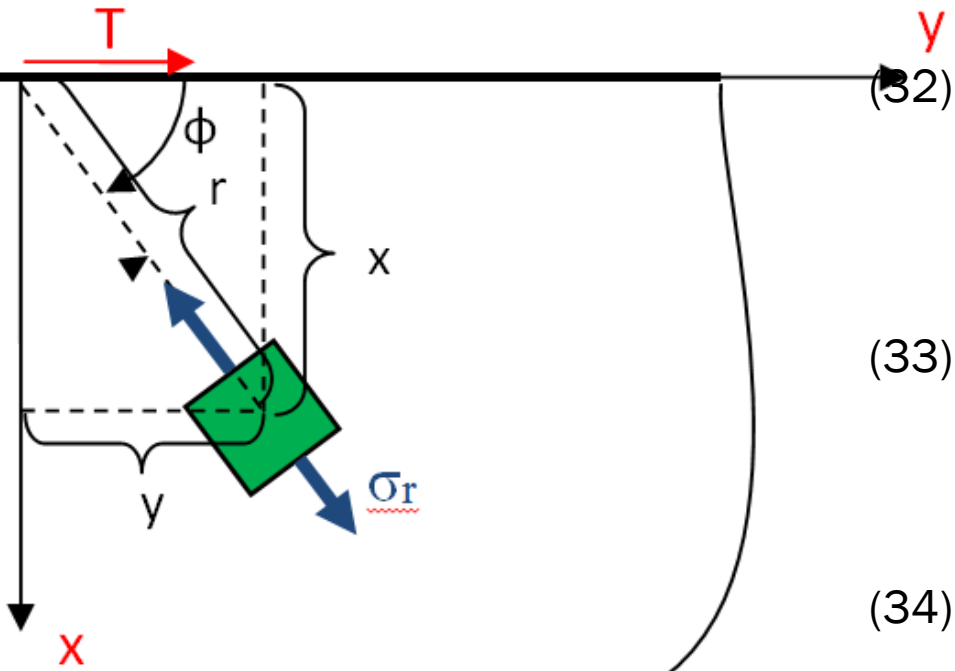
3. FLAMANTOVA ÚLOHA

- Obdobným způsobem získáme vztahy pro jednotlivé složky napětí v kartézských souřadnicích, jedná-li se o tečnou sílu.

$$\sigma_x = \frac{2T}{\pi} \frac{x^2 \cdot y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{32}$$

$$\sigma_y = -\frac{2T}{\pi} \cdot \frac{y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{33}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2T}{\pi} \cdot \frac{x \cdot y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \tag{34}$$



3. FLAMANTOVA ÚLOHA

- Vzhledem k tomu, že se jedná o úlohu z oblasti lineární pružnosti, je možné oba stavy superponovat:

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F \cdot x^3 + T \cdot x^2 \cdot y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] \tag{35}$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F \cdot x \cdot y^2 + T \cdot y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] \tag{36}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F \cdot x^2 \cdot y + T \cdot x \cdot y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right] \tag{37}$$

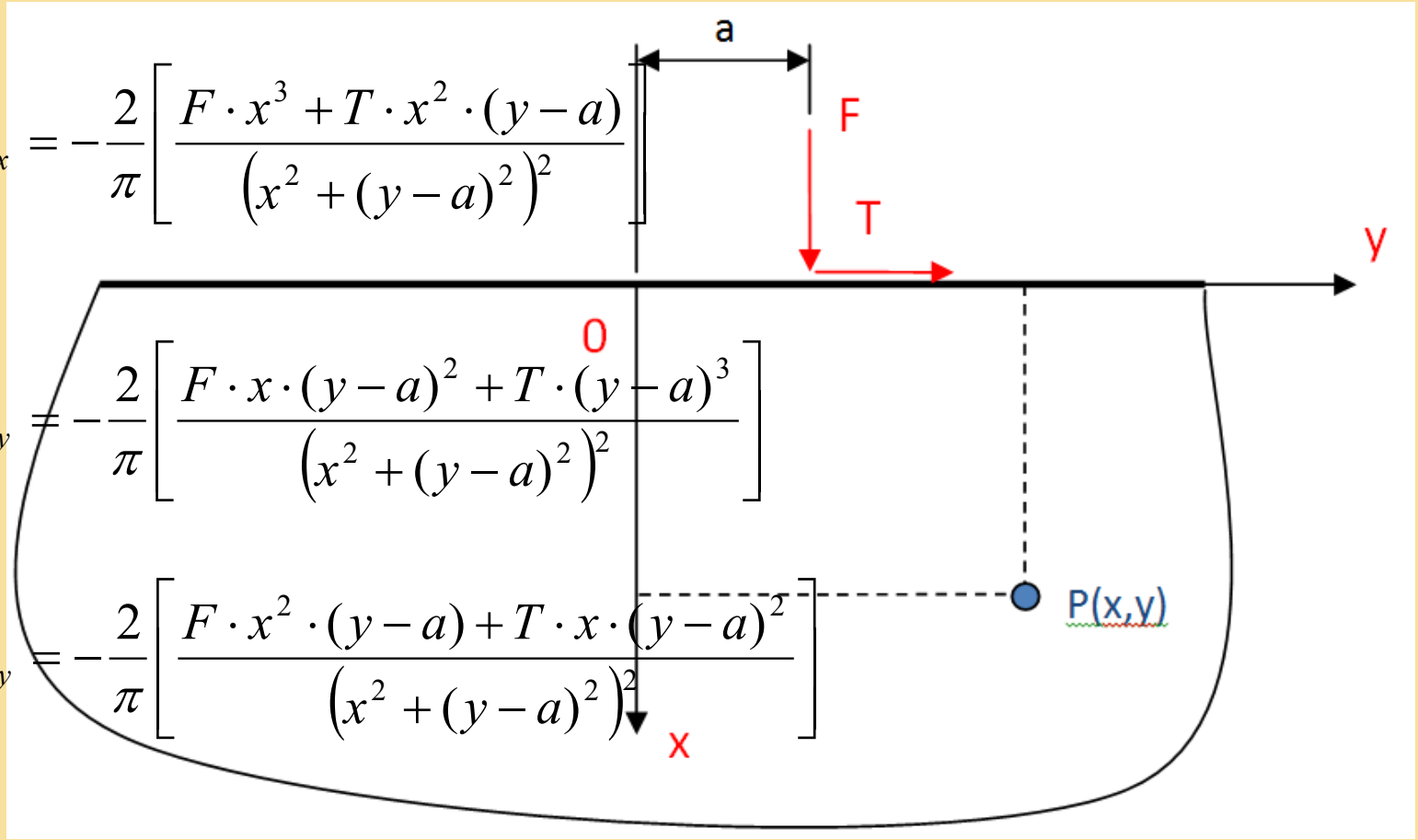
3. FLAMANTOVA ÚLOHA

- Bude-li působiště sil **F** a **T** mimo počátek souřadnic, například ve vzdálenosti **a**, je nutné upravit vztahy (35),(36),(37) následovně:

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F\cdot x^3 + T\cdot x^2\cdot(y-a)}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^2}\right] \quad (38)$$

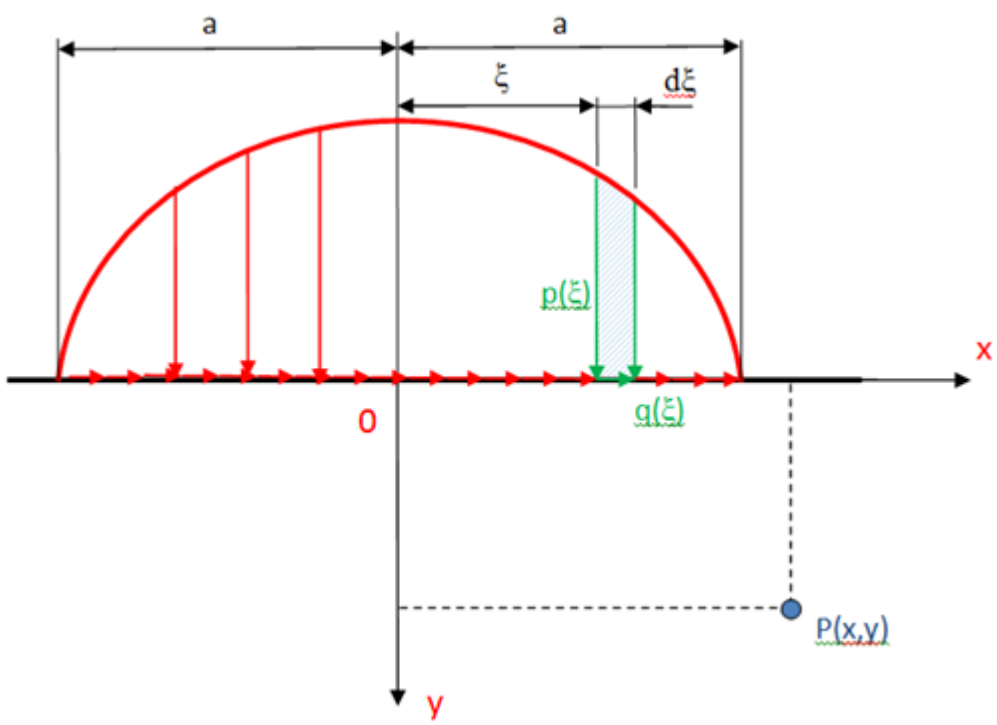
$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F\cdot x\cdot(y-a)^2 + T\cdot(y-a)^3}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^2}\right] \quad (39)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F\cdot x^2\cdot(y-a) + T\cdot x\cdot(y-a)^2}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^2}\right] \quad (40)$$



4. FLAMANTOVA ÚLOHA

- V dalším kroku zaměníme normálovou sílu **F** za Hertzovo rozložení kontaktního tlaku a sílu **T** nahradíme součinem součinitele tření a dané velikosti kontaktního tlaku.



$$p(\xi) = p_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2} \qquad (41)$$

$$q(\xi) = p(\xi) \cdot f \qquad (42)$$

3. FLAMANTOVA ÚLOHA

- Výrazy (38),(39),(40) poté přejdou na tvar:

$$\sigma_x = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F\cdot x^3 + T\cdot x^2\cdot(y-a)}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^2}\right] \rightarrow \sigma_x = -\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\cdot(x-\xi)^2\cdot y + q(\xi)\cdot(x-\xi)^3}{\left((x-\xi)^2+y^2\right)^2}d\xi \qquad (43)$$

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F\cdot x\cdot(y-a)^2 + T\cdot(y-a)^3}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^2}\right] \rightarrow \sigma_y = -\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\cdot y^3 + q(\xi)\cdot(x-\xi)\cdot y^2}{\left((x-\xi)^2+y^2\right)^2}d\xi \qquad (44)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{F\cdot x^2\cdot(y-a) + T\cdot x\cdot(y-a)^2}{\left(x^2+(y-a)^2\right)^2}\right] \rightarrow \tau_{xy} = -\frac{2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{p(\xi)\cdot(x-\xi)\cdot y^2 + q(\xi)\cdot(x-\xi)^2\cdot y}{\left((x-\xi)^2+y^2\right)^2}d\xi \qquad (45)$$

4. APLIKACE ZÍSKANÝCH SLOŽEK TENZORU NAPJATOSTI

- Pro další využití modifikovaného řešení Flamantovy úlohy bylo vytvořeno v programovacím jazyce APDL makro, které umožňuje analyzovat průběhy složek tenzoru napjatosti v požadovaných hladinách pod kontaktním povrchem

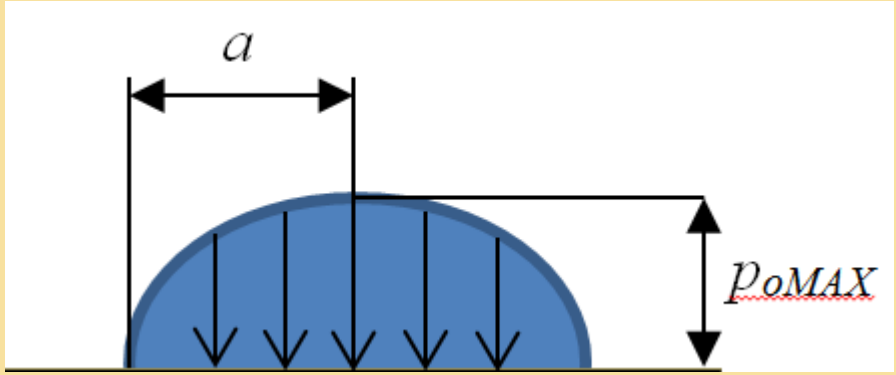
Vstupní parametry:

1. Parametry pro zatížení

Velikost kontaktní poloosy – ***a*** [mm]

Max. kontaktní tlak – $\boldsymbol{p_{oMAX}}$ [MPa]

Součinitel tření – ***f*** [-]



4. APLIKACE ZÍSKANÝCH SLOŽEK TENZORU NAPJATOSTI

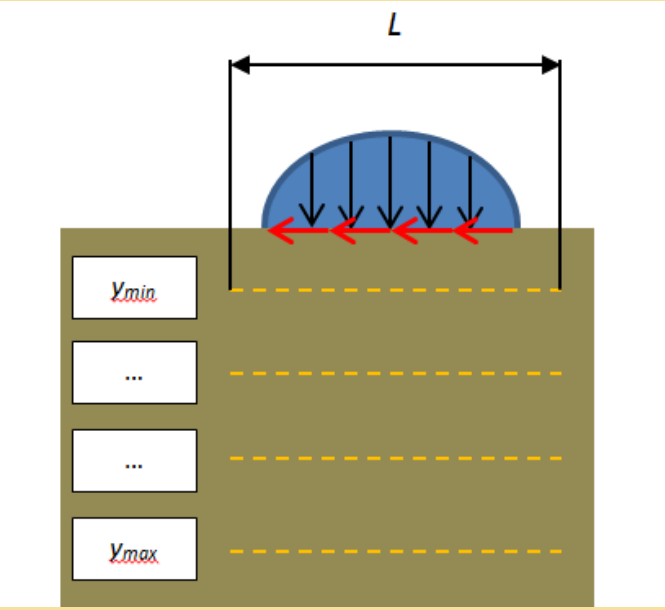
2. Parametry pro zadávání vyšetřovaných hladin

Minimální hloubka – y_{min} [mm]

Maximální hloubka –y_{max} [mm]

Šířka vyšetřované části – L [mm]

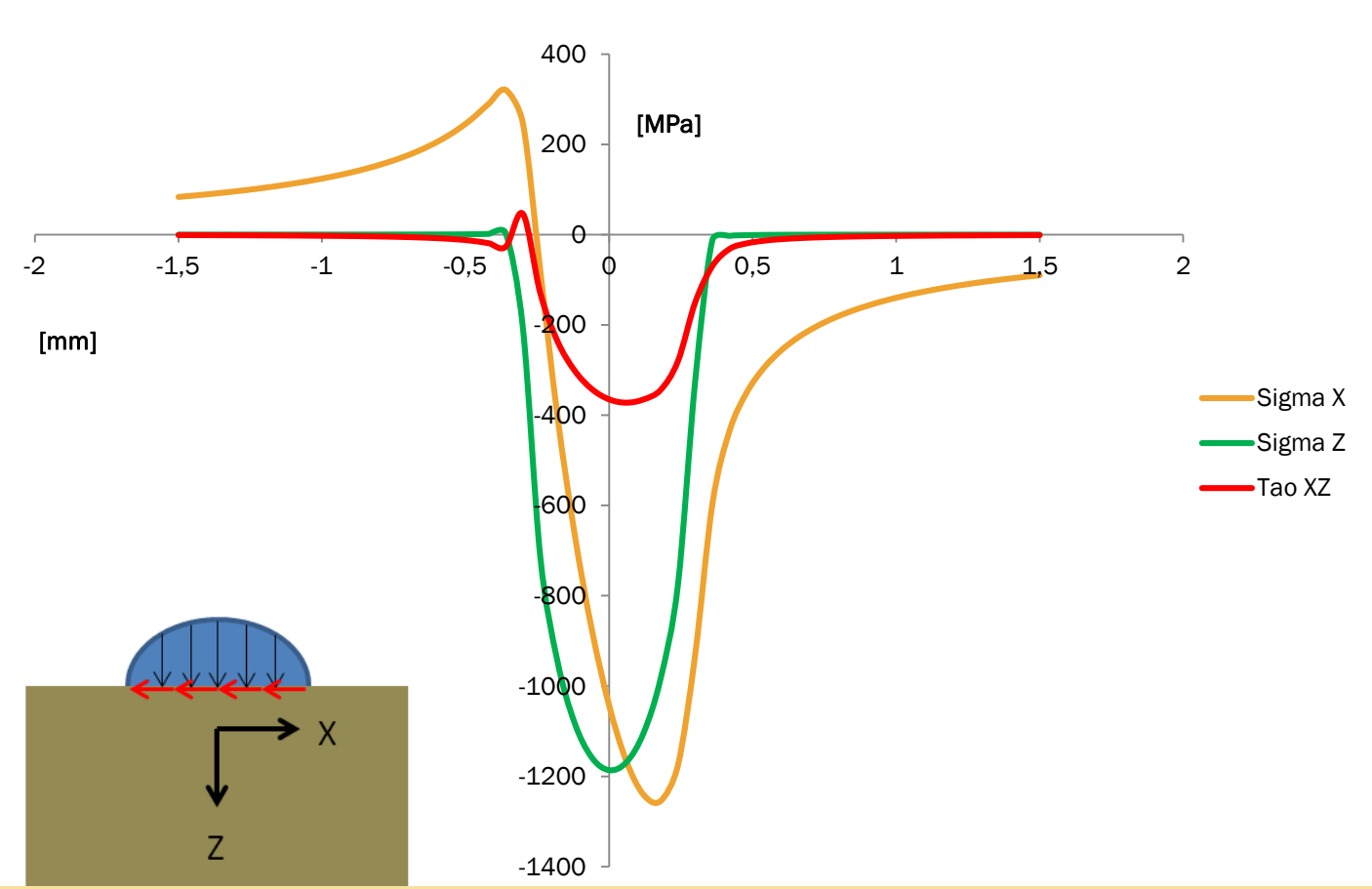
Počet vyšetřovaných hloubek v daném rozsahu – N [-]



4. APLIKACE ZÍSKANÝCH SLOŽEK TENZORU NAPJATOSTI

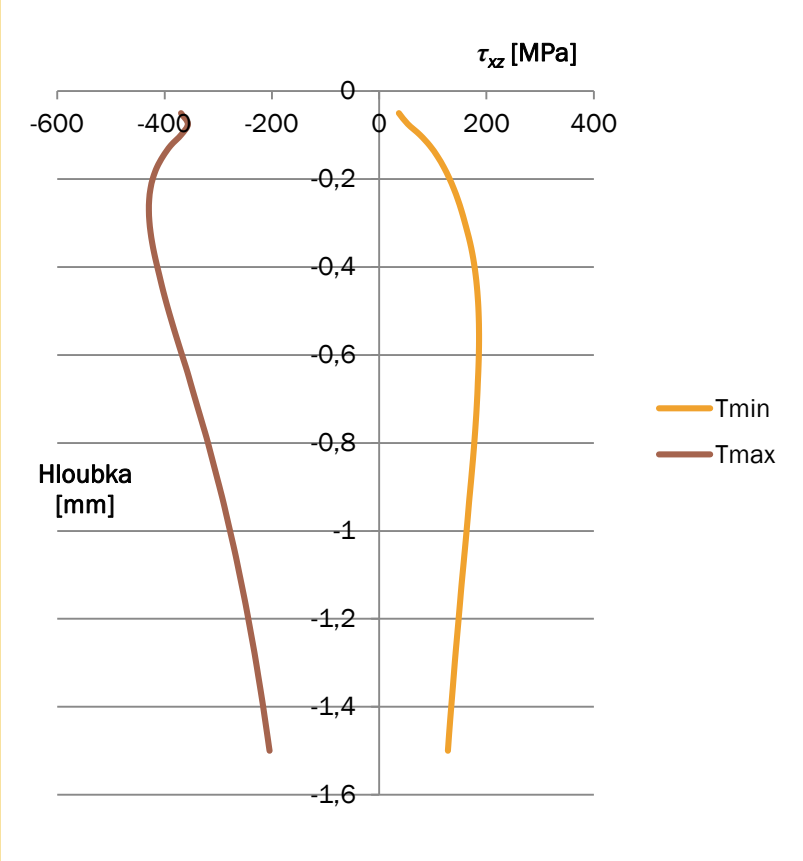
- Průběh jednotlivých složek tenzoru napjatosti pro následující parametry:

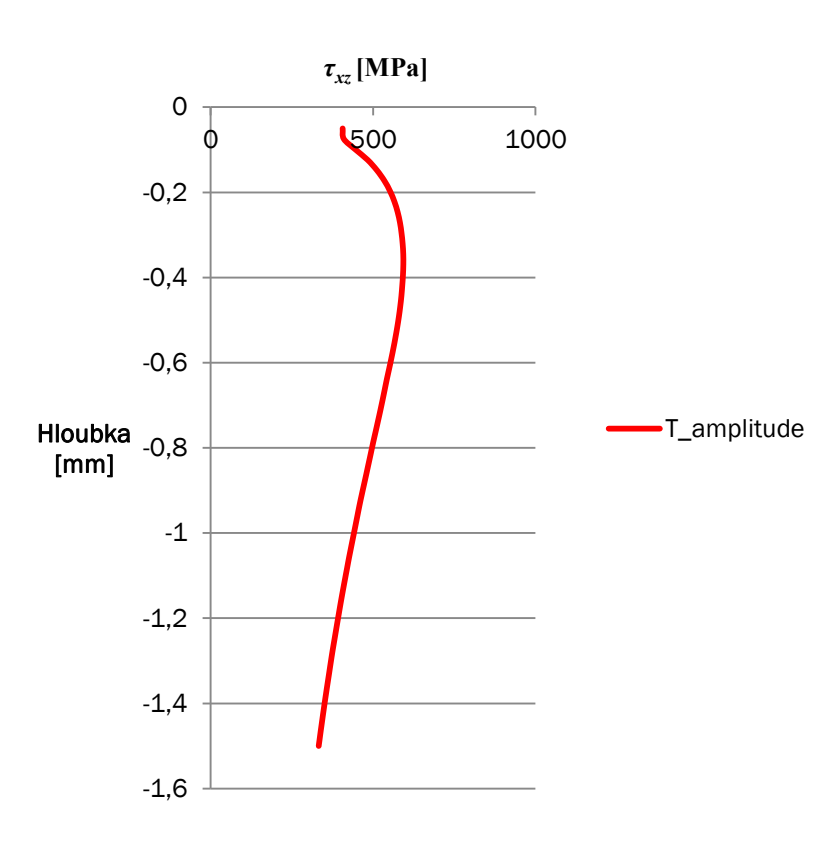
p_{oMAX}=1200 MPa, f=0.38, a= 0.71 mm, hloubka 0.15 mm



4. APLIKACE ZÍSKANÝCH SLOŽEK TENZORU NAPJATOSTI

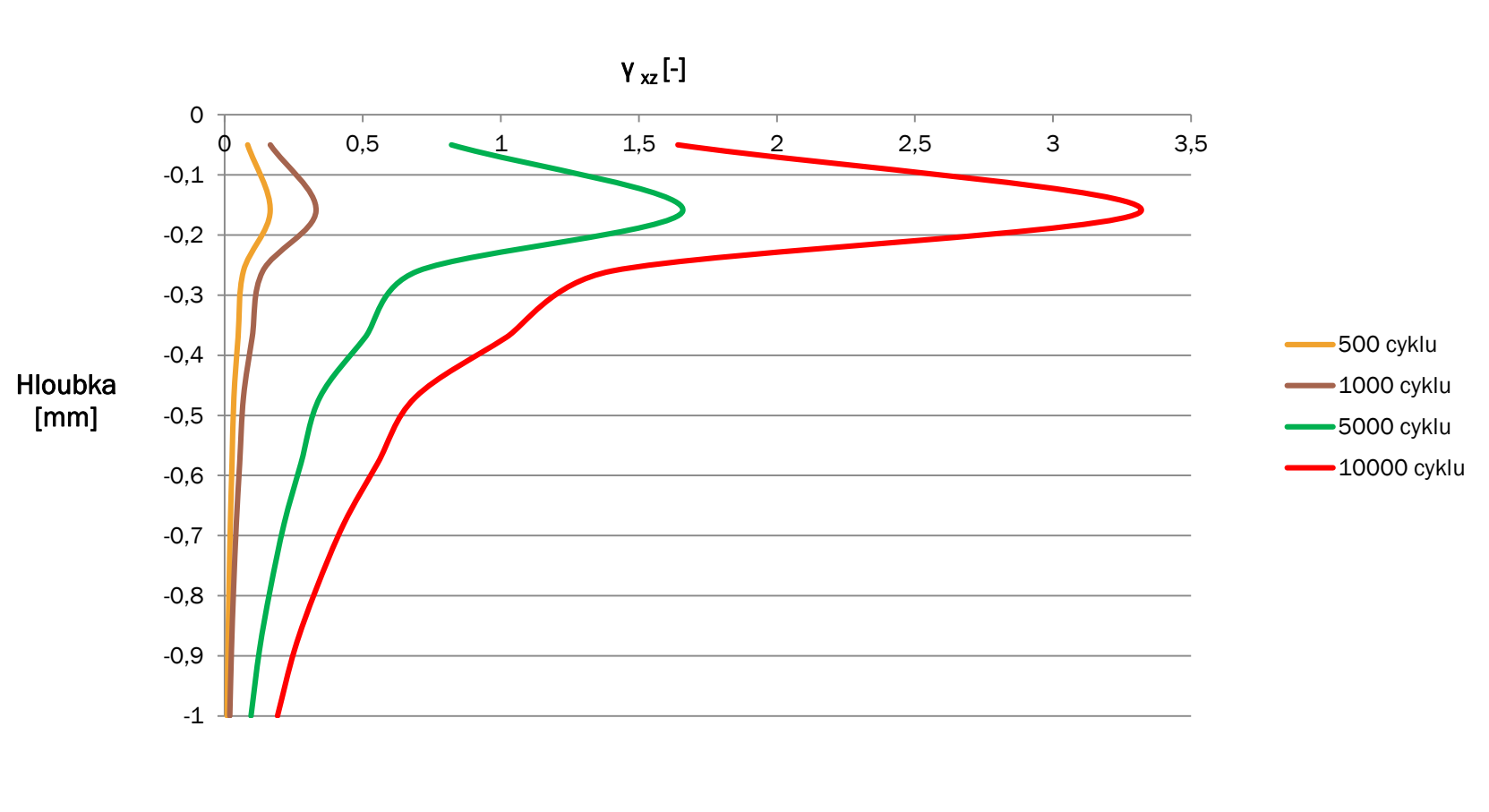
- Průběh smykového napětí τ_{xz} pro shodné zatěžovací parametry v rozmezí hloubek 0.05-1.5 mm s dělením na 60 vrstev.



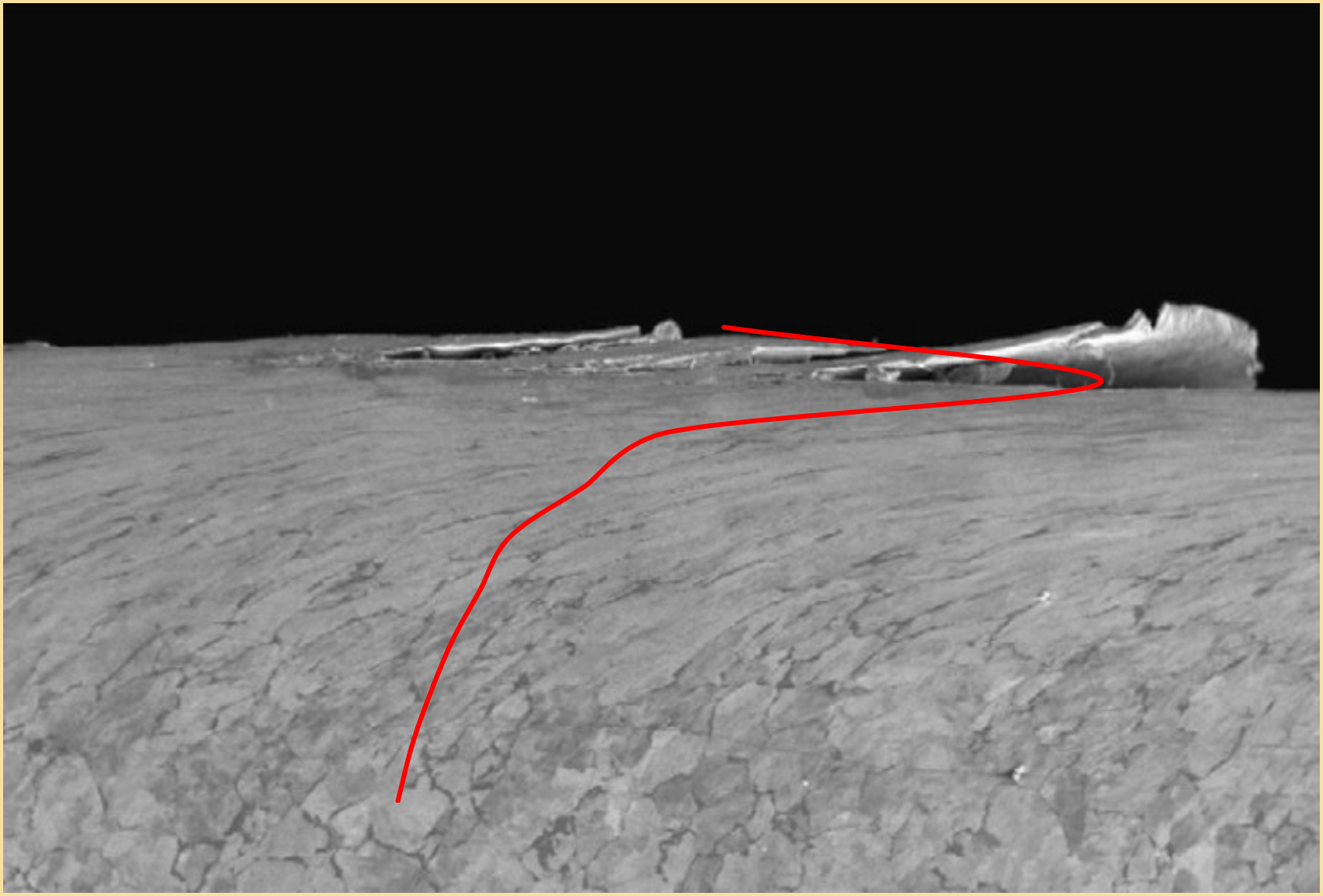


4. APLIKACE ZÍSKANÝCH SLOŽEK TENZORU NAPJATOSTI

- Získané průběhy smykového napětí jsou posléze využity pro stanovení míry plastické smykové deformace pro případ liniového kontaktu



4. APLIKACE ZÍSKANÝCH SLOŽEK TENZORU NAPJATOSTI



DĚKUJI VÁM ZA POZORNOST