O OBYČEJNÝCH LINEÁRNÍCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNICÍCH S NÁHODNÝMI VSTUPY

Bohumil Krajc

KAM FEI VŠB-TUO

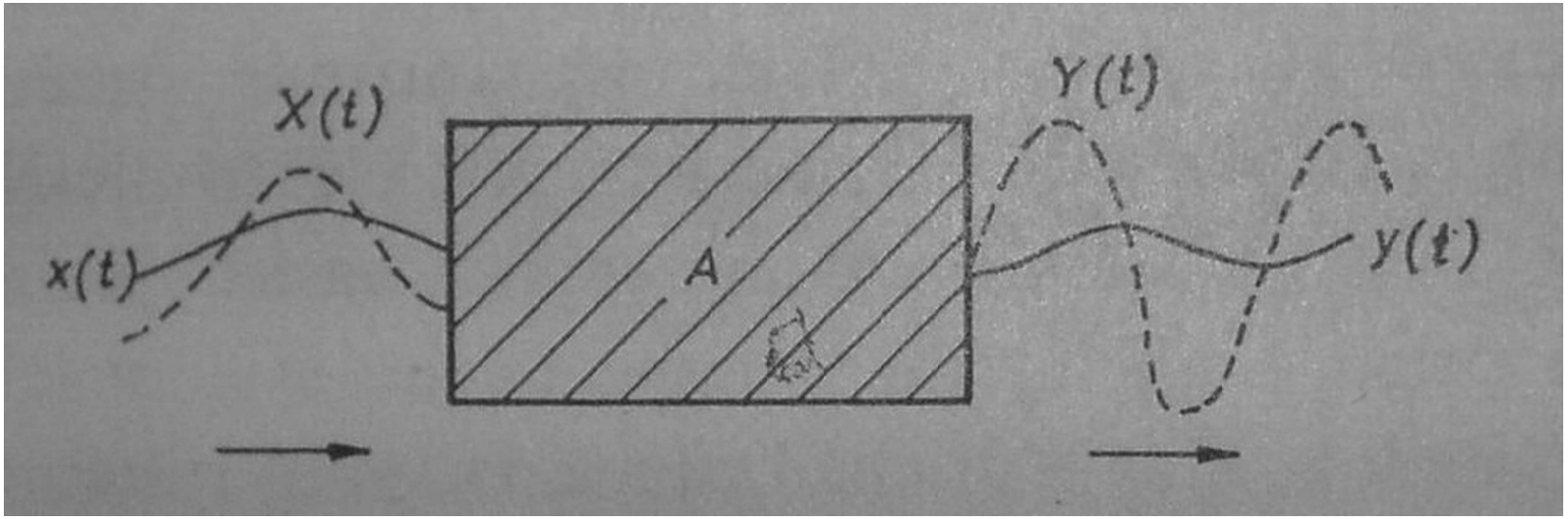
7. 6. 2012

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Osnova

- Dynamický systém
- Náhodné funkce
  - pojem náhodné funkce
  - charakteristiky náhodné funkce
- Lineární operátory dynamického systému
  - lineární transformace náhodných funkcí a jejich charakteristik
- Kanonické rozklady
  - elementární náhodné funkce
  - kanonické rozklady náhodných funkcí
  - lineární transformace kanonických rozkladů

Dynamický systém



Vstup $x(t)$, výstup $y(t)$
Popis našeho systému

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{l} b_j x^{(j)}(t)$$

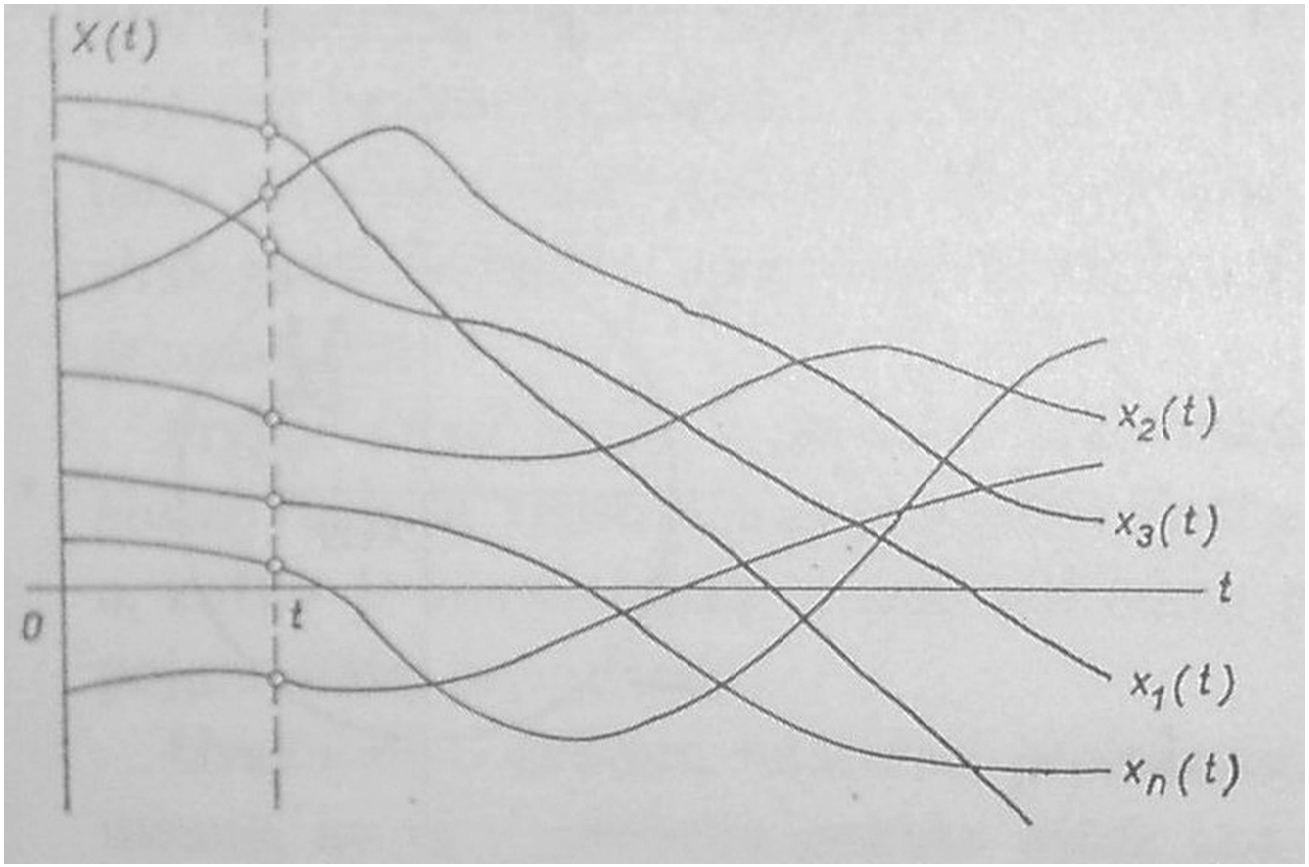
Problémy

1. Jaká je reakce systému $y(t)$ na vstup $x(t)$? Jak vypadá operátor A systému?

$$y(t) = A\{x(t)\}$$

2. Jaká budou náhodná zkreslení odezvy systému při výskytu náhodných odchylek na vstupu?
(omezíme se na střední hodnotu a autokolerační funkci odezvy)

Náhodné funkce



- realizace náhodné funkce
- řez náhodné funkce

- Popisy rozdělení náhodných funkcí
  - jednorozměrný
$$f(x, t)$$
  - dvojrozměrný
$$f(x_1, x_2; t_1, t_2)$$
  - třírozměrný
$$f(x_1, x_2, x_3; t_1, t_2, t_3)$$

Popis pomocí charakteristik

- střední hodnota

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,t)\,\mathrm{d}x \quad \left(= \sum x_i \cdot p_i(t)\right)$$

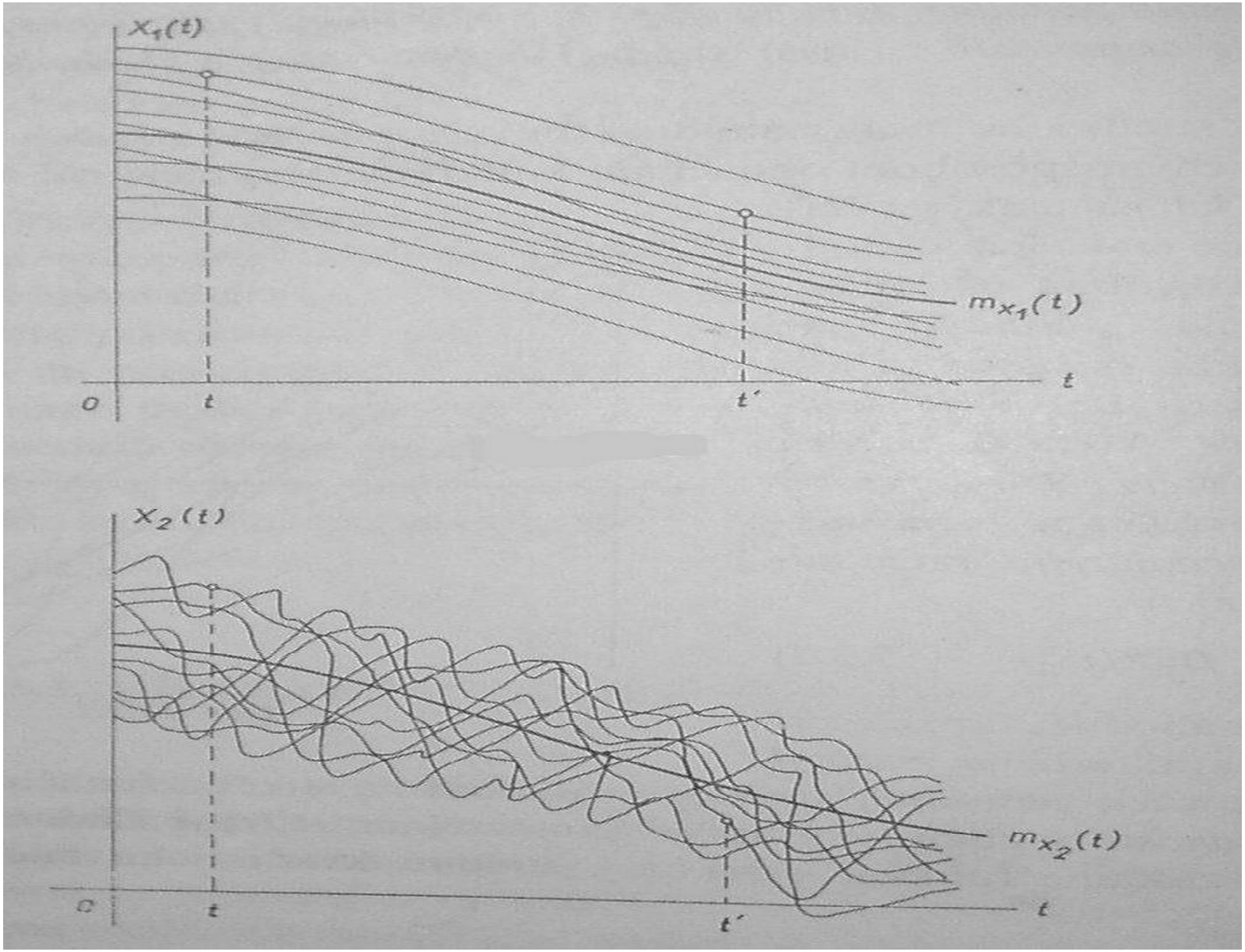
- disperze (rozptyl)

$$D_x(t) = D[X(t)] = M\left[(X(t) - m_x(t))^2\right]$$

- střední kvadratická odchylka

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$$

Stejná střední hodnota a rozptyl, ale odlišné náhodné funkce



Autokolerační funkce

$$K_x\left(t,t'\right)=M\left[\left(X\left(t\right)-m_x\left(t\right)\right)\cdot\left(X\left(t'\right)-m_x\left(t'\right)\right)\right]$$

Vlastnosti

$$K_x\left(t,t\right)=D_x\left(t\right)$$

$$K_x\left(t,t'\right)=K_x\left(t',t\right)$$

Normovaná korelační funkce

$$r_x\left(t,t'\right)=\frac{K_x\left(t,t'\right)}{\sigma_x\left(t\right)\cdot\sigma_x\left(t'\right)}$$

$$r_x\left(t,t\right)=1$$

Elementární operace

- přičtení deterministické funkce

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t)$$

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t)$$

$$K_y(t, t') = K_x(t, t')$$

- přenásobení nenáhodnou funkcí

$$Y(t) = \varphi(t) \cdot X(t)$$

$$m_y(t) = \varphi(t) \cdot m_x(t)$$

$$K_y(t, t') = \varphi(t) \cdot \varphi(t') \cdot K_x(t, t')$$

Centrované funkce

$$X^{\circ} = X(t) - m_x(t)$$

$$m_{x^{\circ}}(t) = 0, \qquad K_{x^{\circ}}(t, t') = K_x(t, t')$$

Normované funkce

$$X_N(t) = \frac{X^{\circ}(t)}{\sigma_x(t)}$$

$$K_{X_n}(t, t') = r_x(t, t')$$

Lineární transformace náhodných funkcí

Obecné pravidlo
Nechť

$$Y(t) = L\{X(t)\} \ ,$$

kde L je homogenní lineární operátor. Pak

$$m_y(t) = L\{m_x(t)\}$$

$$K_y(t, t') = L^{(t)} \circ L^{(t')} \left\{K_x(t, t')\right\}$$

Integrál

Integrál náhodné funkce ($\lim_{\Delta\tau\to 0}\sum_i X(\tau_i)\cdot\Delta\tau$)

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$K_y(t,t') = \int_0^t\int_0^{t'} K_x(\tau,\tau')\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\tau'$$

Derivace

Derivace náhodné funkce $\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}\right)$

$$Y(t) = \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$m_y(t) = \frac{\mathrm{d}m_x(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$K_y(t, t') = \frac{\partial^2 K_x(t, t')}{\partial t \partial t'}$$

Vzájemná korelační funkce

$$R_{xy}\left(t,t'\right)=M\left[X^{\circ}\left(t\right)\cdot Y^{\circ}\left(t'\right)\right]$$

Nekorelované náhodné funkce

$$\forall\left(t,t'\right):\quad R_{xy}\left(t,t'\right)=0$$

Sčítání náhodných funkcí

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} X_i(t)$$

$$m_x(t) = \sum_{i=1}^{n} m_{x_i}(t)$$

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{n} K_{x_i}(t, t') + \sum_{i \neq j} R_{x_i x_j}(t, t')$$

Pro nekorelované sčítance platí

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{n} K_{x_i}(t, t')$$

Sčítání náhodné funkce a náhodné proměnné

Nechť náhodná funkce $X(t)$ a náhodná proměnná Y jsou nekorelovatelné, tj. pro každé t platí

$$M\left[X^{\circ}(t) \cdot Y\right] = 0\,.$$

Pak platí

$$Z(t) = X(t) + Y$$

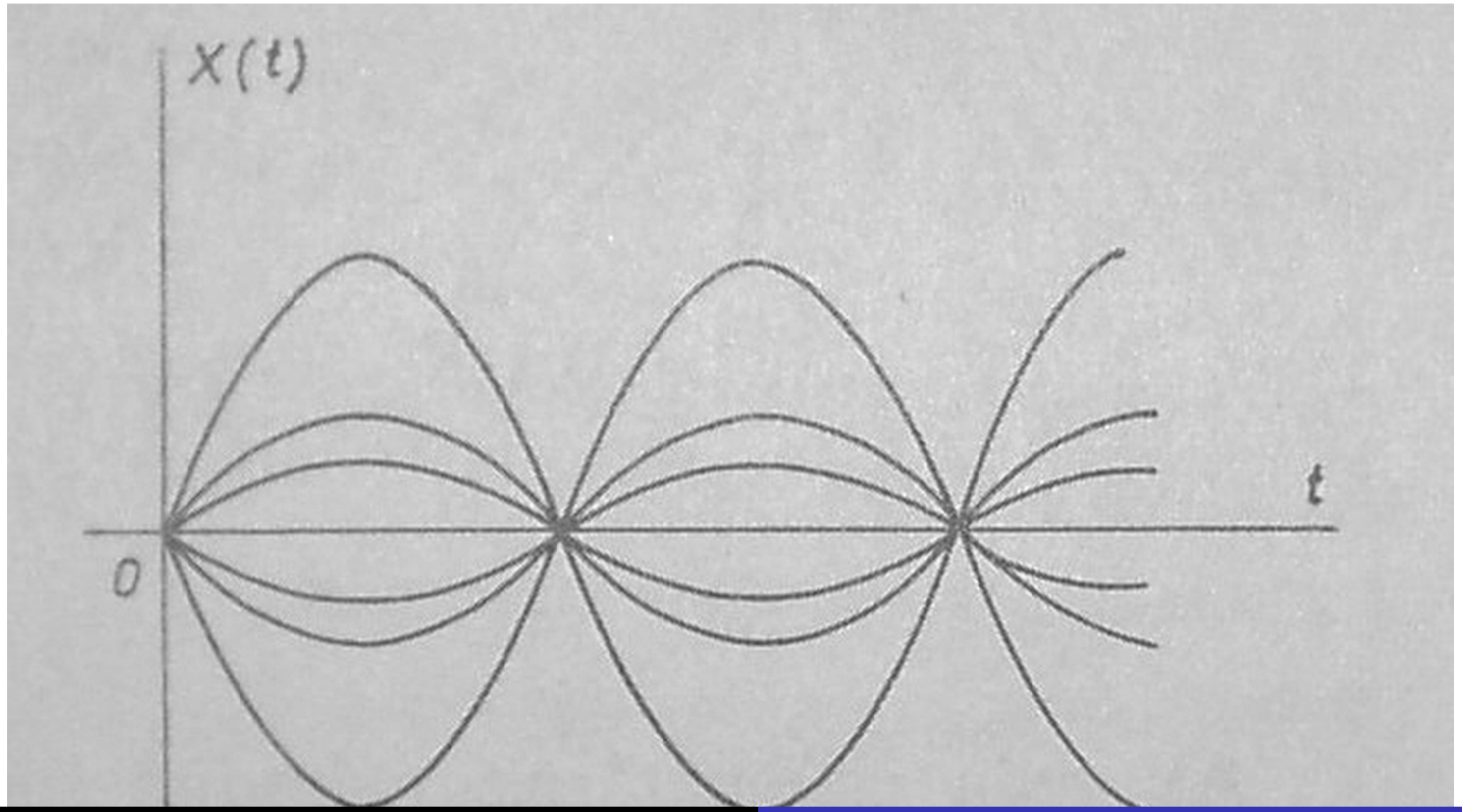
$$m_z(t) = m_x(t) + m_y$$

$$K_z\left(t, t'\right) = K_x\left(t, t'\right) + D_y$$

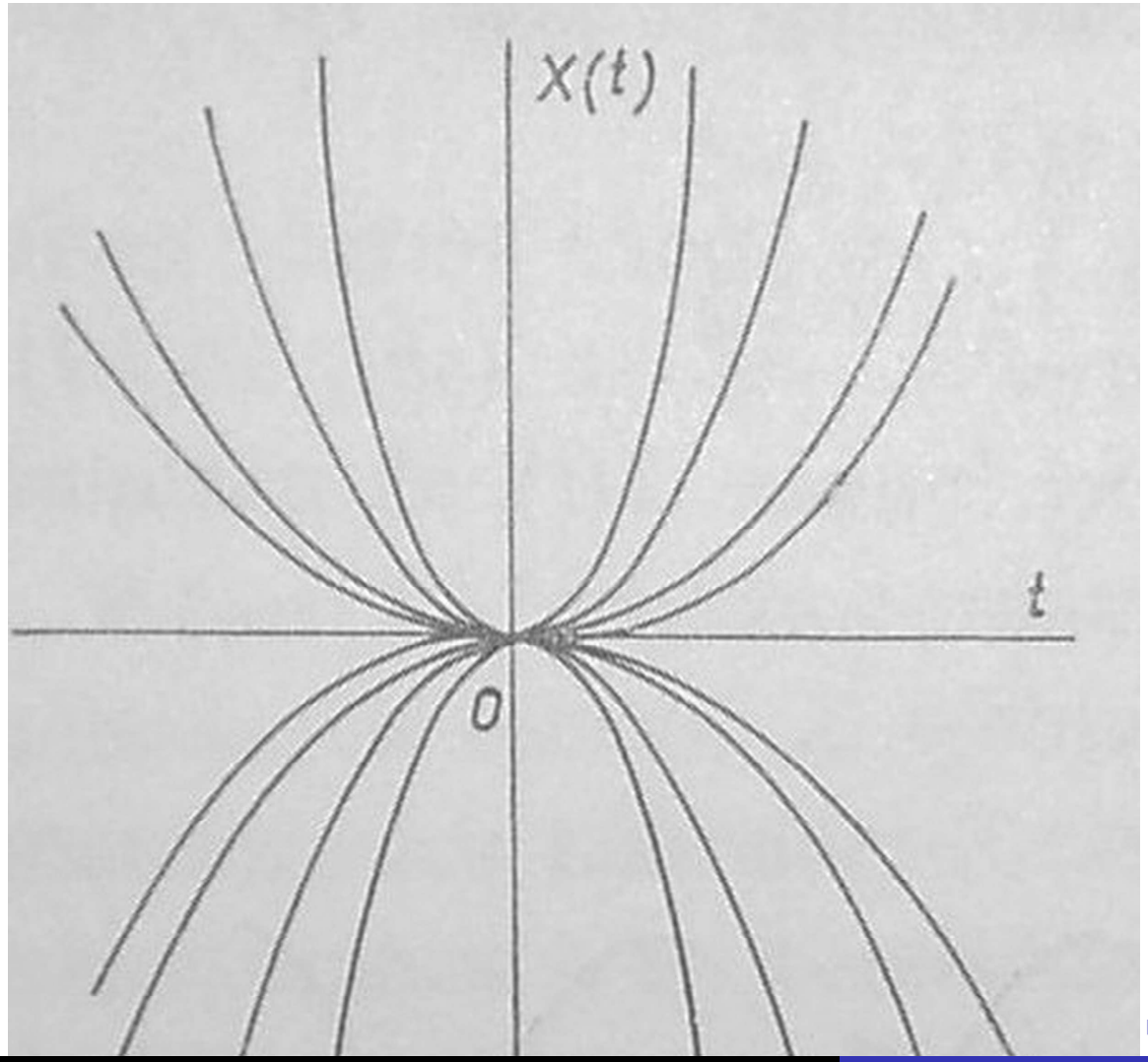
Elementární náhodná funkce

$X(t) = V \cdot \varphi(t)$ kde V je náhodná proměnná a $\varphi(t)$ je deterministická funkce

$$X(t) = V \sin t$$



$$X(t) = V \cdot t^2$$



Charakteristiky elementární funkce

$$X(t) = V \cdot \varphi(t)$$

$$m_x(t) = m_v \cdot \varphi(t)$$

$$K_x(t, t') = \varphi(t) \cdot \varphi(t') \cdot D$$

Lineární transformace

$$L\{X(t)\} = V \cdot L\{\varphi(t)\}$$

Příklady

$$X'(t) = V \cdot \varphi'(t), \qquad \int_0^t X(\tau)\,\mathrm{d}\tau = V \cdot \int_0^t \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Rozklad na elementární funkce

Rozklad vstupu na elementární funkce

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot \varphi_i(t)$$

Rozklad odezvy na elementární funkce

$$Y(t) = L\{X(t)\} = L\{m_x(t)\} + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot L\{\varphi_i(t)\}$$

Kanonický rozklad

Nechť

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot \varphi_i(t) \,, \qquad (*)$$

kde $V_1, \ldots, V_m$ jsou centrované náhodné proměnné s korelační maticí (K_{ij}). Pak

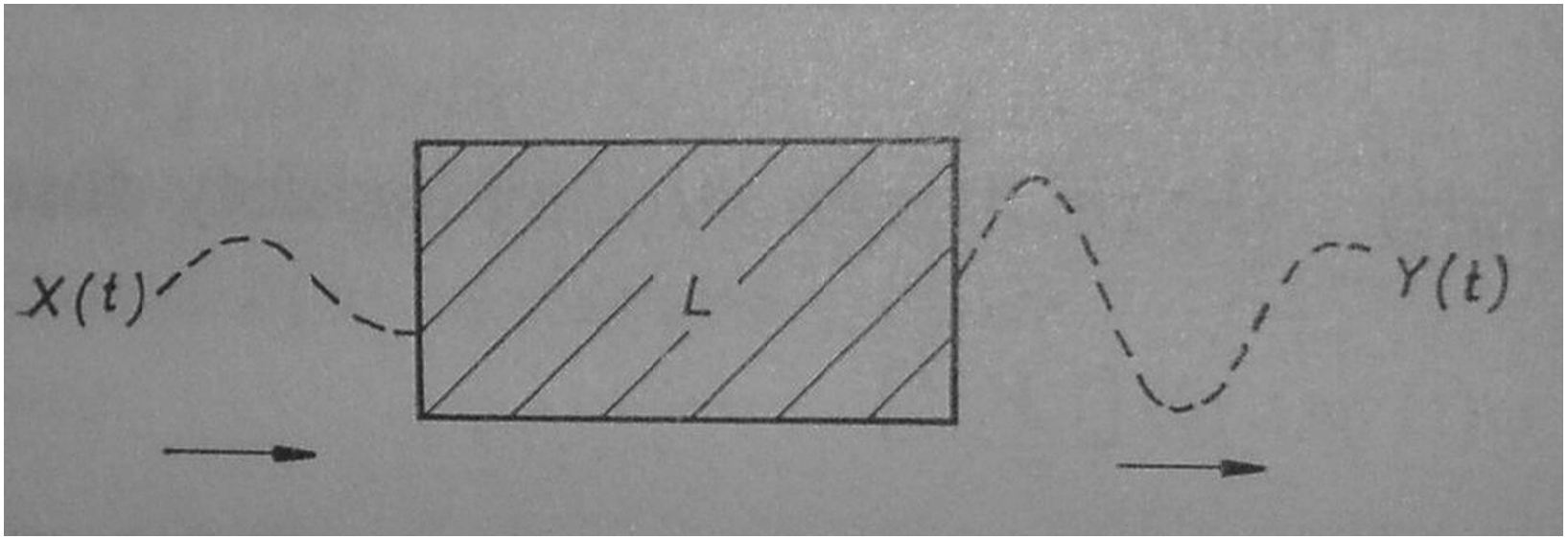
$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t) \cdot \varphi_i(t') \cdot D_i + \sum_{i \neq j} \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t') \cdot K_{ij} \,.$$

Jsou-li navíc $V_1, \ldots, V_m$ navzájem nezávislé náhodné proměnné, je

$$K_x(t, t') = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(t) \cdot \varphi_i(t') \cdot D_i \,,$$

$$D_x(t) = \sum_{i=1}^{r} [\varphi_i(t)]^2 \cdot D_i$$

a $(*)$ nazýváme kanonickým rozkladem funkce $X(t)$.


X(t)
L
Y(t)

Odezva kanonického rozkladu

Nechť

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot \varphi_i(t)$$

je kanonický rozklad $X(t)$,

$$Y(t) = L\{X(t)\}$$

je odezva systému. Pak

$$Y(t) = L\{X(t)\} = L(m_x(t)) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot L\{\varphi_i(t)\},$$

takže po označení $\psi_i(t) = L\{\varphi_i(t)\}$ je

$$m_y(t) = L\{m_x(t)\}$$

a lze psát kanonický rozklad náhodné funkce $Y(t)$:

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot \psi_i(t)$$

Charakteristiky odezvy

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot \psi_i(t) \ ,$$

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^{r} \psi_i(t) \cdot \psi_i(t') \cdot D_i \ ,$$

$$D_y(t) = \sum_{i=1}^{r} [\psi_i(t)]^2 D_i$$

Pro naši rovnici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{l} b_j x^{(j)}(t)$$

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot \varphi_i(t)$$

$$Y(t) = m_y(t) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot \psi_i(t)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i m_y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{l} b_j m_x^{(j)}(t)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \psi_k{}^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{l} b_j \varphi_k{}^{(j)}(t)\ , \quad k \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

Počáteční podmínky

Případ deterministických podmínek

$$Y^{(j)}(0) = y_j, \qquad j \in (0, 1, \ldots, n-1)$$

$$Y^{(j)}(0) = m_y^{(j)}(0) + \sum_{i=1}^{r} V_i \cdot \psi_i^{(j)}(0) = y_j\,,$$

přičemž

$$0 = D_y(0) = \sum_{i=1}^{r} D_i \cdot \left[\psi_i^{(j)}(0)\right]^2\,,$$

takže (využijeme $D_i > 0$)

$$\psi_i^{(j)}(0) = 0\,, \qquad i \in \{1, 2, \ldots, r\}$$

Rovnici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i m_y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{l} b_j m_x^{(j)}(t)$$

tedy integrujeme s počátečními podmínkami

$$m_y^{(i)}(0) = y_i, \qquad i \in \{0, 1, \ldots, n-1\} \ ,$$

zatímco pro $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ rovnici

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \psi_k{}^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{l} b_j \varphi_k{}^{(j)}(t)$$

integrujeme při nulových počátečních podmínkách

$$\psi_k^{(j)}(0) = 0, \qquad i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

Příklad

Uvažujme úlohu

$$y'' - y = -2x(t)$$

Nechť V_1, V_2 jsou nezávislé jevy s hustotami
$f_1(x) = \frac{x}{2}, \quad x \in \langle 0, 2\rangle$, $f_2(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in \langle -1, 1\rangle$. Pak

$$m_1 = \frac{4}{3}, \quad D_1 = \frac{2}{9}, \qquad m_2 = 0, \quad D_2 = \frac{1}{3},$$

takže centrované náhodné jevy $V_1^\circ = V_1 - \frac{4}{3}, \quad V_2^\circ = V_2$ mají nulové střední hodnoty a stejné rozptyly.
Funkce $\psi_1(t) = \sin t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}$ zřejmě řeší úlohu (volíme $\varphi_1(t) = \sin t$)

$$y'' - y = -2\sin t, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Podobně je funkce $\psi_2(t) = 2 - \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}$ řešením úlohy (volíme $\varphi_2(t) = 1$)

$$y'' - y = -2, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

Náhodný vstup $X(t)$ v kanonickém tvaru
$X(t) = V_1^\circ \cdot \sin t + V_2^\circ \cdot 1$, kde $m_x(t) = 0$,

$$K_x(t, t') = (\sin t) \cdot (\sin t') \cdot \frac{2}{9} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$$

se v našem modelu transformuje na náhodný výstup $Y(t)$
v kanonickém tvaru

$$Y(t) = V_1^\circ \cdot \left(\sin t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\right) + V_2^\circ \cdot \left(2 - \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right),$$

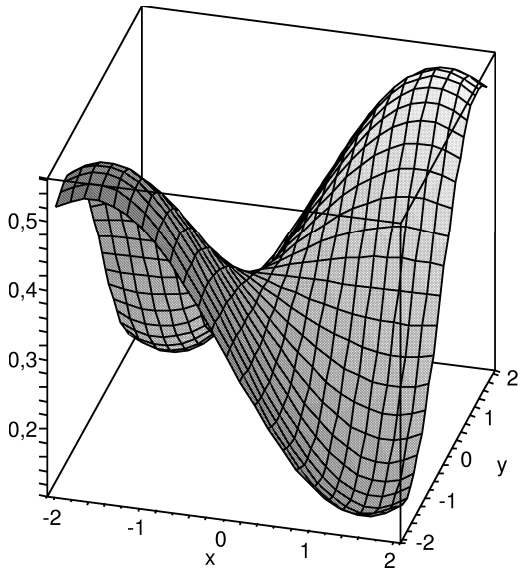
odkud

$$K_y(t, t') = \sum_{i=1}^{2} \psi_i(t) \cdot \psi_i(t') \cdot D_i =$$

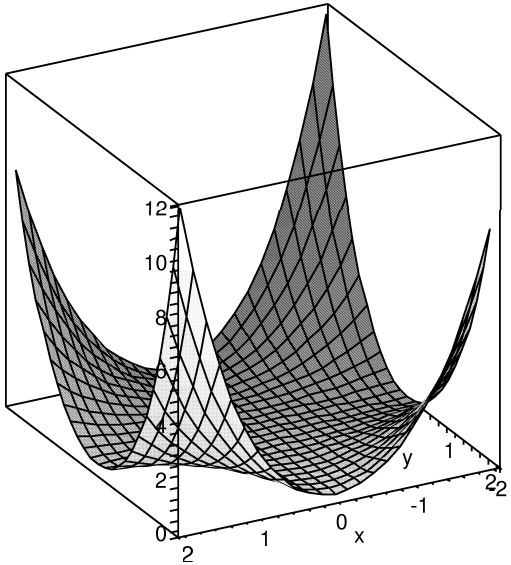
$$= \left(\sin t - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\right) \cdot \left(\sin t' - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t'} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t'}\right) \cdot \frac{2}{9} +$$

$$+ \left(2 - \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}\right) \cdot \left(2 - \mathrm{e}^{t'} - \mathrm{e}^{-t'}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

Autokorelační funkce vstupu $K_x(t, t')$:



Autokorelační funkce odezvy $K_Y(t, t')$:



Literatura

J. S. Ventcelová: Teória pravdepodobnosti, alfa Bratislava, 1972
V. S.Pugačev: Teorija slučajnych funkcij i jeje primenenije
k zadačam avtomatičeskogo uravnenija, Moskva 1960